

Ekonomicko-matematické metody 7



Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Příklad: 3 účelové funkce

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{MIN};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

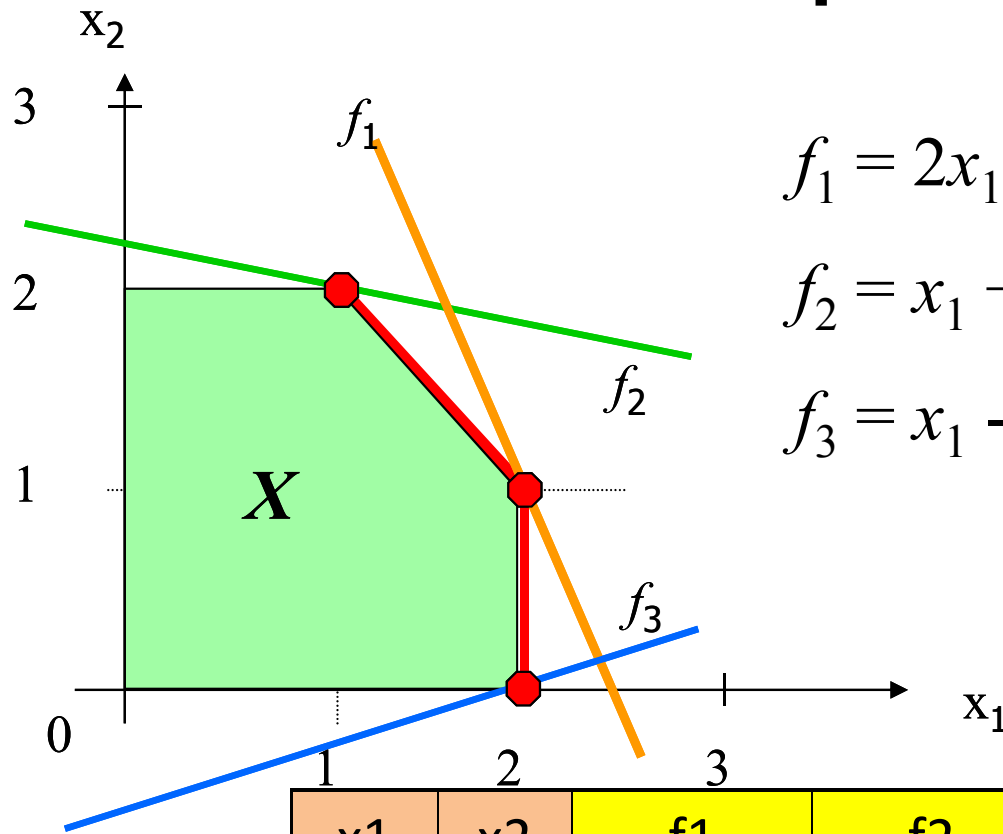
$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

} **X**

$$-f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{MAX};$$



Příklad pokrač.



$$f_1 = 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = -2x_1 + f_1$$

$$f_2 = x_1 + 5x_2 \Rightarrow x_2 = -0,2x_1 + f_2$$

$$f_3 = x_1 - 3x_2 \Rightarrow x_2 = 0,33x_1 - 0,33f_3$$

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3
2	1	5	3	-1
1	2	4	11	-5
2	0	4	2	2

Které „řešení“ je nejlepší?

Vícekriteriální programování

Nelineární VKP: Základní úloha

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX};$$

.....

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX};$$

(1) účelové funkce-
-kritéria (všechny MAX, nebo
všechny MIN)

za podmínek

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$

.....

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

\mathbf{X}

(2) omezující podmínky
(mohou chybět)

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - varianty - alternativy

Příklad 1: VKNLP

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

} ***X***

Definice nedominované varianty

- Necht' $\mathbf{x}^{(0)}$ je přípustné řešení vyhovující omezením (2). Řekneme, že přípustné řešení

$$\mathbf{x}^{(1)} \text{ **dominuje** } \mathbf{x}^{(0)}$$

jestliže pro **všechna** kritéria $j = 1, \dots, m$ platí:

$$f_j(\mathbf{x}^{(1)}) \geq f_j(\mathbf{x}^{(0)}) \text{ a **alespoň pro jedno kritérium** „}k\text{“ je:}$$

$$f_k(\mathbf{x}^{(1)}) > f_k(\mathbf{x}^{(0)})$$

- Jestliže **neexistuje** přípustné $\mathbf{x}^{(1)}$ takové, že $\mathbf{x}^{(1)}$ dominuje $\mathbf{x}^{(0)}$

potom se $\mathbf{x}^{(0)}$ nazývá

nedominovaná (Paretovská) varianta (řešení)

Nedominovaná varianta

V úloze VKP obvykle není k dispozici „*optimální řešení*“ \mathbf{x}^* v tom smyslu, že pro **všechna** kritéria f_j

a **všechna** přípustná řešení $\mathbf{x} \in X$ platí:

$$f_j(\mathbf{x}^*) \geq f_j(\mathbf{x})$$

Odstraní-li všechna dominovaná řešení, zůstanou nedominovaná řešení!

