**Funkce Gama a Beta a pravděpodobnostní rozdělení beta**

Nejprve zavedeme funkci (Gama) a ukážeme některé její vlastnosti, především souvislost
s funkcí faktoriálu (). Následně zavedeme funkci (Beta) a ukážeme některé její vlastnosti, především souvislost s funkcí Gama (). Dále zavedeme pojem pravděpodobnostního rozdělení beta (β) a ukážeme jeho základní vlastnosti (střední hodnotu, rozptyl a modus). Nakonec se budeme zabývat pravděpodobnostním rozdělením beta (β) v metodě PERT.

**Definice.** Pro komplexní s kladnou reálnou částí (, ) definujeme funkci *Gama* následovně:

**Poznámka.** Požaduje se, aby , aby integrál konvergoval. Zde vystačíme jen se
 reálnými kladnými (, ).

Z definice vidíme, že hodnota funkce Gama v bodě je rovna

Dále je lehkým cvičením – integrováním per partes – odvodit, že pro kladné reálné , obecněji pro komplexní s kladnou reálnou částí, platí

Odtud již snadno vidíme, že , ,
 atd., tudíž

**Poznámka.** Uvedeným vztahem lze definovat hodnotu faktoriálu pro libovolné reálné číslo .

Nyní přejdeme k funkci Beta.

**Definice.** Pro komplexní s kladnou reálnou částí (, , ) definujeme funkci *Beta* následovně:

**Poznámka.** Požaduje se, aby a , aby integrál konvergoval. Zde opět vystačíme jen s reálnými kladnými (, ).

**Pozorování.** *Na základě symetrie integrálu je vidět, že*

Nyní nás bude zajímat následující vztah mezi funkcemi Gama a Beta, v němž funkci Beta vyjádříme pomocí funkce Gama. Počítejme:

Pokračujme zavedením substituce

Protože pro původní proměnné platí a , pro nové proměnné
(po transformaci) platí a . Určíme ještě jakobián této transformace:

Tedy

Odtud

Odtud již vidíme, že

Zbývá se zabývat rozdělením pravděpodobnosti beta (β). Uvedené rozdělení beta (β) definujeme na otevřeném intervalu , což bude prostor elementárních jevů, spolu se všemi lebesgueovsky měřitelnými podmnožinami daného intervalu , které budou prostorem jevů, spolu s pravděpodobnostní mírou na daném intervalu zavedenou hustotou pravděpodobnosti

kde a jsou dva pevně zvolené parametry uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti beta (β).

Tedy, jinými slovy, pro dva pevně zvolené parametry a uvažujme pravděpodobnostní prostor , kde je *prostor elementárních jevů*, systém podmnožin , zde kolekce všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin intervalu , je *prostor jevů* a je *pravděpodobnostní míra*, zde zavedená svojí hustotou následovně:

kde je výše uvažovaná hustota pravděpodobnostního rozdělení beta (β).

**Poznámka.** Obecně platí, že prostor jevů je σ-algebra (sigma-algebra) na prostoru elementárních jevů . To znamená, že platí:

**Pozorování.** *Na základě přechodu k doplňkům (podle prostředního pravidla) vidíme, že platí rovněž a, jestliže , potom .*

V našem případě je σ-algebra tvořena všemi lebesgueovsky měřitelnými podmnožinami intervalu .

Připomeňme, že funkce se nazývá *σ-aditivní* (*sigma-aditivní*) právě tehdy, když pro libovolné po dvou disjunktní jevy platí .

**Poznámka.** Obecně platí, že pravděpodobnostní míra je nezáporná σ-aditivní funkce taková, že .

Nyní určíme některé charakteristiky (střední hodnotu, rozptyl, modus) pravděpodobnostního rozdělení beta (β).

Uvažujme pravděpodobnostní prostor . Připomeňme, že funkce je *měřitelná* právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu platí , řečeno slovy, vzor každé otevřené množiny je jevem.

Připomeňme, že náhodnou veličinou na pravděpodobnostním prostoru rozumíme libovolnou měřitelnou funkci . To znamená, že náhodná veličina je měřitelná funkce, která každému elementárnímu jevu přiřadí reálné číslo .

