Ekonomicko-matematické metody č. 10

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Úloha optimalizace portfolia

Dvojkriteriální nelineární optimalizační problém

$$R_{\mathrm{PF}} = \mu_{X_{\mathrm{PF}}} = \mathrm{E}[X_{\mathrm{PF}}] = \sum_{i=1}^{M} R_i Z_i \;\longrightarrow\; \max$$

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\mathrm{Var}(X_{\mathrm{PF}})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j} \;\longrightarrow\; \min$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

$$d_i \le Z_i \le h_i \qquad \mathrm{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Úloha optimalizace portfolia
Dvojkriteriální nelineární optimalizační problém

NEBO

$$R_{\mathrm{PF}} = \mu_{X_{\mathrm{PF}}} = \mathrm{E}[X_{\mathrm{PF}}] = \sum_{i=1}^{M} R_i Z_i \ \longrightarrow \ \max$$

Variační koeficient:

$$V_{X_{\mathrm{PF}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X_{\mathrm{PF}})}}{R_{PF}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j}}{\sum_{i=1}^{M} R_i Z_i} \ \longrightarrow \ \min$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \qquad \mathrm{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Úloha optimalizace portfolia

X_i = rel. výnos i-tého aktiva (akcie) = náhodná veličina
$\mathrm{E}[X_i]$ = střední (očekávaná) hodnota výnosu i-tého aktiva
R_i = $\mathrm{E}[X_i]$ – označení
R_{PF} = $\sum_{i=1}^{M} R_i Z_i$
Z_i = relativní podíl i-tého aktiva v portfoliu (PF)

Přitom platí: $\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$

$d_i \le Z_i \le h_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, M$ – počet aktiv

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j}$$

$$\sigma_{X_i X_j} = \mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right)$$

Otázka: Jak odhadnout R_i a $\sigma_{X_i X_j}$?

!!!Vše se vztahuje na časový interval trvání PF!!!

Markowitzův model

(zadaná úroveň výnosu a minimalizace rizika)

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j} \quad \longrightarrow \quad \min$$

z.p.

$$R_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} R_i Z_i \geq c$$

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

kde c je zadaný požadovaný (kladný) relativní výnos PF,
d_i, h_i jsou nezáporné (kladné) konstanty (úrovně).

Sharpeho model

(zadaná úroveň rizika a maximalizace výnosu)

$$R_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} R_i Z_i \quad \longrightarrow \quad \max$$

z.p.

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j} \leq b$$

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

kde b je zadaná dovolená (kladná) mez rizika PF,
d_i, h_i jsou nezáporné (kladné) konstanty (úrovně).

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Nevýhodou klasického stochastického modelu je nutnost počítat kovarianční matici, která může být velká, když počet M uvažovaných akcií (aktiv) v portfoliu narůstá.

V kovarianční matici je potřeba určit

$$M^2 - \frac{M^2 - M}{2} = \frac{M^2 - M}{2} + M = \frac{M^2 + M}{2}$$

kovariancí aktiv.

Namísto toho uvažujeme, že relativní výnos aktiva závisí na nějakém faktoru akciového trhu.

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Jednoindexový (jednofaktorový) model:

Faktor = celý kapitálový trh,
reprezentovaný jedním indexem,
např. index PX, index RM, Dow Jones index,
indexy NASDAQ aj.

Předpokládáme, že pro relativní výnos i-tého aktiva platí vztah

$$X_i = \alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

kde

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ – jsou vhodné konstanty,
F – vysvětlující náh. veličina (faktor / index trhu)
ε_i – náhodná chyba (náhodný vliv)

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Předpokládáme, že pro relativní výnos i-tého aktiva platí vztah

$$X_i = \alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Dále předpokládáme, že:

$$\operatorname{cov}(F, \varepsilon_i) = 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M \qquad \text{(I)}$$

$$\mathrm{E}[\varepsilon_i] = 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0 \qquad \text{pro} \quad i, j = 1, 2, \dots, M, \quad i \neq j \qquad \text{(III)}$$

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Ze vztahu

$$X_i = \alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i$$

pak pro $i = 1, 2, \dots, M$ můžeme odvodit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(F, X_i) &= \mathrm{cov}(F,\ \alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i) = \\
&= \mathrm{cov}(F, \alpha_i) + \beta_i \mathrm{cov}(F, F) + \mathrm{cov}(F, \varepsilon_i) = \\
&= 0 + \beta_i \mathrm{Var}(F) + 0 = \\
&= \beta_i \mathrm{Var}(F)
\end{aligned}$$

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(F, X_i)}{\mathrm{Var}(F)} \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Ze vztahu

$$X_i = \alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i$$

pak pro $i = 1, 2, \dots, M$ můžeme odvodit:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_i] &= \mathrm{E}[\alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i] = \\ &= \mathrm{E}[\alpha_i] + \beta_i \mathrm{E}[F] + \mathrm{E}[\varepsilon_i] = \\ &= \alpha_i + \beta_i \mathrm{E}[F] + 0 = \\ &= \alpha_i + \beta_i \mathrm{E}[F] \end{aligned}$$

$$\alpha_i = \mathrm{E}[X_i] - \beta_i \mathrm{E}[F] \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Máme tudíž

$$R_i = \mathrm{E}[X_i] = \alpha_i + \beta_i \mathrm{E}[F] \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

a očekávaný relativní výnos portfolia je

$$R_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} (\alpha_i + \beta_i \mathrm{E}[F]) Z_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \mathrm{E}[X_i] Z_i \;=\; \sum_{i=1}^{M} R_i Z_i \quad \longrightarrow \quad \max$$