(...stejně jich je obvykle příliš mnoho!)

Příklad 1. Skalarizovaná úloha

Váhy: $v_1 = 0,5$ $v_2 = 0,3$ $v_3 = 0,2$

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

$$v_1 f_1(x_1, x_2) + v_2 f_2(x_1, x_2) + v_3 f_3(x_1, x_2) \rightarrow \text{MAX};$$

tj.

$$0,5(2x_1 + x_2^2) + 0,3(x_1 + 5x_2) + 0,2(x_1 - 3x_2) \rightarrow \text{MAX};$$

tj.

$$1,5x_1 + 0,5x_2^2 + 0,9x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

} **X**
EMM7

Vztah mezi Paretovským řešením úlohy VKP a optimálním řešením skalarizované úlohy VKP

f_1, f_2, \dots, f_k - **ryze** konkávní funkce (kritéria)

g_1, g_2, \dots, g_m - konvexní funkce

- Pak platí, že: x^* je nedominované (Paretové) řešení úlohy (1), (2), **právě když** existují váhy kritérií

$$v_1, v_2, \dots, v_k \quad v_i \geq 0 \quad \sum v_i = 1$$

takové, že x^* je optimální řešení **skalarizované úlohy**:

$$\sum v_j f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX}; \quad (1^*)$$

za omezení (2),

$$\text{tj.} \quad x^* = \operatorname{argmax}_{x \in X} \sum_{i=1}^k v_i f_i(x)$$

Vícekriteriální **lineární** programování

VKLP

- Speciální případ: f_j g_i jsou lineární funkce, tj.

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2 + \dots + c_{nj}x_n$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \dots + a_{ni}x_n$$

- Vektorový tvar úlohy VKLP:

$$\mathbf{C} \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}; \text{ tj. } \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \end{bmatrix} \rightarrow \text{MAX}; \quad (3)$$

za omezení

$$X = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \quad (4)$$

Vícekriteriální lineární programování

VKLP

Skalarizovaný tvar úlohy VKLP:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k) - \text{vektor vah: } v_1, v_2, \dots, v_k \quad v_i \geq 0 \\ \sum v_i = 1$$

Z vícekriteriální úlohy se skalarizací stane **jednokriteriální** úloha:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}; \quad (3^*)$$

za omezení

$$X = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \} \quad (4)$$

$$\text{přitom } \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k v_i \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n v_i c_{ij} x_j$$

Vztah mezi Paretovským řešením úlohy VKLP a optimálním řešením skalarizované úlohy VKLP

1. Necht' \mathbf{x}^* je nedominované (Paretovské) řešení úlohy (3), (4), tj. úlohy VKLP.

Potom **existuje** vektor vah

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

takových, že \mathbf{x}^* je **optimální řešení** skalarizované úlohy VKLP, tj.

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{v} \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (5)$$

2. Necht' pro $\mathbf{x}^* \in X$ a pro vektor **kladných** vah

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ platí (5).

Potom \mathbf{x}^* je nedominované (Paretovské) řešení úlohy (3), (4)

Příklad 2. VKLP

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

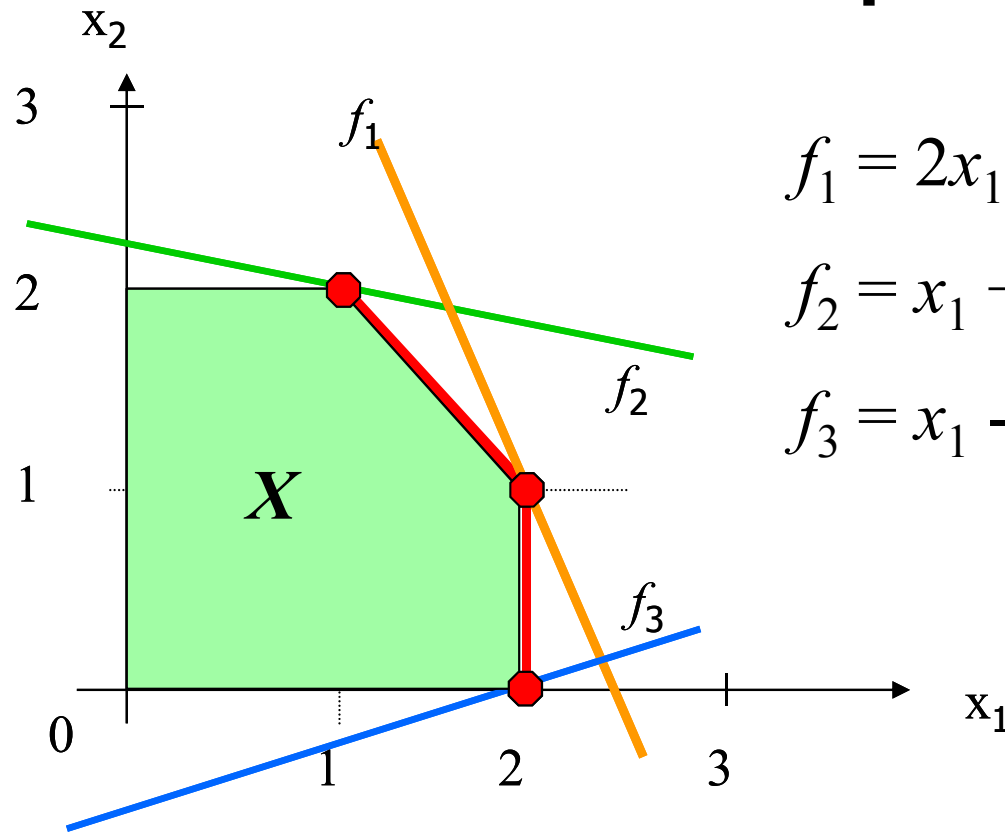
za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

