Ekonomicko-matematické metody č. 9

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Akciové analýzy

1. Fundamentální analýza

- Předpokládá se existence ***vnitřní hodnoty*** CP (např. akcie)
- Hledání podhodnocených CP (nákup) a nadhodnocených CP (prodej)
- Globální analýza – vlivy makro-agregátů (HDP, inflace)
- Odvětvová analýza – měří citlivost odvětví na hospodářský cyklus, vládní regulace, sílu odborů, míru inovací,…

Akciové analýzy

2. Technická analýza

- Předpokládají se trendy ***v kurzech*** CP (bull-bear, akumulační a distribuční fáze)
- Předmětem analýzy jsou časové řady ***tržních cen*** CP
- Rozpoznávání tvarů – formací ČŘ (vlajky, prapory,
- Použití ***matematických modelů***, grafických a jiných technických prostředků

3. Psychologická analýza

- Psychologické faktory pohybů kurzů

Teorie portfolia (PF)

Investiční PF – soubor CP (akcií) splňující určité podmínky držený investorem

Výnos akcie = kapitálový výnos + výnos z dividend

kapitálový výnos = prodejní cena – nákupní cena

Riziko akcie = kolísání ceny akcie v čase (volatilita)

měří se **směrodatnou odchylkou**

Výnos (riziko) PF = celkový výnos (celkové riziko) vybrané kombinace CP v PF

Teorie PF – souhrn metod hledání takové kombinace vybraných CP, která maximalizuje výnos a zároveň minimalizuje riziko PF

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL Historický přístup (historická metoda)

- Úkolem je sestavit „optimální portfolio“ (PF) aktiv (AK), např. akcií.
- Portfolio
  - nejdříve nakoupíme,
  - potom jej držíme určitý počet (obchodních) dnů,
  - nakonec jej prodáme.

- Účelem je sestavit portfolio tak, aby
  - kapitálový výnos = (prodejní cena − nákupní cena) byl <u>max</u>imální
  - riziko („volatilita“, kolísání ceny), tj. riziko ztráty, bylo <u>min</u>imální

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Rozhodneme se, jak dlouho budeme portfolio držet.
- Nechť N označuje počet obchodních dnů, po které budeme portfolio držet.

- Současně vybereme aktiva (akcie), která do portfolia budeme zařazovat.
- Nechť M označuje počet aktiv zařazených do portfolia.

- Když aktiva v portfoliu označíme čísly $1, 2, \dots, M$, tak úkolem je nalézt poměry, tj. relativní zastoupení $Z_1, Z_2, \dots, Z_M$ aktiv v portfoliu. Zde $Z_1, Z_2, \dots, Z_M \geq 0$ a $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_M = 1$.

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Sledujeme relativní kapitálový výnos aktiv č. $1, 2, \dots, M$ během stanoveného období N obchodních dnů.

- Relativní (kapitálový) výnos i-tého aktiva ($i = 1, 2 \dots, M$) za N obchodních dnů je

$$X_i = \frac{C_{i,D+N} - C_{i,D}}{C_{i,D}}$$

kde

$C_{i,D}$ = tržní cena i-tého aktiva obchodního dne D

$C_{i,D+N}$ = tržní cena i-tého aktiva obchodního dne $D + N$, tj. za N obchodních dnů po dni D

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Relativní (kapitálový) výnos i-tého aktiva $(i = 1, 2 \dots, M)$ za N obchodních dnů

$$X_i = \frac{C_{i,D+N} - C_{i,D}}{C_{i,D}}$$

chápeme jako náhodnou veličinu.

- Její očekávanou (střední) hodnotu označíme R_i nebo μ_i, tj.

$$R_i = \mu_{\mathrm{i}} = \mathrm{E}[X_i] \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Když $Z_1, Z_2, \ldots, Z_M$ je relativní zastoupení aktiv č. $1, 2 \ldots, M$ v portfoliu, potom relativní kapitálový výnos celého portfolia za N obchodních dnů je

$$X_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} Z_i X_i = Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + \cdots + Z_M X_M$$

(náhodná veličina), a její střední (očekávaná) hodnota je

$$R_{\mathrm{PF}} = \mu_{X_{\mathrm{PF}}} = \mathrm{E}[X_{\mathrm{PF}}] = \sum_{i=1}^{M} Z_i R_i = \sum_{i=1}^{M} Z_i \mathrm{E}[X_i]$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Chceme najít relativní zastoupení $Z_1, Z_2, \ldots, Z_M$ aktiv č. $1, 2 \ldots, M$ tak, aby

$$R_{\mathrm{PF}} = \mu_{X_{\mathrm{PF}}} = \mathrm{E}[X_{\mathrm{PF}}] = \sum_{i=1}^{M} Z_i R_i \ \longrightarrow \ \max$$

- Současně riziko (volatilitu) chceme $\rightarrow$ min.

- Riziko (volatilitu) lze definovat (měřit) různými způsoby.

- Oblíbenou mírou rizika je také směrodatná odchylka (odmocnina z rozptylu).

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Připomeňme, že rozptyl náhodné veličiny X je

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2]$$

- a směrodatná odchylka je

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\sigma_X^2}$$

- Kovariance dvou náhodných veličin X a Y je

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])]$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Když $Z_1, Z_2, \dots, Z_M$ je relativní zastoupení aktiv č. $1, 2 \dots, M$ v portfoliu, potom rozptyl relativního kapitálového výnosu celého portfolia za N obchodních dnů je

$$\mathrm{Var}(X_{\mathrm{PF}}) = \sigma_{X_{\mathrm{PF}}}^2 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} Z_i \times \mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right) \times Z_j$$

- a riziko portfolia tudíž je

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\mathrm{Var}(X_{\mathrm{PF}})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j}$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Shrnuto, řešíme dvojkriteriální optimalizační úlohu

$$R_{\mathrm{PF}} = \mu_{X_{\mathrm{PF}}} = \mathrm{E}[X_{\mathrm{PF}}] = \sum_{i=1}^{M} R_i Z_i \ \longrightarrow \ \max$$

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\mathrm{Var}(X_{\mathrm{PF}})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j} \ \longrightarrow \ \min$$

za podmínek

$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_M = 1 \qquad \mathrm{a} \qquad Z_1, Z_2, \ldots, Z_M \geq 0$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Potíž: Neznáme očekávané relativní výnosy $R_i = \mu_i = \mathrm{E}[X_i]$ jednotlivých aktiv $(i = 1, 2, \dots, M)$, ani jejich vzájemné kovariance $\sigma_{X_i X_j} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$ pro $i, j = 1, 2, \dots, M$.