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Dále ze vztahu

$$X_i = \alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i$$

pro $i, j = 1, 2, \dots, M$ můžeme odvodit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{cov}(\alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i,\ \alpha_j + \beta_j F + \varepsilon_j) = \\
&= \quad \mathrm{cov}(\alpha_i, \alpha_j) + \beta_j \mathrm{cov}(\alpha_i, F) + \mathrm{cov}(\alpha_i, \varepsilon_j) + \\
&\quad + \beta_i \mathrm{cov}(F, \alpha_j) + \beta_i \beta_j \mathrm{cov}(F, F) + \beta_\mathrm{i} \mathrm{cov}(\alpha_i, \varepsilon_j) + \\
&\quad + \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \alpha_j) + \beta_j \mathrm{cov}(\varepsilon_i, F) + \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) =
\end{aligned}$$

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right) &= \operatorname{cov}\left(\alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i,\ \alpha_j + \beta_j F + \varepsilon_j\right) = \\
&= \quad \operatorname{cov}\left(\alpha_i, \alpha_j\right) + \beta_j \operatorname{cov}(\alpha_i, F) + \operatorname{cov}\left(\alpha_i, \varepsilon_j\right) + \\
&\quad + \beta_i \operatorname{cov}\left(F, \alpha_j\right) + \beta_i \beta_j \operatorname{cov}(F, F) + \beta_{\mathrm{i}} \operatorname{cov}\left(\alpha_i, \varepsilon_j\right) + \\
&\quad + \operatorname{cov}\left(\varepsilon_i, \alpha_j\right) + \beta_j \operatorname{cov}(\varepsilon_i, F) + \operatorname{cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \\
&= \quad 0 + 0 + 0 + \\
&\quad + 0 + \beta_i \beta_j \operatorname{Var}(F) + 0 + \\
&\quad + 0 + 0 + \operatorname{cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \\
&= \beta_i \beta_j \operatorname{Var}(F) + \operatorname{cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \\
&= \begin{cases} \beta_i^2 \operatorname{Var}(F) + \operatorname{Var}(\varepsilon_i) & i = j \\ \beta_i \beta_j \operatorname{Var}(F) & i \neq j \end{cases}
\end{aligned}
$$

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Máme tudíž

$$\sigma_{X_i X_j} = \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} \beta_i^2 \operatorname{Var}(F) + \operatorname{Var}(\varepsilon_i) & i = j \\ \beta_i \beta_j \operatorname{Var}(F) & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{pro} \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

Tudíž čtverec rizika portfolia je

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}}^2 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j =$$

$$= \operatorname{Var}(F) \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \beta_i \beta_j Z_i Z_j + \sum_{i=1}^{M} \operatorname{Var}(\varepsilon_i) Z_i^2 =$$

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Tudíž čtverec rizika portfolia je

$$\sigma^2_{X_{\mathrm{PF}}} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \sigma_{X_i X_j} Z_i Z_j =$$

$$= \mathrm{Var}(F) \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \beta_i \beta_j Z_i Z_j + \sum_{i=1}^{M} \mathrm{Var}(\varepsilon_i) Z_i^2 =$$

$$= \mathrm{Var}(F) \sum_{i=1}^{M} \beta_i Z_i \sum_{j=1}^{M} \beta_j Z_j + \sum_{i=1}^{M} \mathrm{Var}(\varepsilon_i) Z_i^2 =$$

Faktorové modely

(lineární) závislost relativního výnosu aktiva na zadaném faktoru-indexu *F*

Tudíž čtverec rizika portfolia je

$$\sigma^2_{X_{\mathrm{PF}}} = \mathrm{Var}(F)\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\beta_i\beta_j Z_i Z_j + \sum_{i=1}^{M}\mathrm{Var}(\varepsilon_i)Z_i^2 =$$

$$= \mathrm{Var}(F)\sum_{i=1}^{M}\beta_i Z_i \sum_{j=1}^{M}\beta_j Z_j + \sum_{i=1}^{M}\mathrm{Var}(\varepsilon_i)Z_i^2 =$$

$$= \mathrm{Var}(F)\left(\sum_{i=1}^{M}\beta_i Z_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{M}\mathrm{Var}(\varepsilon_i)Z_i^2 \quad \longrightarrow \quad \min$$

Markowitzův jednoindexový model
(zadaná úroveň výnosu a minimalizace rizika)

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\mathrm{Var}(F)\left(\sum_{i=1}^{M} \beta_i Z_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{M} \mathrm{Var}(\varepsilon_i) Z_i^2} \quad \longrightarrow \quad \min$$

z.p.

$$R_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} R_i Z_i \geq c$$

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

kde c je zadaný požadovaný (kladný) relativní výnos PF,
d_i, h_i jsou nezáporné (kladné) konstanty (úrovně).

Sharpeho jednoindexový model

(zadaná úroveň rizika a maximalizace výnosu)

$$R_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{M} R_i Z_i \quad \longrightarrow \quad \max$$

z.p.

$$\sigma_{X_{\mathrm{PF}}} = \sqrt{\mathrm{Var}(F)\left(\sum_{i=1}^{M} \beta_i Z_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{M} \mathrm{Var}(\varepsilon_i) Z_i^2} \leq b$$

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

kde b je zadaná dovolená (kladná) mez rizika PF,
d_i, h_i jsou nezáporné (kladné) konstanty (úrovně).

Systematické a nesystematické riziko portfolia a aktiv

Předpokládajíce (I)–(III) a že pro relativní výnos i-tého AK platí vztah

$$X_i = \alpha_i + \beta_i F + \varepsilon_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, M \quad (*)$$

již víme, že

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(F, X_i)}{\operatorname{Var}(X_i)} \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, M \, (**)$$

a

$$\operatorname{Var}(X_i) = \operatorname{cov}(X_i, X_i) = \beta_i^2 \operatorname{Var}(F) + \operatorname{Var}(\varepsilon_i) \qquad (***)$$

Zde:

$\operatorname{Var}(F)$ = systematické riziko trhu
$\operatorname{Var}(X_i)$ = celkové riziko i-tého AK
β_i = koeficient „<u>beta</u>“ i-tého AK
$\beta_i^2 \operatorname{Var}(F)$ = systematické riziko i-tého AK
$\operatorname{Var}(\varepsilon_i)$ = nesystematické riziko i-tého AK