} ***X***

Příklad 2. pokrač.



$$f_1 = 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = -2x_1 + f_1$$

$$f_2 = x_1 + 5x_2 \Rightarrow x_2 = -0,2x_1 + f_2$$

$$f_3 = x_1 - 3x_2 \Rightarrow x_2 = 0,33x_1 - 0,33f_3$$

Paretovská řešení
(červená)

$$\mathbf{x}_1^* = (x_1^*, x_2^*) = (2, 1) \quad \mathbf{x}_2^* = (1, 2) \quad \mathbf{x}_3^* = (2, 0)$$

Minimaxová optimalizace

Maximalizuje se nejhorší (minimální) hodnota:

$$\min \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \rightarrow \text{MAX}; \quad (6)$$

za omezení

$$\left. \begin{array}{l} g_1(\mathbf{x}) \leq b_1 \\ \dots\dots\dots \\ g_m(\mathbf{x}) \leq b_m \end{array} \right\} \mathbf{X}$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Optimální řešení úlohy (6) je nedominované (Paretovské)

Minimaxová optimalizace: ekvivalentní tvar

Přidáme novou - umělou proměnnou w

(nejmenší hodnota ze všech kritérií):

$$w \rightarrow \text{MAX}; \quad (7)$$

za omezení

$$f_1(\mathbf{x}) \geq w$$

.....

$$f_k(\mathbf{x}) \geq w$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$$

Příklad 3.

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

Příklad 3. pokrač.

$w \rightarrow \text{MAX};$

za omezení

$$2x_1 + x_2 \geq w$$

$$x_1 + 5x_2 \geq w$$

$$x_1 - 3x_2 \geq w$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq w$$

} Hodnoty kritérií
současně

Optimální řešení: $\mathbf{x}^* = (2, 0)$

Cílové programování


- Účelové funkce (kritéria) = cílové funkce f_i
- Předem jsou známy **cílové hodnoty** q_i , kterých mají cílové funkce dosáhnout (nebo ke kterým se mají co nejvíce přiblížit)
- **Optimální řešení** - minimalizuje součet odchylek od cílových hodnot, tj. součet absolutních hodnot rozdílů funkčních a cílových hodnot

Cílové lineární programování

CLP

q_i – zadané cílové hodnoty i -tého kritéria

Minimalizuje se součet (součet kvadrátů) odchylek od cílových hodnot:

$$\sum_{i=1}^k |c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n - q_i| \rightarrow \text{MIN};$$
$$\sum_{i=1}^k (c_i^T x - q_i)^2 \rightarrow \text{MIN}; \quad (8)$$


za omezení

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

Pozor! Není úloha LP !!

Optimální řešení (8) nemusí být nedominované!

Cílové lineární programování

ekvivalentní úloha

q_i – zadané cílové hodnoty

1. Minimalizuje se součet kladných h_i a záporných d_i - odchylek od **cílových hodnot** q_i , resp.

$$\sum_{i=1}^k (d_i + h_i) \rightarrow \text{MIN};$$

za omezení

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

$$-d_i \leq c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n - q_i \leq h_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

$$h_i \geq 0, d_i \geq 0$$

Příklad 4.

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

Cílové hodnoty kritérií: $q_1 = 3, q_2 = 4, q_3 = 5$

Příklad 4: dokončení

$$d_1 + d_2 + d_3 + h_1 + h_2 + h_3 \rightarrow \text{MIN};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

$$-d_1 \leq 2x_1 + x_2 - 3 \leq h_1$$

$$-d_2 \leq x_1 + 5x_2 - 4 \leq h_2$$

$$-d_3 \leq x_1 - 3x_2 - 5 \leq h_3$$

$$d_i \geq 0, h_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

} \mathbf{x}

} Rozdíl mezi
hodnotami a
stanovenými cíli

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (1,222 ; 0,555)$$

[VKLP.xls](#)

EMM7

Souhrn: 3 metody řešení VKLP

- **Metoda váženého součtu:** váhy mohou představovat relativní významnosti (důležitosti) jednotlivých kritérií
- **Metoda minimaxu:** realizuje pesimistické kompromisní řešení – najde nejlepší z možných špatných situací
- **Cílové programování:** nejpoužívanější metoda – minimalizuje součet odchylek od zadaných cílů:

Např. minimalizace (maximalizace) odchylek od ideálních (bazálních) hodnot jednotlivých kritérií (Předchází řešení úloh LP s individuálními kritérii!)

Všechny úlohy lze řešit v Excelu – Řešiteli (semináře)