

Funkce Gama a Beta a pravděpodobnostní rozdělení beta

Nejprve zavedeme funkci Γ (Gama) a ukážeme některé její vlastnosti, především souvislost s funkcí faktoriálu ($n!$). Následně zavedeme funkci B (Beta) a ukážeme některé její vlastnosti, především souvislost s funkcí Gama (Γ). Dále zavedeme pojem pravděpodobnostního rozdělení beta (β) a ukážeme jeho základní vlastnosti (střední hodnotu, rozptyl a modus). Nakonec se budeme zabývat pravděpodobnostním rozdělením beta (β) v metodě PERT.

Definice. Pro komplexní z s kladnou reálnou částí ($z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$) definujeme funkci *Gama* následovně:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Poznámka. Požaduje se, aby $\operatorname{Re} z > 0$, aby integrál konvergoval. Zde vystačíme jen se z reálnými kladnými ($z \in \mathbb{R}, z > 0$).

Z definice vidíme, že hodnota funkce Gama v bodě $z = 1$ je rovna

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Dále je lehkým cvičením – integrováním per partes – odvodit, že pro kladné reálné z , obecněji pro komplexní z s kladnou reálnou částí, platí

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} u = t^z \\ u' = z t^{z-1} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v' = e^{-t} \\ v = -e^{-t} \end{array} \right| = [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -z t^{z-1} e^{-t} dt = \\ &= [0 + 0] + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z) \end{aligned}$$

Odtud již snadno vidíme, že $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1)$, $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2)$, $\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3)$ atd., tudíž

$$n! = \Gamma(n+1) \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Poznámka. Uvedeným vztahem lze definovat hodnotu faktoriálu pro libovolné reálné číslo $n > -1$.

Nyní přejdeme k funkci Beta.

Definice. Pro komplexní p, q s kladnou reálnou částí ($p, q \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$) definujeme funkci *Beta* následovně:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

Poznámka. Požaduje se, aby $\operatorname{Re} p > 0$ a $\operatorname{Re} q > 0$, aby integrál konvergoval. Zde opět vystačíme jen s p, q reálnými kladnými ($p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 0$).

Pozorování. Na základě symetrie integrálu je vidět, že

$$B(p, q) = B(q, p)$$

Nyní nás bude zajímat následující vztah mezi funkcemi Gama a Beta, v němž funkci Beta vyjádříme pomocí funkce Gama. Počítejme:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} s^{p-1}e^{-s} ds \int_0^{+\infty} t^{q-1}e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} s^{p-1}t^{q-1}e^{-(s+t)} dt ds$$

Pokračujme zavedením substituce

$$\begin{aligned} s &= uv \\ t &= u(1-v) \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} u &= s+t \\ v &= s/(s+t) \end{aligned}$$

Protože pro původní proměnné platí $0 < s < +\infty$ a $0 < t < +\infty$, pro nové proměnné (po transformaci) platí $0 < u < +\infty$ a $0 < v < 1$. Určíme ještě jakobián této transformace:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

Tedy

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} s^{p-1}t^{q-1}e^{-(s+t)} ds dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 (uv)^{p-1}[u(1-v)]^{q-1}e^{-u}| -u| dv du = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{p+q-1}e^{-u}v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv du = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u} du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv = \Gamma(p+q)B(p, q)\end{aligned}$$

Odtud

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Odtud již vidíme, že

$$B(p+1, q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q}B(p, q)$$

Zbývá se zabývat rozdělením pravděpodobnosti beta (β). Uvedené rozdělení beta (β) definujeme na otevřeném intervalu $(0, 1)$, což bude prostor elementárních jevů, spolu se všemi lebesgueovskými měřitelnými podmnožinami daného intervalu $(0, 1)$, které budou prostorem jevů, spolu s pravděpodobnostní mírou na daném intervalu $(0, 1)$ zavedenou hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad \text{pro } x \in (0, 1)$$

kde $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ jsou dva pevně zvolené parametry uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti beta (β).