- Jak tato data získáme?

- $\rightarrow$ Metodou historických dat (historickou metodou).

- Potřebujeme získat
(bodové) odhady $\bar{R}_i = \hat{\mu}_i$ jejich středních hodnot a
(bodové) odhady $s_{X_i X_j} = \hat{\sigma}_{X_i X_j}$ jejich kovariancí.

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Když portfolio chceme nakoupit dne D, držet jej N obchodních dnů, a pak jej prodat, tak…
- …zvolíme historické období T obchodních dnů předcházejících obchodnímu dni D.
- Přitom volíme $T \gg N$, tj. mnohem vyšší než N.
- Nechť c_{it} označuje tržní cenu i-tého aktiva v obchodním dni $t = D - T, \; D - T + 1, \; D - T + 2, \; \ldots, \; D$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Když c_{it} označuje tržní cenu i-tého aktiva v obchodním dni t, pak

$$x_{it} = \frac{c_{it} - c_{it-N}}{c_{it-N}} \qquad \text{pro} \quad t = D - T + N,\ \ldots,\ D$$

  je <u>realizace</u> náhodné veličiny X_i v obchodním dni / okamžiku / čase $t = D - T + N,\ \ldots,\ D$.

- Pak bodový odhad $\bar{R}_i = \hat{\mu}_i$ střední hodnoty $\mu_i = \mathrm{E}[X_i]$ náhodné veličiny X_i získáme jako aritmetický / výběrový průměr (*sample mean*) těchto realizací:

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T - N + 1} \sum_{t=D-T+N}^{D} x_{it}$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Pak bodový odhad $\bar{R}_i = \hat{\mu}_i$ střední hodnoty $\mu_i = \mathrm{E}[X_i]$ náhodné veličiny X_i získáme jako aritmetický / výběrový průměr (*sample mean*) těchto realizací:

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T-N+1} \sum_{t=D-T+N}^{D} x_{it}$$

- A bodový odhad $s_{X_i X_j} = \hat{\sigma}_{X_i X_j}$ kovariance $\sigma_{X_i X_j} = \mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right)$ náhodných veličin X_i a X_j získáme jako výběrovou kovarianci (*sample covariance*) těchto realizací:

$$s_{X_i X_j} = \frac{1}{T-N} \sum_{t=D-T+N}^{D} (x_{it} - \bar{R}_i)\left(x_{jt} - \bar{R}_j\right)$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Tudíž, když $Z_1, Z_2, \ldots, Z_M$ jsou relativní zastoupení aktiv v portfoliu, potom **odhad** střední (očekávané) hodnoty $R_{\mathrm{PF}} = \mu_{X_{\mathrm{PF}}} = \mathrm{E}[X_{\mathrm{PF}}] = \sum_{i=1}^{M} Z_i R_i$ náhodné veličiny X_{PF} (relativní kapitálový výnos celého portfolia za N obchodních dnů) je

$$\bar{R}_{\mathrm{PF}} = \hat{\mu}_{X_{\mathrm{PF}}} = \sum_{i=1}^{M} Z_i \bar{R}_i$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- …a, když $Z_1, Z_2, \dots, Z_M$ jsou relativní zastoupení aktiv v portfoliu, potom **odhad** rozptylu $\mathrm{Var}(X_{\mathrm{PF}}) = \sigma^2_{X_{\mathrm{PF}}}$ náhodné veličiny X_{PF} (relativní kapitálový výnos celého portfolia za N obchodních dnů) je

$$s^2_{X_{\mathrm{PF}}} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} Z_i \times s_{X_i X_j} \times Z_j$$

- a **odhad** rizika portfolia je

$$s_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{s^2_{X_{\mathrm{PF}}}}$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

- Shrnutí: Řešíme přibližnou úlohu dvojkriteriálního programování

$$\bar{R}_{\mathrm{PF}} = \hat{\mu}_{X_{\mathrm{PF}}} = \sum_{i=1}^{M} \bar{R}_i Z_i \quad \longrightarrow \quad \max$$

$$s_{X_{\mathrm{PF}}} = \hat{\sigma}_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{s^2_{X_{\mathrm{PF}}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s_{X_i X_j} Z_i Z_j} \quad \longrightarrow \quad \min$$

za podmínek

$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_M = 1 \qquad \mathrm{a} \qquad Z_1, Z_2, \dots, Z_M \geq 0$$

KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL (historická metoda)

Poznámka: Když

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} s_{X_1X_1} & s_{X_1X_2} & \cdots & s_{X_1X_M} \\ s_{X_2X_1} & s_{X_2X_2} & \cdots & s_{X_2X_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{X_MX_1} & s_{X_MX_2} & \cdots & s_{X_MX_M} \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_M \end{pmatrix}$$

je matice výběrových kovariancí resp. vektor relativních zastoupení aktiv v portfoliu, pak

$$s_{X_{\mathrm{PF}}}^2 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s_{X_iX_j} Z_i Z_j = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} Z_i s_{X_iX_j} Z_j = \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S} \boldsymbol{Z}$$

tj. součin matic.

Příklad 1.