Jednoindexový model: Postup při výpočtu optimálního portfolia („historická“ metoda) (Použití Excel-Solveru pro CP na BCPP)

1. Výběr vhodných AK v počtu M
   (např. CP obchodovaných na PBCP)
   a vhodného indexu F (např. F = PX)

2. Volba časového intervalu N trvání PF
   a délky T testovacích časových řad
   (cen c_{it} vybraných AK), přitom $T \gg N$

3. Výpočet <u>relativních</u> kapitálových výnosů X_i
   vybraných AK a <u>relativních změn indexu</u> F

Jednoindexový model: Postup při výpočtu optimálního portfolia („historická“ metoda)

4. Výpočet odhadů statistických charakteristik X_i a F:
   $R_i = \mathrm{E}[X_i], \qquad \mathrm{Var}(X_i), \qquad \mathrm{Var}(F), \qquad \mathrm{cov}(F, X_i)$
   (výběrový průměr, výběrové rozptyly a výběrová kovariance, na základě historických dat;
   popř. na základě odhadu expertů).

5. Výpočet odhadů β_i a α_i ze vztahů $(**)$ a $(*)$:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(F, X_i)}{\mathrm{Var}(F)} \qquad \qquad \alpha_i = \mathrm{E}[X_i] - \beta_i \mathrm{E}[F]$$

Jednoindexový model: Postup při výpočtu optimálního portfolia („historická“ metoda)

6. Výpočet odhadu $\mathrm{Var}(\varepsilon_i)$ ze vztahu $(***)$:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \mathrm{Var}(X_i) - \beta_i^2 \mathrm{Var}(F) =$$

$$= \mathrm{Var}(X_i) - \left(\frac{\mathrm{cov}(X_i, F)}{\mathrm{Var}(F)}\right)^2 \mathrm{Var}(F) =$$

$$= \mathrm{Var}(X_i) - \frac{\mathrm{cov}^2(X_i, F)}{\mathrm{Var}(F)}$$

Jednoindexový model: Postup při výpočtu optimálního portfolia („historická“ metoda)

7. Ověření platnosti předpokladů modelu (I) až (III) (obvykle se vynechává).

8. Zadání hodnot c, resp. b, d_i, h_i a výpočet optimálního složení portfolia Z_i^{opt} pomocí Markowitzova, resp. Sharpeho, modelu s použitím modulu Solver v Excelu.

Poznámky 1: Historická metoda

- Slouží k hodnocení portfolia za *minulé* (historické) období.

- Pro sestavování portfolia do *budoucnosti* je vhodná tam, kde se očekává stacionární vývoj cen.

- Očekávané hodnoty jsou vypočteny za období, v němž jsou známy hodnoty uvažovaných časových řad:

$$\mathrm{E}(X_i) \qquad \mathrm{Var}(X_i) \qquad \mathrm{Var}(F) \qquad \mathrm{cov}(X_i, F)$$

Poznámky 2: Historická metoda

- Není potřeba znát celou kovarianční matici $\boldsymbol{S} = \left\{\mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right)\right\}$ — má M^2 prvků — stačí znát pouze vektor $\{\mathrm{cov}(X_i, F)\}$ — má M prvků!

- <u>Markowitzův model:</u>
  Optimální portfolio minimalizuje očekávané (tj. střední) riziko při zadané úrovni očekávaného výnosu.

- <u>Sharpeho model:</u>
  Optimální portfolio maximalizuje očekávaný (tj. střední) výnos při zadané úrovni očekávaného rizika.

Poznámky 3: Expertní metoda

- Slouží k nalezení optimálního portfolia
  pro *budoucí období*.

- Charakteristiky minulého období
  $$\mathrm{E}(X_i) \qquad \mathrm{Var}(X_i) \qquad \mathrm{Var}(F) \qquad \mathrm{cov}(X_i, F) \qquad (*)$$
  se nahradí odhady, tj. prognózovanými,
  resp. expertními hodnotami, získanými
  prognostickými metodami.

- <u>Modifikovaný historický přístup:</u>
  Pouze některé z hodnot $(*)$ se nahradí odhady
  (obvykle výnosy $\mathrm{E}(X_i)$ a/nebo riziko $\mathrm{Var}(X_i)$).

Úloha optimalizace portfolia
Dvojkriteriální úloha Matemat. programování

$$R_{\mathrm{PF}} = \sum R_i Z_i \qquad \rightarrow \text{MAX}; \qquad (1)$$

$$\sigma_{\mathrm{PF}} = \sum\sum \sigma_{ij} Z_i Z_j \qquad \rightarrow \text{MIN}; \qquad (2)$$