Tedy, jinými slovy, pro dva pevně zvolené parametry $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ uvažujme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) , kde $\Omega = (0, 1)$ je *prostor elementárních jevů*, systém podmnožin \mathcal{A} , zde kolekce všech lebesgueovskými měřitelných podmnožin intervalu $\Omega = (0, 1)$, je *prostor jevů* a P je *pravděpodobnostní míra*, zde zavedená svojí hustotou následovně:

$$P(A) = \int_A f(x) dx \quad \text{pro } A \in \mathcal{A}$$

kde $f(x)$ je výše uvažovaná hustota pravděpodobnostního rozdělení beta (β).

Poznámka. Obecně platí, že prostor jevů \mathcal{A} je σ -algebra (sigma-algebra) na prostoru elementárních jevů Ω . To znamená, že platí:

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$\text{jestliže } A \in \mathcal{A}, \quad \text{potom } \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$\text{jestliže } A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}, \quad \text{potom } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Pozorování. Na základě přechodu k doplňkům (podle prostředního pravidla) vidíme, že platí rovněž $\emptyset \in \mathcal{A}$ a, jestliže $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$, potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

V našem případě je σ -algebra \mathcal{A} tvořena všemi lebesgueovskými měřitelnými podmnožinami intervalu $(0, 1)$.

Připomeňme, že funkce $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá σ -aditivní (*sigma-aditivní*) právě tehdy, když pro libovolné po dvou disjunktní jevy $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$ platí $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Poznámka. Obecně platí, že pravděpodobnostní míra P je nezáporná σ -aditivní funkce $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $P(\Omega) = 1$.

Nyní určíme některé charakteristiky (střední hodnotu, rozptyl, modus) pravděpodobnostního rozdělení beta (β).

Uvažujme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) . Připomeňme, že funkce $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je *měřitelná* právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $G \subseteq \mathbb{R}$ platí $X^{-1}(G) \in \mathcal{A}$, řečeno slovy, vzor každé otevřené množiny je jevem.

Připomeňme, že náhodnou veličinou na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) rozumíme libovolnou měřitelnou funkci $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. To znamená, že náhodná veličina je měřitelná funkce, která každému elementárnímu jevu $\omega \in \Omega$ přiřadí reálné číslo $X(\omega)$.

V našem případě, kde $\Omega = (0, 1)$ je množina jevů a \mathcal{A} je kolekce všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin intervalu $(0, 1)$ a pravděpodobnostní míra P má rozdělení beta (β), budeme uvažovat identickou náhodnou veličinu $X: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, zavedenou předpisem $X(x) = x$ neboli $X: x \mapsto x$ pro každé $x \in (0, 1)$.

Střední hodnota:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} xf(x) dx = \int_0^1 x \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Rozptyl:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{\Omega} (X - \mathbb{E}[X])^2 dP = \int_{\Omega} \left(x - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 f(x) dx = \\ &= \int_0^1 x^2 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx - \int_0^1 2x \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx + \\ &\quad + \int_0^1 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta-1} dx - \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx + \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{B(\alpha + 1, \beta) B(\alpha + 2, \beta)}{B(\alpha, \beta) B(\alpha + 1, \beta)} - \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \frac{B(\alpha + 1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} + \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 \frac{B(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{\alpha + 1}{\alpha + 1 + \beta} - \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + \beta) - 2\alpha^2(\alpha + \beta + 1) + \alpha^2(\alpha + \beta + 1)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha + \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}\end{aligned}$$

Modus:

Připomeňme, že *modus* je nejpravděpodobnější hodnota náhodné veličiny. V našem případě, kdy náhodná veličina $X(x) = x$ je identita, modus je bodem, ve kterém hustota $f(x)$ uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti nabývá svého (globálního) maxima. Připomeňme, že hustota námi uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení beta (β) je

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad \text{pro } x \in (0, 1)$$

kde $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ jsou dva pevně zvolené parametry uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti beta (β).