Data: Ceny 3 akcií na PBCP

Ceny akcií (denní, Kč):

datum	CETV	CEZ	KOBA
1	1 856,00	1 059,00	4 266,00
2	1 913,00	1 072,00	4 108,00
3	1 905,00	1 094,00	4 108,00
4	1 868,00	1 182,00	4 072,00
5	1 860,00	1 186,00	3 987,00
....			
65	1 968,00	1 360,00	4 303,00
66	2 034,00	1 334,00	4 373,00
67	2 032,00	1 308,00	4 328,00
68	2 036,00	1 254,00	4 396,00
69	2 021,00	1 228,00	4 343,00

Relativní výnosy akcií (30-denní):

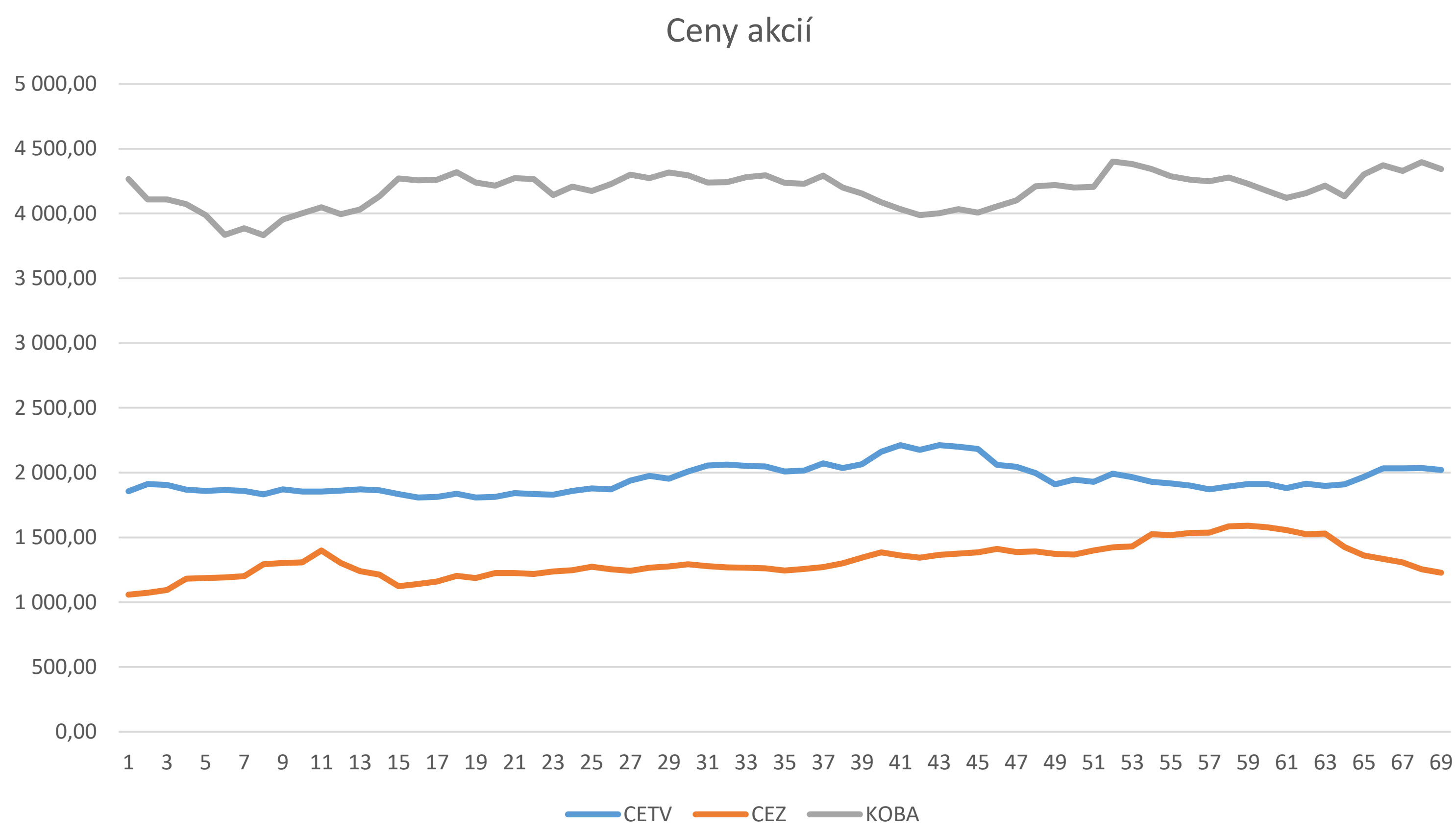
datum	CETV	CEZ	KOBA
31	0,1067	0,2077	-0,0063
32	0,0784	0,1828	0,0326
33	0,0777	0,1572	0,0419
34	0,0958	0,0668	0,0548
35	0,0806	0,0497	0,0625
....			
67	-0,0193	0,0299	0,0084
68	0,0000	-0,0361	0,0464
69	-0,0208	-0,0856	0,0452
Průměry:	0,0563	0,1305	0,0122
Rozptyly:	0,0065	0,0078	0,0016
Sm.odchylky:	0,0805	0,0885	0,0401
	CETV	CEZ	KOBA

$$x_{it} = \frac{c_{it} - c_{i(t-30)}}{c_{i(t-30)}}$$

$$t = 31, 32, \dots, 69 \quad i = \text{CTV, CEZ, KOBA}$$

Příklad 1. Grafy cen akcií

Ceny akcií CTV, CEZ, KOBA:



Příklad 1. Kovariance

Kovariance mezi 2 akciemi vyjadřuje:
„Závislosti mezi jednotlivými akciemi"

- Pozitivní hodnota (růst vers. růst, pokles vers. pokles)
- Negativní hodnota (růst vers. pokles, pokjles vers. růst)

Výběrové kovariance:

	CTV	CEZ	KOBA
CTV	0,00648	-0,00182	0,00033
CEZ	-0,00182	0,00783	-0,00201
KOBA	0,00033	-0,00201	0,00161

rozptyly

- **Matice výběrových kovariancí**: $S = \{s_{ij}\}$
- Funkce v Excelu: =COVARIANCE.S(A;B), např. =COVARIANCE.S(I3:I41;I3:I41)

Příklad 1. Kovariance, korelační koeficient, variance (rozptyl)…

Kovariance výběrová:

- matematicky: s_{XY}
- v Excelu: =COVARIANCE.S(A;B)

A, B – oblasti stejného typu, např. A=a1:a5, B=b1:b5

Variance (rozptyl) výběrový:

- matematicky: s_X^2
- V Excelu: =VAR.S(A)

výběrová směrodatná odchylka: s_X

V Excelu: =SMODCH.VÝBĚR.S(A), =ODMOCNINA(VAR.S(A))

Příklad 1. Kovariance, korelační koeficient, variance (rozptyl)