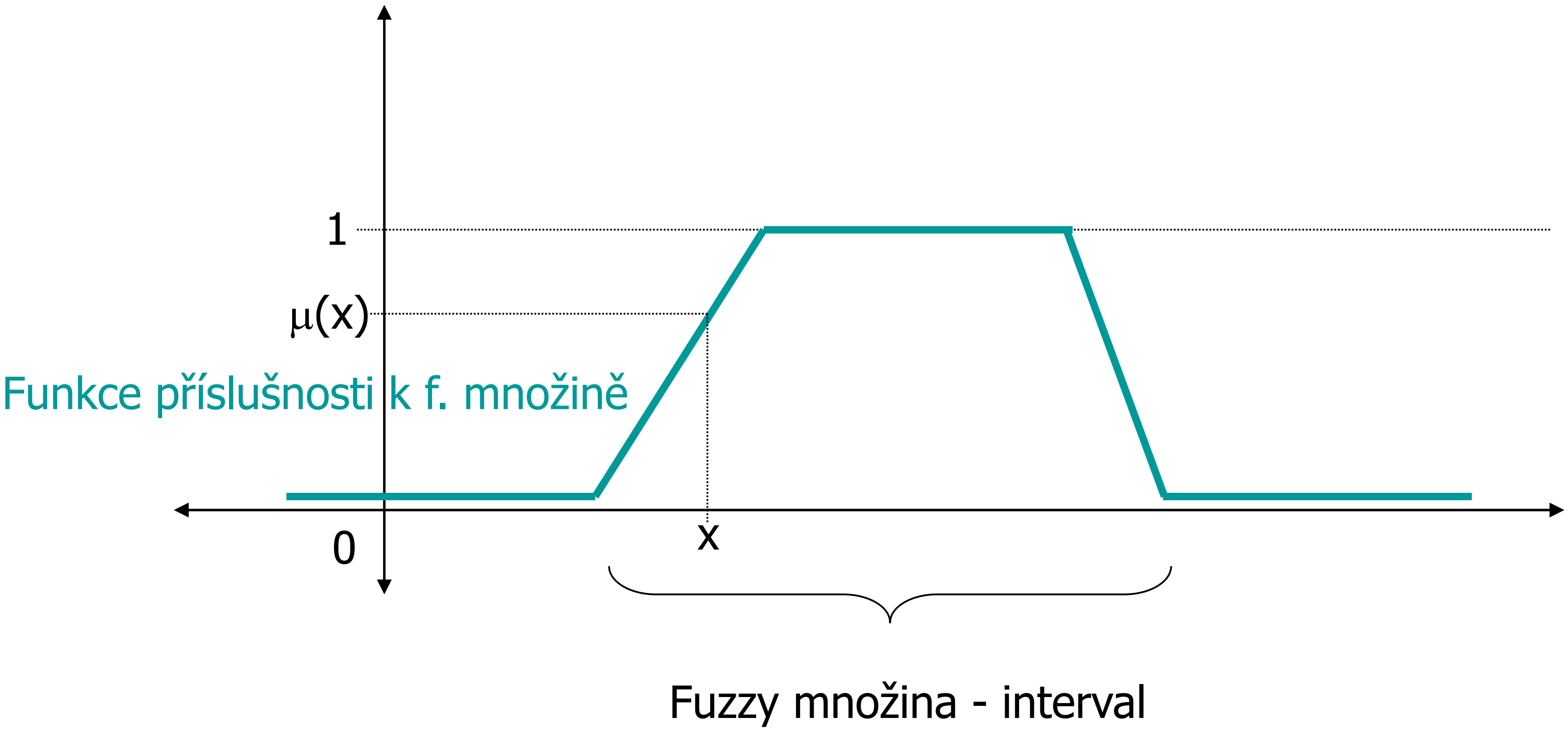
za podmínek

$$\sum Z_i = 1 \qquad (3)$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \qquad i = 1,2,\ldots,M \qquad (4)$$

Fuzzy množina 1

fuzzy interval



1. metoda fuzzyfikace: Lineární satisfakce

Krok 1. Řešte 2 úlohy LP:

P1$_{max}$ (P1$_{min}$):

$$R_{\mathrm{PF}} = \sum R_i\, Z_i \rightarrow \text{MAX (MIN)};$$

za podmínek

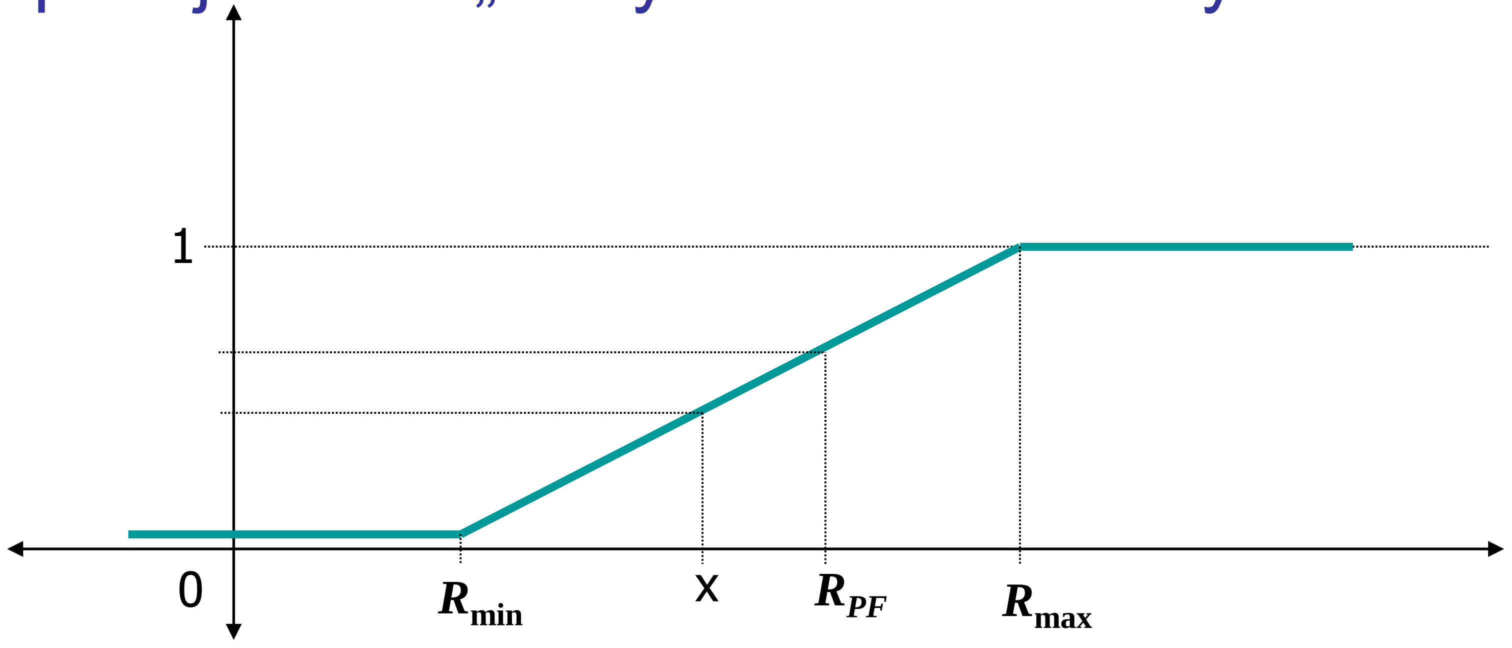
$$\sum Z_i = 1$$

$$d_i \le Z_i \le h_i \quad i = 1,2,\ldots,M$$

Výsledek: $R_{\max}\, ,\, R_{\min}$

Fuzzy množina 2
lineární satisfakce

(spokojenost s „velkými“ hodnotami výnosu PF)