V našem případě, kde je množina jevů a je kolekce všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin intervalu a pravděpodobnostní míra má rozdělení beta (β), budeme uvažovat identickou náhodnou veličinu , zavedenou předpisem neboli pro každé .

**Střední hodnota:**

**Rozptyl:**

**Modus:**

Připomeňme, že *modus* je nejpravděpodobnější hodnota náhodné veličiny. V našem případě, kdy náhodná veličina je identita, modus je bodem, ve kterém hustota uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti nabývá svého (globálního) maxima. Připomeňme, že hustota námi uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení beta (β) je

kde a jsou dva pevně zvolené parametry uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti beta (β).

Abychom nalezli bod (globálního) maxima uvažované hustoty , a tedy modus identické náhodné veličiny () s rozdělením pravděpodobnosti beta (β), rozlišíme několik případů:

• Jestliže , potom modus není definován, protože pro i pro , tj., modem by byly body i .

• Jestliže , potom modus není definován, protože pro všechna , tj., rozdělení beta (β) degeneruje na rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti, tj., modem by byly všechny body intervalu .

• Jestliže nebo , potom modus je .

 Jestliže , potom , jestliže , nebo , jestliže .

 Jestliže , potom pro .

 Jestliže , a tudíž , potom pro .

• Jestliže nebo , potom modus je .

 Jestliže , potom , jestliže , nebo , jestliže .

 Jestliže , potom pro .

 Jestliže , a tudíž , potom pro .

• Jestliže , potom a pro . Proto je zřejmé, že modus leží uvnitř intervalu . Protože hustota pravděpodobnosti je hladká
(má derivaci), stačí nalézt stacionární bod hustoty pravděpodobnosti, tj. bod, ve kterém její derivace je nulová. Počítejme:

V intervalu řešme rovnici , tedy

Tedy, jestliže , potom **modus** je:

(Uvedená rovnice platí i v limitních případech, kdy nebo , tj. souhrnně a .)

**Použití pravděpodobnostního rozdělení beta (β) v metodě PERT**

V metodě PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) se uvažuje, že doba trvání každé činnosti se řídí pravděpodobnostním rozdělením beta (β). Pro každou činnost se zadává: optimistický odhad , modální odhad a pesimistický odhad doby trvání dané činnosti. (Předpokládá se a .)

Jestliže uvažované rozdělení pravděpodobnosti beta (β) je zadáno svými pevně zvolenými parametry a (viz výše) a interval transformujeme lineárně na interval , tedy a , tedy na intervalu uvažujeme náhodnou veličinu

lehce zjistíme, že její **střední hodnota** je

její **rozptyl** je

a její **modus** je (jestliže a )

Současně podle vzorečků uváděných v literatuře (a tudíž i na přednáškách) má platit

a

**Odtud plyne úkol:** Zkontrolujte správnost vzorců uváděných v literatuře, tj., jsou-li zadána čísla , najděte parametry tak, aby výše uvedené vztahy platily!

**Řešení:** V metodě PERT se z nějakého důvodu o parametrech předpokládá, že platí a oba parametry splňují rovnici , kde je předem pevně zvolená konstanta (). Jak uvidíme, v metodě PERT se uvažuje hodnota se zdůvodněním, že tato hodnota je empiricky vyhovující.

Budiž tedy dán optimistický odhad , modální odhad a pesimistický odhad doby trvání dané činnosti, přičemž se předpokládá, že a . Dále předpokládejme, že pro parametry platí a . Pak hodnotu parametru můžeme vyjádřit ze vztahu pro modus následovně:

Tudíž

a pomocí předpokládaného vztahu dostáváme rovněž

Hodnoty parametrů , vypočtené pomocí zadaných údajů , dosadíme do vztahu pro střední hodnotu rozdělení beta (β) transformovaného na interval :

a volba , odůvodněná empirickými zkušenostmi, pak dává

Vidíme, že vzorec pro střední hodnotu uváděný v literatuře je za uvedených předpokladů ( a ) správný.

Nyní vypočtené hodnoty parametrů dosadíme do vztahu pro rozptyl rozdělení beta (β) transformovaného na interval :

načež volba , když dává

Vidíme, že vzorec pro směrodatnou odchylku () resp. rozptyl () uváděný v literatuře za uvedených předpokladů ( a ) není správný.