Korelace:

- matematicky: ρ_{XY}
- v Excelu: =CORREL(A;B)

A, B – oblasti stejného typu, např. A=a1:a5, B=b1:b5

Vztah mezi kovariancí a korelací:

- matematicky: $\boxed{\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$

Platí: $\boxed{-1 \leq \rho_{XY} \leq 1}$

Příklad 1. Očekávaný (střední) výnos PF

$$\boxed{\mathrm{E}[X_{\mathrm{PF}}] = \Sigma\, R_i Z_i}$$

kde

R_i – očekávaný výnos (průměr) i-té akcie: $i = 1, 2, 3$

(tj. CTV, CEZ, KOBA)

Z_i – podíl i-té akcie v PF

Konkrétně:

$$\bar{R}_{\mathrm{PF}} = 0{,}0563.Z_1 + 0{,}1305.Z_2 + 0{,}0122.Z_3$$

Např. při *stejných podílech* akcií v PF: $Z_i = 0{,}333$ ($i = 1, 2, 3$)

$\bar{R}_{\mathrm{PF}} = 0{,}0563.0{,}333 + 0{,}1305.0{,}333 + 0{,}0122.0{,}333 = 0{,}0663$

tj. <u>odhad</u> očekávaného výnosu PF = 6,63%

Příklad 1. Riziko PF

Riziko PF = směrodatná odchylka PF: σ_{PF}

$$\boxed{\sigma_{PF} = \sqrt{Var(PF)} = \sqrt{\Sigma\Sigma\sigma_{ij} Z_i Z_j}}$$

kde

Var(PF) – rozptyl (variance) PF

Maticová symbolika (pozor, v Excelu fce: =SOUČIN.MATIC)

$$\boxed{s_{PF} = \sqrt{Z^T S\, Z}}$$

kde $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ je vektor podílů akcií v PF

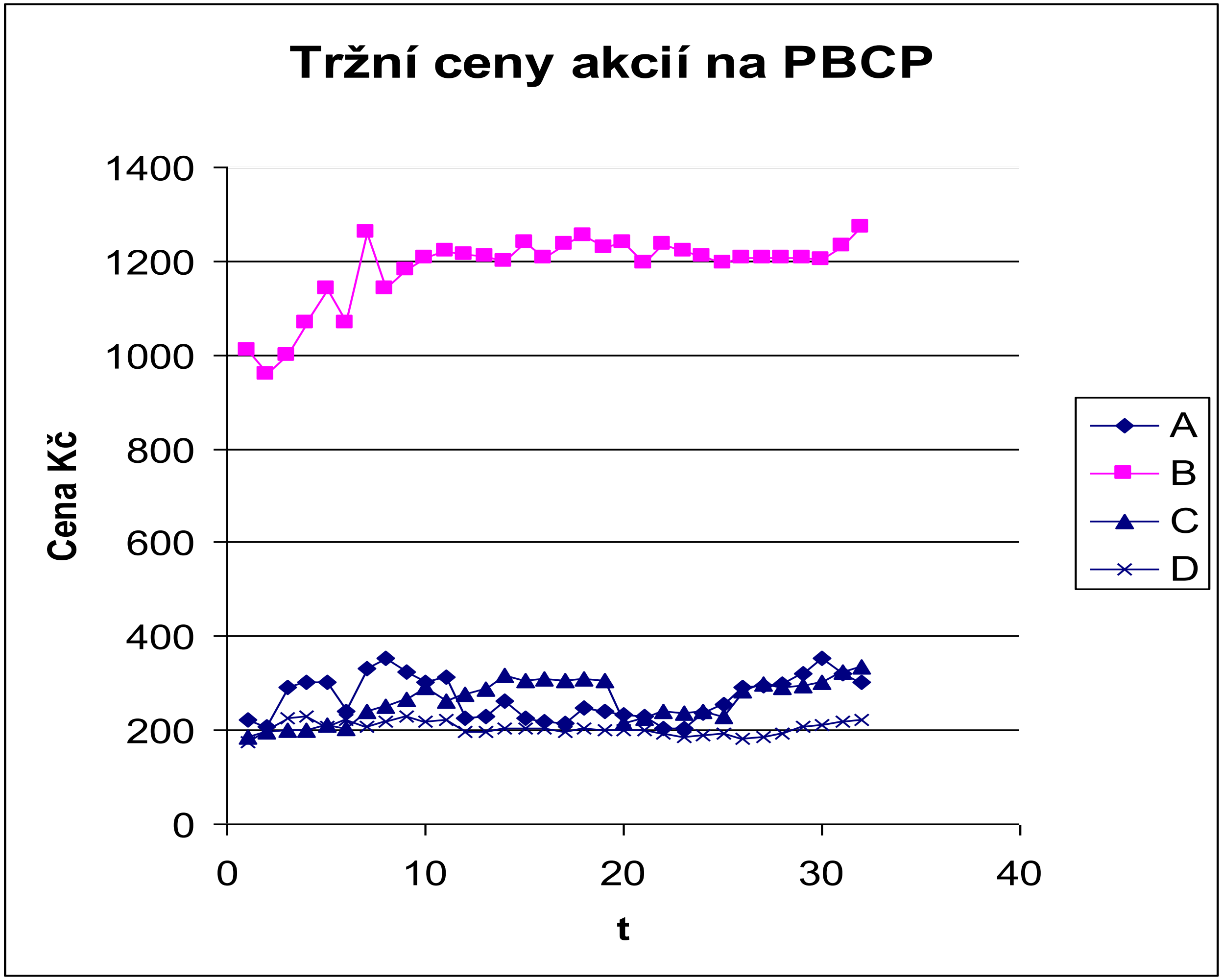
S – matice výběrových kovariancí

Příklad 2.

Počet AK: $M = 4$

Počet údajů čas. řad: $T = 32$

Počet čas. intervalů trvání PF: $N = 5$



Příklad 2.

Výpočet (relativních) výnosů AK =

pozorování – realizace náhodné veličiny:

$$x_{it} = \frac{c_{it} - c_{i(t-5)}}{c_{i(t-5)}} \qquad \text{pro} \quad t = 6, 7, \dots, 32$$

$$\text{a pro} \quad i = A, B, C, D$$

Příklad 2.