Lineární satisfakce 2

Krok 2. Řešte 2 úlohy Kvadratického programování:

P2$_{min}$ (P2$_{max}$):

$$\sigma^2_{PF} = \sum\sum \sigma_{ij} Z_i Z_j \qquad \to \text{MIN (MAX)};$$

za podmínek

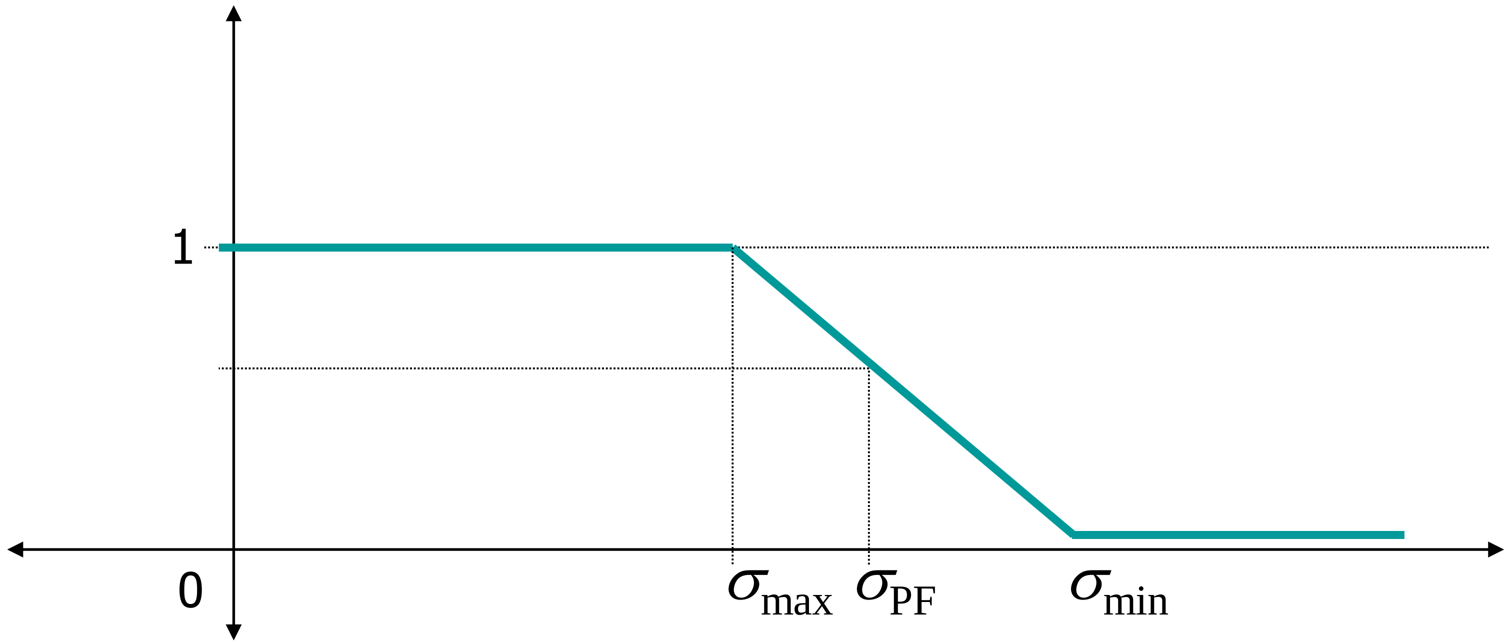
$$\sum Z_i = 1$$

$$d_i \le Z_i \le h_i\ , \quad i = 1,2,\ldots,M$$

Výsledek: $\sigma_{max}\ ,\ \sigma_{min}$

Fuzzy množina 3
lineární satisfakce

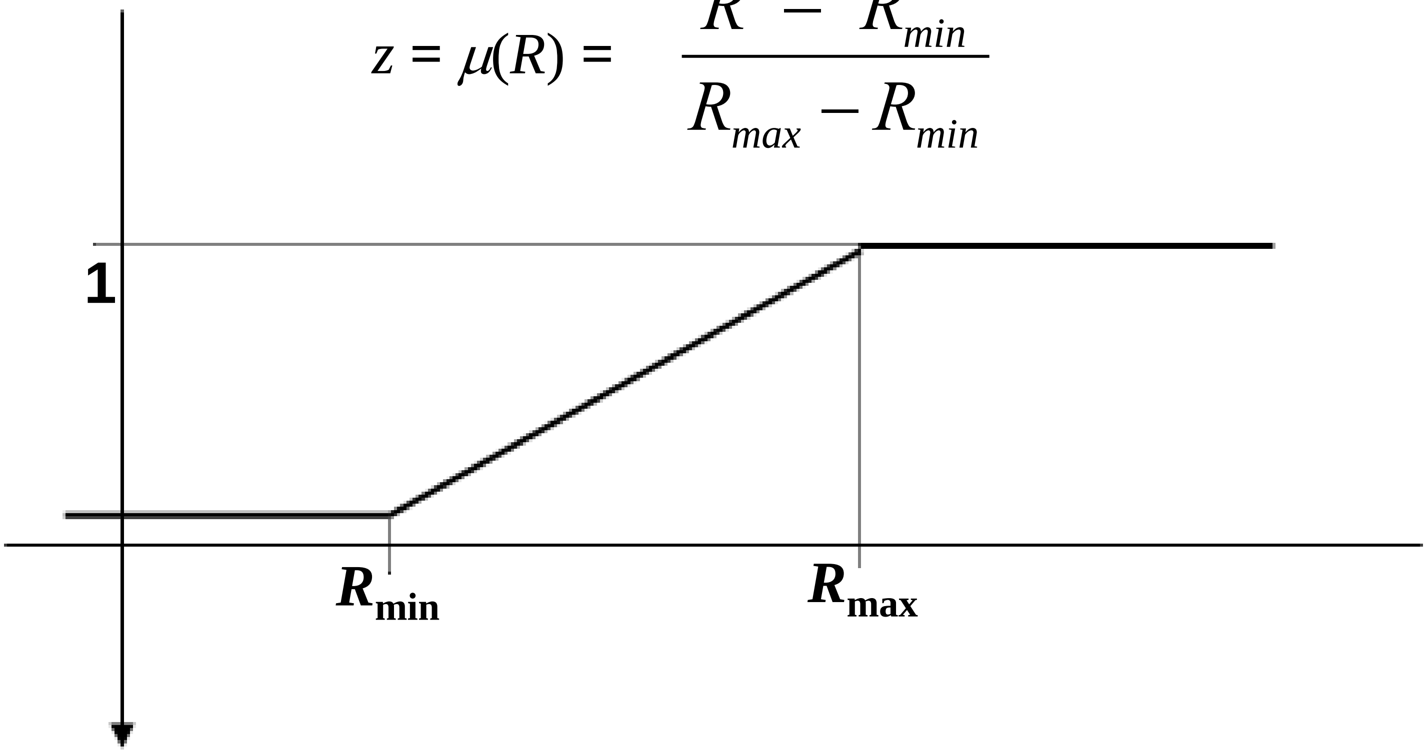
(spokojenost s „malými“ hodnotami rizika PF)



Lineární satisfakce 3

Krok 3. Vytvořte lineární funkci příslušnosti satisfakce výnosu:

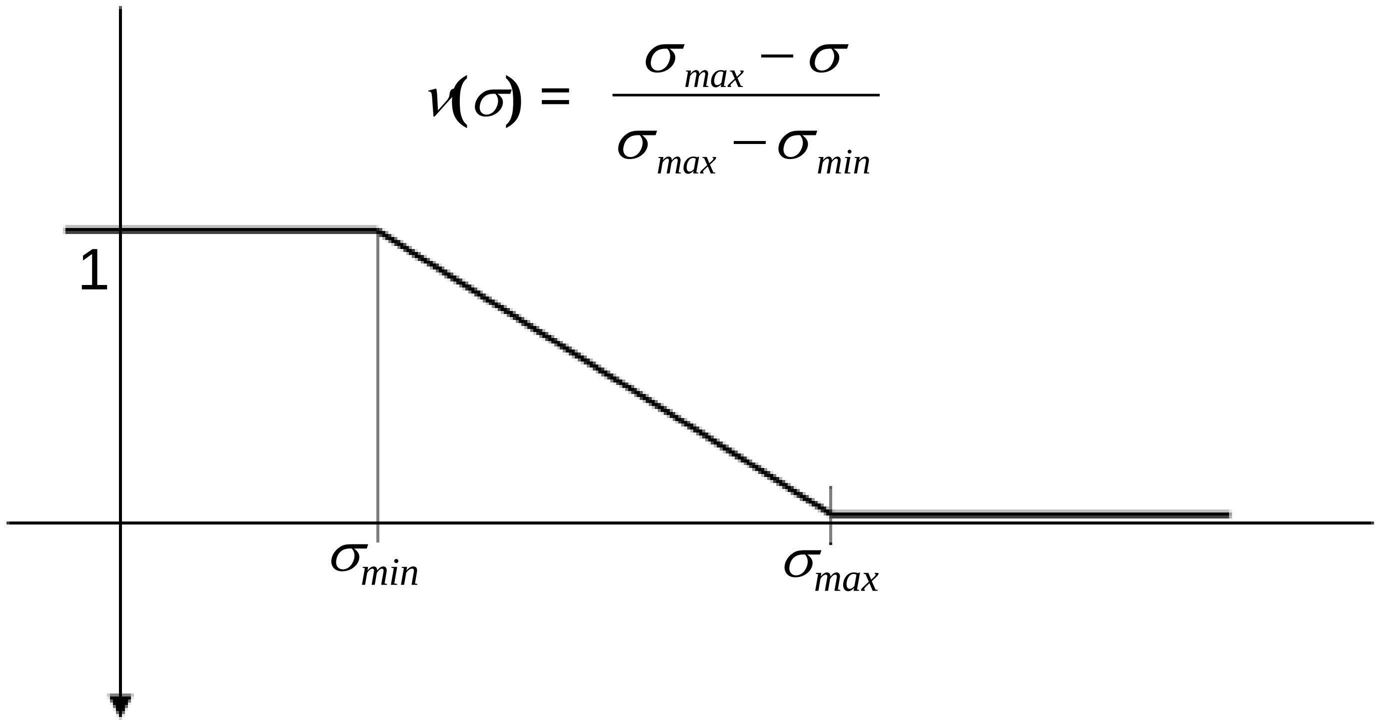
$$z = \mu(R) = \frac{R - R_{min}}{R_{max} - R_{min}}$$



Lineární satisfakce 4

Krok 4. Vytvořte lineární funkci příslušnosti satisfakce rizika:

$$\nu(\sigma) = \frac{\sigma_{max} - \sigma}{\sigma_{max} - \sigma_{min}}$$



Lineární satisfakce 5

Krok 5. Řešte optimalizační úlohu:

$$\min \{ \mu(\sum R_i Z_i) ,\ \nu(\sum\sum \sigma_{ij} Z_i Z_j) \} \to \text{MAX};$$

za podmínek

$$\sum Z_i = 1$$
$$d_i \le Z_i \le h_i ,\ \ i = 1,2,\ldots,M$$

Lineární satisfakce 6

Krok 5*. Ekvivalentní úloha LP:

$$\lambda \to \text{MAX};$$

za podmínek

$$\frac{R - R_{min}}{R_{max} - R_{min}} \geq \lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad R - (R_{max} - R_{min})\lambda \geq R_{min}$$

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} \geq \lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma + (\sigma_{max} - \sigma_{min})\lambda \leq \sigma_{max}$$

$$R = \sum R_i Z_i$$

$$\sigma^2 = \sum\sum \sigma_{ij} Z_i Z_j$$

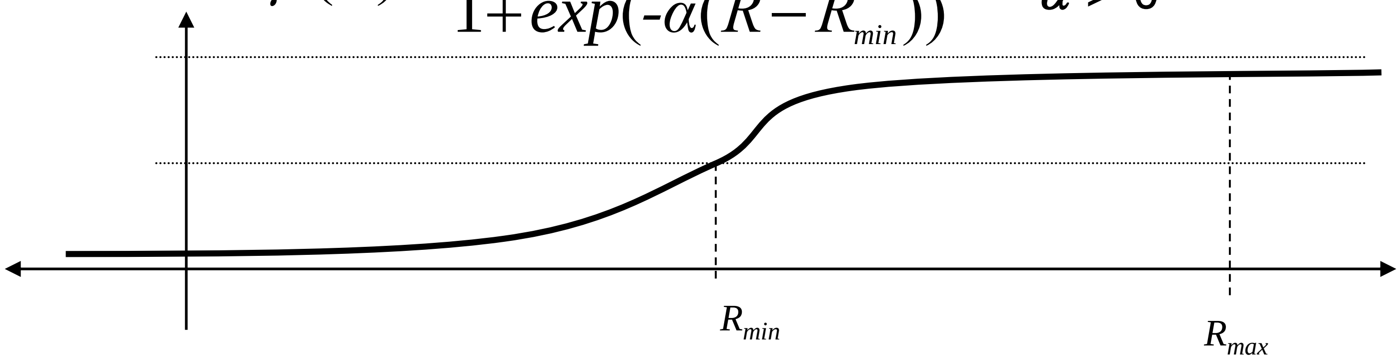
$$\sum Z_i = 1$$

$$d_i \leq Z_i \leq h_i \ , i = 1,\ldots,M$$

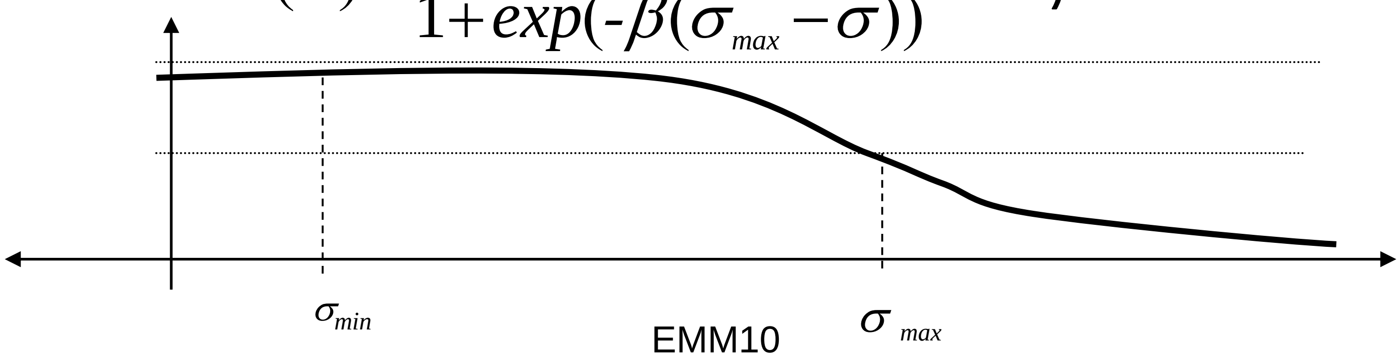
2. metoda fuzzyfikace: Nelineární satisfakce

Nelineární funkce příslušnosti satisfakce výnosu i rizika:

$$\mu(R) = \frac{1}{1+exp(-\alpha(R-R_{min}))} \qquad \alpha > 0$$



$$\nu(\sigma) = \frac{1}{1+exp(-\beta(\sigma_{max}-\sigma))} \qquad \beta > 0$$



Nelineární satisfakce 2

Ekvivalentní úloha LP:
(analogicky jako u lineární satisfakce)