Tržní ceny c_{it} akcií na PBCP:

Č.obch.dne= t	A	B	C	D
1	221	1010	187	175
2	208	960	197	199
3	290	1000	202	225
4	301	1070	200	230
5	302	1140	211	206
6	240	1070	205	224
7	331	1260	240	207
8	355	1140	253	220
9	325	1180	266	229
10	301	1205	290	220
11	315	1220	263	224
12	227	1215	277	198
13	230	1210	288	198
14	263	1200	316	204
15	227	1240	306	203
16	220	1205	311	205
17	216	1235	306	198
18	247	1255	310	203
19	240	1230	308	202
20	235	1240	215	200
21	230	1195	225	202
22	205	1235	242	195
23	205	1220	238	187
24	236	1210	239	190
25	256	1195	231	194
26	290	1206	285	184
27	294	1205	298	187
28	298	1205	291	192
29	322	1208	296	207
30	353	1204	303	210
31	320	1234	326	219
32	301	1271	334	224

$$x_{it} = \frac{c_{it} - c_{i(t-5)}}{c_{i(t-5)}}$$

$$x_{A6} = \frac{240-221}{221} = 0{,}086$$

$$x_{B6} = \frac{1070-1010}{1010} = 0{,}059$$

$$x_{C6} = \frac{205-187}{187} = 0{,}096$$

$$x_{D6} = \frac{224-175}{175} = 0{,}280$$

Očekávané rel. výnosy (odhady)

relativní 5-tidenní výnosy [%]:

t	A	B	C	D
6	0,086	0,059	0,096	0,280
7	0,591	0,313	0,218	0,040
8	0,224	0,140	0,252	-0,022
9	0,080	0,103	0,330	-0,004
10	-0,003	0,057	0,374	0,068
11	0,313	0,140	0,283	0,000
12	-0,314	-0,036	0,154	-0,043
13	-0,352	0,061	0,138	-0,100
14	-0,191	0,017	0,188	-0,109
15	-0,246	0,029	0,055	-0,077
16	-0,302	-0,012	0,183	-0,085
17	-0,048	0,016	0,105	0,000
18	0,074	0,037	0,076	0,025
19	-0,087	0,025	-0,025	-0,010
20	0,035	0,000	-0,297	-0,015
21	0,045	-0,008	-0,277	-0,015
22	-0,051	0,000	-0,209	-0,015
23	-0,170	-0,028	-0,232	-0,079
24	-0,017	-0,016	-0,224	-0,059
25	0,089	-0,036	0,074	-0,030
26	0,261	0,009	0,267	-0,089
27	0,434	-0,024	0,231	-0,041
28	0,454	-0,012	0,223	0,027
29	0,364	-0,002	0,238	0,089
30	0,379	0,008	0,312	0,082
31	0,103	0,023	0,144	0,190
32	0,024	0,055	0,121	0,198
Průměry:	0,066	0,034	0,104	0,008

Příklad 2.

Výpočet odhadu kovarianční matice =

výpočet matice $\boldsymbol{S} = \{s_{ij}\}$ výběrových kovariancí

$$s_{ij} = \frac{1}{26}\sum_{t=6}^{32}(x_{ij} - \bar{R}_i)(x_{jt} - \bar{R}_j) \qquad \text{pro} \quad i,j = A,B,C,D$$

kde

$$\bar{R}_i = \frac{1}{27}\sum_{t=6}^{32}x_{it} \qquad \text{pro} \quad i = A,B,C,D$$

Příklad 2.
Matice výběrových kovariancí

0,0598	0,0070	0,0169	0,0080
0,0070	0,0051	0,0050	0,0013
0,0169	0,0050	0,0361	0,0032
0,0080	0,0013	0,0032	0,0086

Odhady rizik akcií
(výběrové rozptyly)

2. KLASICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL - Expertní přístup

Historický přístup **nemusí respektovat** očekávání investorů pro budoucnost!!!

n_{e}	-	počet expertů
c_i	-	TC i-tého AK v okamžiku vzniku PF
e_{ik}	-	TC i-tého AK v okamžiku realizace PF stanovená k-tým expertem
d_{ik}	-	dividendy a další požitky z i-tého AK během trvání PF stanovené k-tým expertem

2. KLASICKÝ MODEL PF
Expertní přístup …

$$y_{ik} = \frac{e_{ik} + d_{ik} - c_i}{c_i}$$

- relativní výnos i-tého AK v okamžiku realizace PF stanovená k-tým expertem

$$R_i^{\mathrm{e}} = \frac{1}{n_{\mathrm{e}}} \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{e}}} y_{ik}$$

- experty očekávaný relativní výnos i-tého AK v okamžiku realizace PF

$$R_{\mathrm{PF}}^{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{M} R_i^{\mathrm{e}} Z_i$$

- odhad experty očekávaného relativního výnosu PF

Expertní odhad rizika PF:

$$s^{\mathrm{e}}_{X_i X_j} = \frac{1}{n_{\mathrm{e}}} \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{e}}} (y_{ik} - R^{\mathrm{e}}_i)(y_{jk} - R^{\mathrm{e}}_j)$$ - expertní odhad kovariance

$$s^{\mathrm{e}}_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s^{\mathrm{e}}_{ij} Z_i Z_j}$$ - expertní odhad rizika relativního výnosu PF

Poznámka:
V případě malého počtu expertů n_{e} je možné použít pro výpočet rizika historického přístupu.

ÚLOHA OPTIMALIZACE PORTFOLIA
Markowitzův a Sharpeho model

- **riziko**

$$s_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s_{X_i X_j} Z_i Z_j} \quad \longrightarrow \quad \min$$

→ **Markowitzův** model

- **výnos**

$$\bar{R}_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} \bar{R}_i Z_i \quad \longrightarrow \quad \max$$

→ **Sharpeho** model

za podmínek

$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_M = 1 \qquad \text{a} \qquad Z_1, Z_2, \dots, Z_M \geq 0$$

Markowitzův model

(zadaná úroveň výnosu a minimalizace rizika)

$$s_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s_{X_i X_j} Z_i Z_j} \quad \longrightarrow \quad \min$$

z.p.

$$\bar{R}_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} \bar{R}_i Z_i \geq c$$

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

kde c je zadaný požadovaný (kladný) relativní výnos PF,
d_i, h_i jsou nezáporné (kladné) konstanty (úrovně).

Sharpeho model

(zadaná úroveň rizika a maximalizace výnosu)

$$\bar{R}_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} \bar{R}_i Z_i \quad \longrightarrow \quad \max$$

z.p.

$$s_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s_{X_i X_j} Z_i Z_j} \leq b$$

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

kde b je zadaná dovolená (kladná) mez rizika PF,
d_i, h_i jsou nezáporné (kladné) konstanty (úrovně).

Markowitzův a Sharpeho model (poznámky)

- Pokud některé $d_i < 0$, tzv. *krátký prodej*, tj. aktivum i dne D prodáme, abychom disponovali větším kapitálem pro nákup, a po realizaci portfolia (dne $D + N$) jej koupíme zpět, potom jde o **Tobinův model** PF.

- Pokud mezi aktivy je i *bezrizikové aktivum*, tj. $\sigma_{X_{i_0} X_j} = 0$ pro $j = 1, 2, \dots, M$, kde aktivum i_0 je bezrizikové, např. dluhopis nebo termínovaný vklad v bance, potom jde o **Blackův model** PF.

Markowitzův a Sharpeho model (poznámky)

Riziko portfolia jsme měřili pomocí odhadu směrodatné odchylky

$$s_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s_{X_i X_j} Z_i Z_j}$$

<u>Jiné možnosti</u> měření rizika jsou:

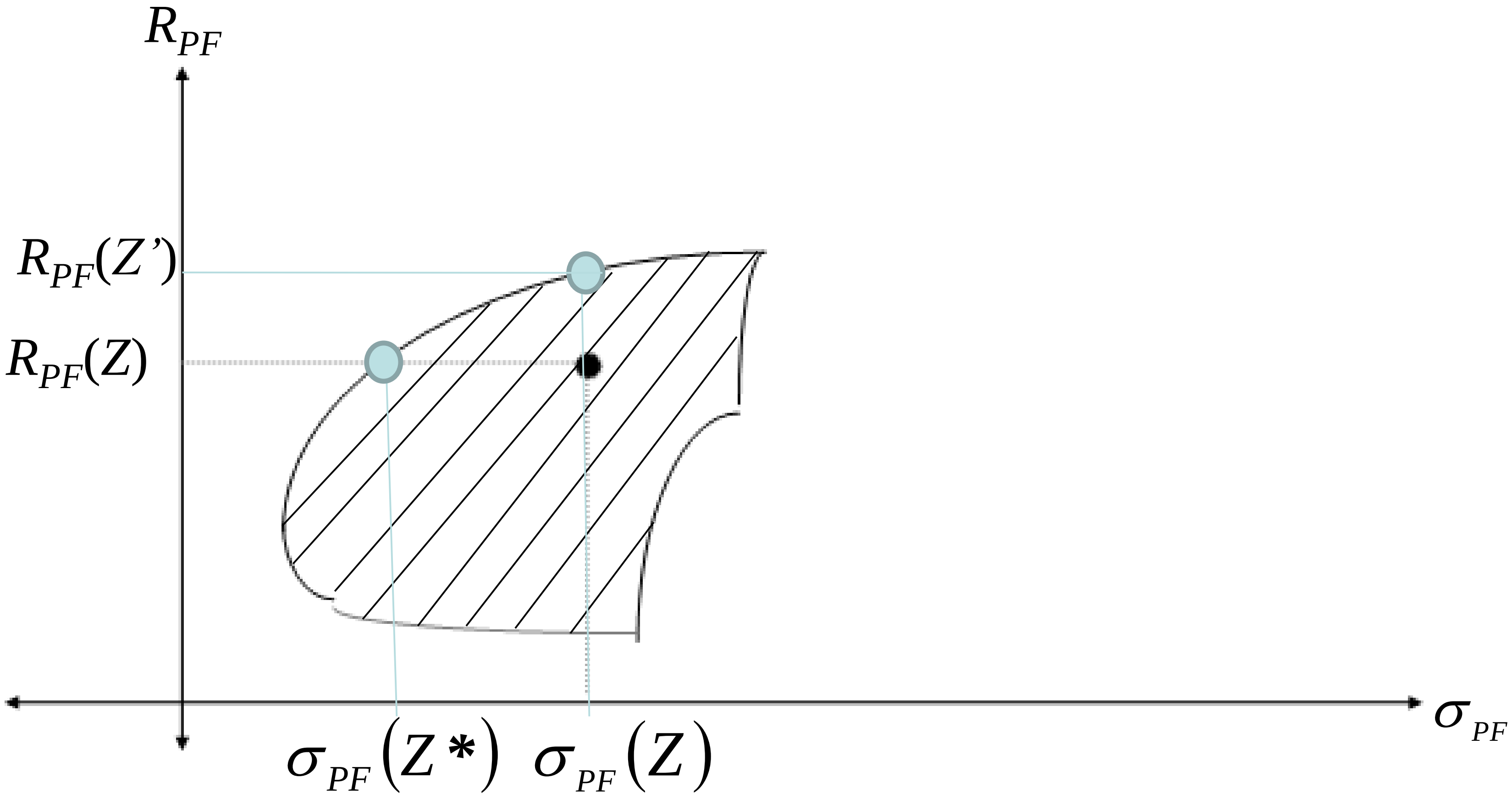
- **odhad rozptylu**

$$s^2_{X_{\mathrm{PF}}} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s_{X_i X_j} Z_i Z_j$$