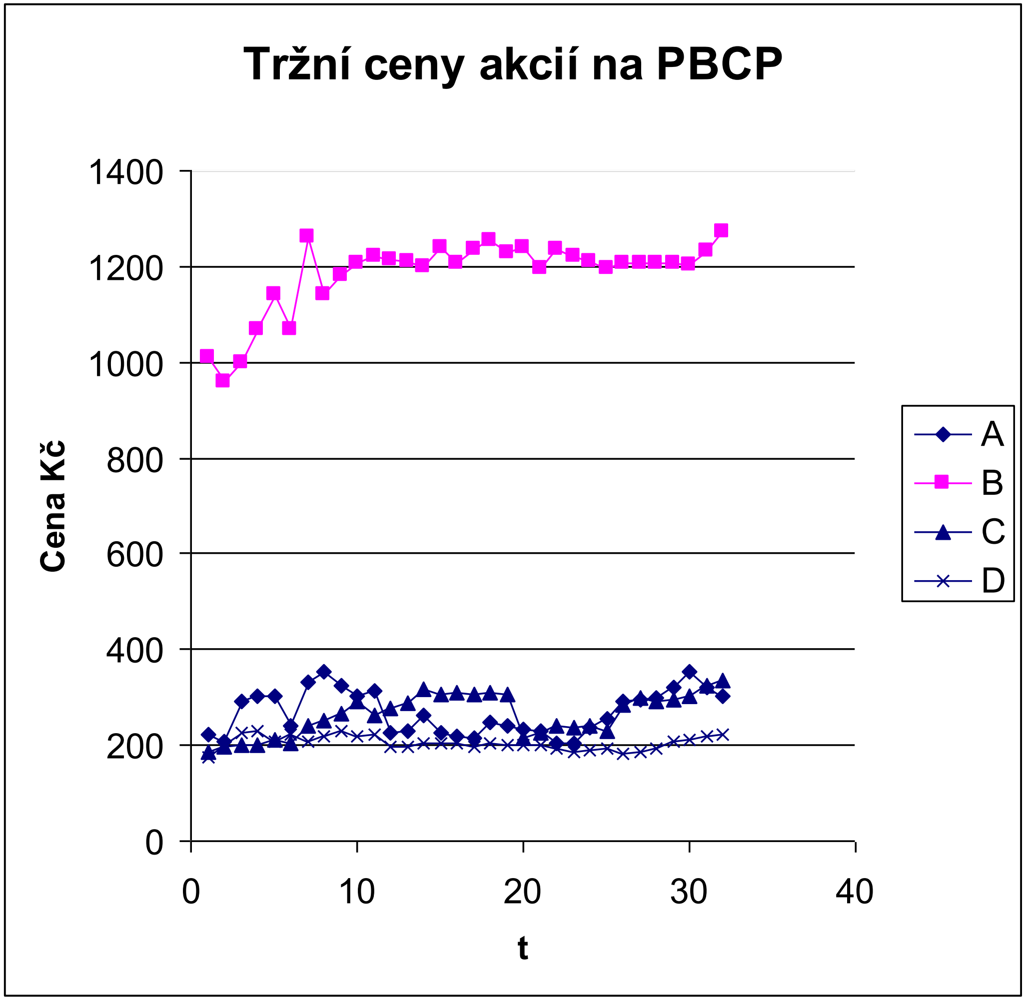
$$\lambda \rightarrow \text{MIN};$$

za podmínek

$$\alpha \sum R_i Z_i + \lambda \geq \alpha R_{min}$$
$$\beta \sum\sum \sigma_{ij} Z_i Z_j - \lambda \leq \beta \sigma_{max}$$
$$\sum Z_i = 1$$
$$d_i \leq Z_i \leq h_i \ , i = 1,\ldots,M$$

Lineární satisfakce: Příklad

Počet AK:	$M = 4$
Počet údajů čas. řad:	$T = 32$
Počet čas. intervalů trvání PF:	$N = 5$



Tržní ceny c_{it} akcií na PBCP:

Č.obch.dne= t	A	B	C	D
1	221	1010	187	175
2	208	960	197	199
3	290	1000	202	225
4	301	1070	200	230
5	302	1140	211	206
6	240	1070	205	224
7	331	1260	240	207
8	355	1140	253	220
9	325	1180	266	229
10	301	1205	290	220
11	315	1220	263	224
12	227	1215	277	198
13	230	1210	288	198
14	263	1200	316	204
15	227	1240	306	203
16	220	1205	311	205
17	216	1235	306	198
18	247	1255	310	203
19	240	1230	308	202
20	235	1240	215	200
21	230	1195	225	202
22	205	1235	242	195
23	205	1220	238	187
24	236	1210	239	190
25	256	1195	231	194
26	290	1206	285	184
27	294	1205	298	187
28	298	1205	291	192
29	322	1208	296	207
30	353	1204	303	210
31	320	1234	326	219
32	301	1271	334	224

Příklad …

$$x_{it} = \frac{c_{it} - c_{i(t-5)}}{c_{i(t-5)}}$$

$$x_{A6} = \frac{240-221}{221} = 0{,}086$$

5-tidenní výnosy [%]:

t	A	B	C	D
6	0,086	0,059	0,096	0,280
7	0,591	0,313	0,218	0,040
8	0,224	0,140	0,252	-0,022
9	0,080	0,103	0,330	-0,004
10	-0,003	0,057	0,374	0,068
11	0,313	0,140	0,283	0,000
12	-0,314	-0,036	0,154	-0,043
13	-0,352	0,061	0,138	-0,100
14	-0,191	0,017	0,188	-0,109
15	-0,246	0,029	0,055	-0,077
16	-0,302	-0,012	0,183	-0,085
17	-0,048	0,016	0,105	0,000
18	0,074	0,037	0,076	0,025
19	-0,087	0,025	-0,025	-0,010
20	0,035	0,000	-0,297	-0,015
21	0,045	-0,008	-0,277	-0,015
22	-0,051	0,000	-0,209	-0,015
23	-0,170	-0,028	-0,232	-0,079
24	-0,017	-0,016	-0,224	-0,059
25	0,089	-0,036	0,074	-0,030
26	0,261	0,009	0,267	-0,089
27	0,434	-0,024	0,231	-0,041
28	0,454	-0,012	0,223	0,027
29	0,364	-0,002	0,238	0,089
30	0,379	0,008	0,312	0,082
31	0,103	0,023	0,144	0,190
32	0,024	0,055	0,121	0,198
Průměry:	0,066	0,034	0,104	0,008

Očekávané výnosy

Příklad …

Vektor výnosů a kovarianční matice

Výnosy:

0,066	**0,034**	**0,104**	**0,008**

Kovariance:

0,0598	0,0070	0,0169	0,0080
0,0070	0,0051	0,0050	0,0013
0,0169	0,0050	0,0361	0,0032
0,0080	0,0013	0,0032	0,0086

Odhady rizik akcií (rozptyly)

Příklad …

Krok 1: $R_{max} = 0{,}104$ $R_{min} = 0{,}007$

Krok 2: $\sigma_{max} = 0{,}190$ $\sigma_{min} = 0{,}062$

Krok 5*: Optimální řešení:

	lambda:				
Zi:	0,622718	0,0010	0,5199	0,4791	0,0000

fuzzyfikace.xls

Příklad: Řešení
lineární satisfakce PF