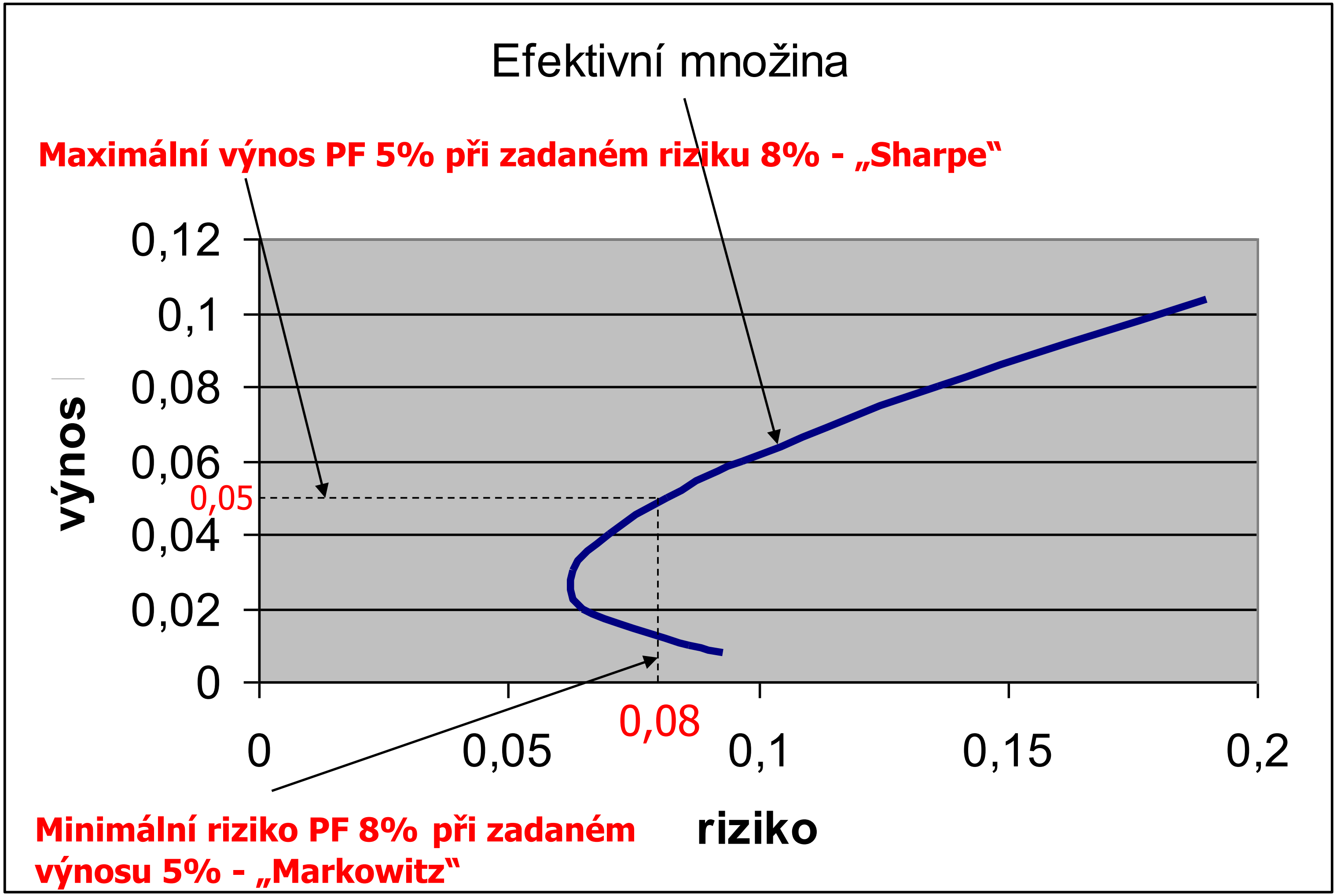
- **odhad variačního koeficientu**

$$\hat{V}_{X_{\mathrm{PF}}} = \frac{s_{X_{\mathrm{PF}}}}{\bar{R}_{\mathrm{PF}}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} s_{X_i X_j} Z_i Z_j}}{\sum_{i=1}^{M} \bar{R}_i Z_i}$$

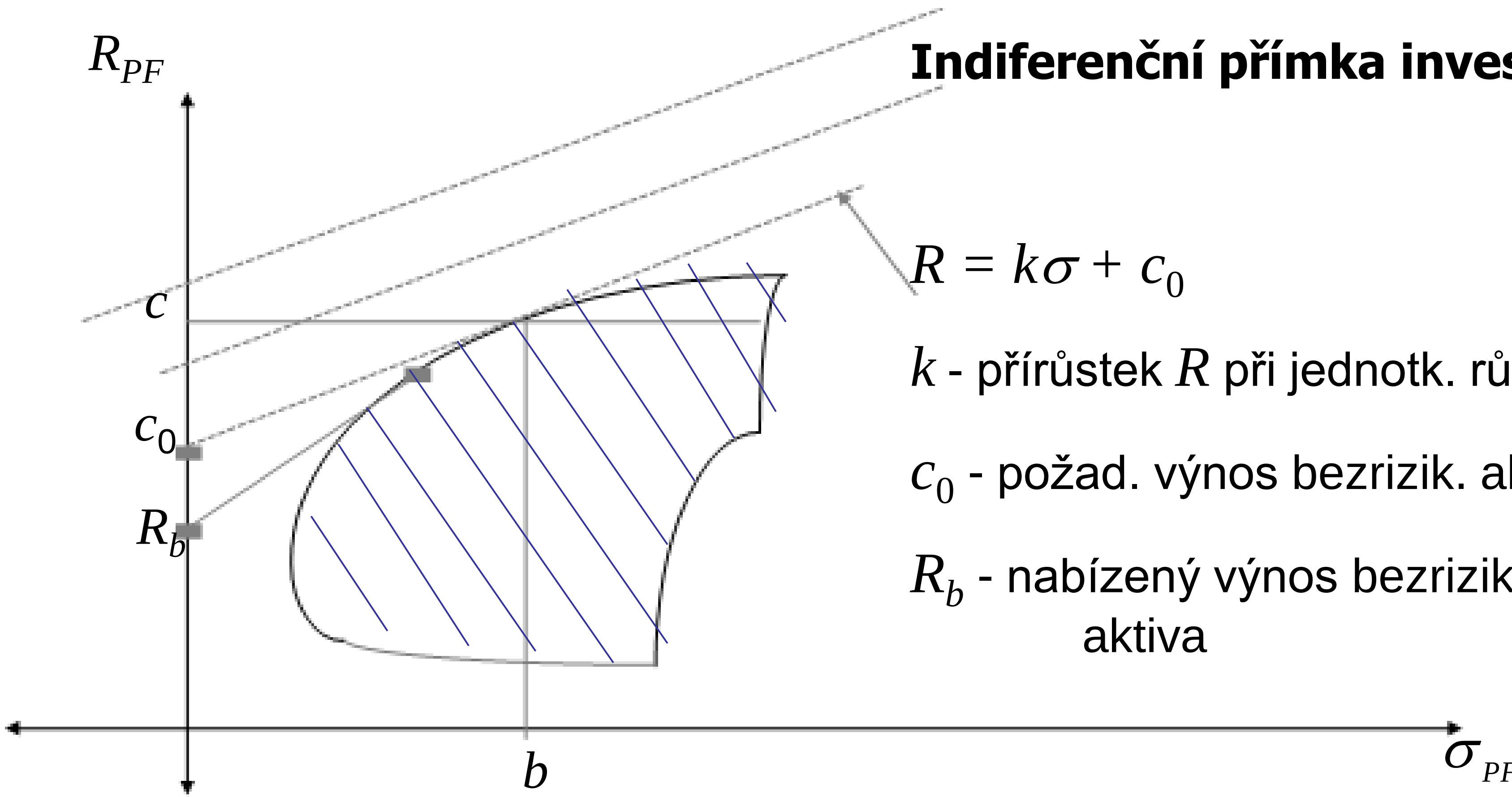
Množina přípustných portfolií
Eficientní množina



Množina efektivních (eficientních) portfolií
Eficientní množina



Množina eficientních portfolií



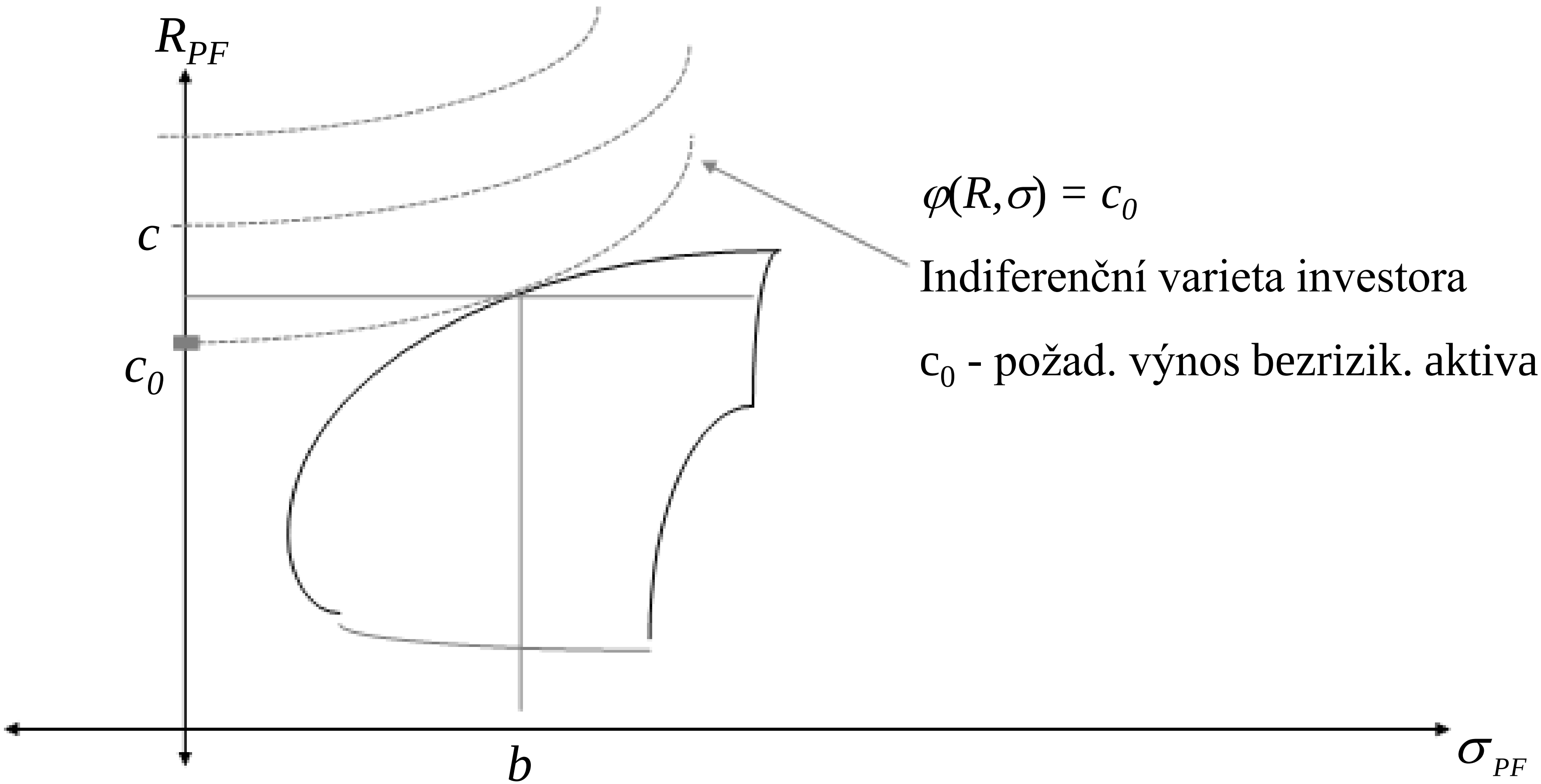
$R = k\sigma + c_0$

k - přírůstek R při jednotk. růstu σ

c_0 - požad. výnos bezrizik. aktiva

R_b - nabízený výnos bezrizik. aktiva

Množina eficientních portfolií …



$\varphi(R,\sigma) = c_0$

Indiferenční varieta investora

c_0 - požad. výnos bezrizik. aktiva

Příklad 3.

$$\varphi(R,\sigma) = \ log(R/e^{\sigma})$$

- Indiferenční varieta investora:

$$\varphi(R,\sigma) = \ c$$
$$log(R/e^{\sigma}) = \ c$$
$$R = e^{c\ +\ \sigma}$$