Abychom našli bod (globálního) maxima uvažované hustoty $f(x)$, a tedy modus identické náhodné veličiny ($X(x) = x$) s rozdělením pravděpodobnosti beta (β), rozlišíme několik případů:

- Jestliže $0 < \alpha, \beta < 1$, potom modus není definován, protože $f(x) \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow 0^+$ i pro $x \rightarrow 1^-$, tj., modem by byly body $x = 0$ i $x = 1$.
- Jestliže $\alpha, \beta = 1$, potom modus není definován, protože $f(x) = 1$ pro všechna $x \in (0, 1)$, tj., rozdělení beta (β) degeneruje na rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti, tj., modem by byly všechny body intervalu $(0, 1)$.
- Jestliže $0 < \alpha \leq 1 < \beta$ nebo $0 < \alpha < 1 \leq \beta$, potom modus je $x = 0$.
Jestliže $1 \leq \beta$, potom $f(1) = 1$, jestliže $\beta = 1$, nebo $f(1) = 0$, jestliže $\beta > 1$.
Jestliže $0 < \alpha < 1$, potom $f(x) \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow 0^+$.
Jestliže $\alpha = 1$, a tudíž $1 < \beta$, potom $1 = f(0) > f(x) > f(1) = 0$ pro $x \in (0, 1)$.
- Jestliže $0 < \beta \leq 1 < \alpha$ nebo $0 < \beta < 1 \leq \alpha$, potom modus je $x = 1$.
Jestliže $1 \leq \alpha$, potom $f(0) = 1$, jestliže $\alpha = 1$, nebo $f(0) = 0$, jestliže $\alpha > 1$.
Jestliže $0 < \beta < 1$, potom $f(x) \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow 1^-$.
Jestliže $\beta = 1$, a tudíž $1 < \alpha$, potom $0 = f(0) < f(x) < f(1) = 1$ pro $x \in (0, 1)$.
- Jestliže $\alpha, \beta > 1$, potom $f(0) = 0 = f(1)$ a $f(x) > 0$ pro $x \in (0, 1)$. Proto je zřejmé, že modus leží uvnitř intervalu $(0, 1)$. Protože hustota pravděpodobnosti $f(x)$ je hladká (má derivaci), stačí nalézt stacionární bod hustoty pravděpodobnosti, tj. bod, ve kterém její derivace $f'(x)$ je nulová. Počítejme:

$$f'(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left((\alpha - 1)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} - x^{\alpha-1}(\beta - 1)(1-x)^{\beta-2} \right) \quad \text{pro } x \in (0, 1)$$

V intervalu $(0, 1)$ řešme rovnici $f'(x) = 0$, tedy

$$(\alpha - 1)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} = (\beta - 1)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2}$$

$$(\alpha - 1)(1-x) = (\beta - 1)x$$

$$\alpha - 1 = (\beta - 1)x + (\alpha - 1)x$$

Tedy, jestliže $\alpha, \beta > 1$, potom **modus** je:

$$x = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$$

(Uvedená rovnice platí i v limitních případech, kdy $\alpha = 1 < \beta$ nebo $\beta = 1 < \alpha$, tj. souhrnně $\alpha, \beta \geq 1$ a $\alpha + \beta > 2$.)

Použití pravděpodobnostního rozdělení beta (β) v metodě PERT

V metodě PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) se uvažuje, že doba trvání každé činnosti se řídí pravděpodobnostním rozdělením beta (β). Pro každou činnost se zadává: optimistický odhad a , modální odhad m a pesimistický odhad b doby trvání dané činnosti. (Předpokládá se $a < b$ a $a \leq m \leq b$.)

Jestliže uvažované rozdělení pravděpodobnosti beta (β) je zadáno svými pevně zvolenými parametry $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ (viz výše) a interval $\Omega = (0, 1)$ transformujeme lineárně na interval (a, b) , tedy $0 \mapsto a$ a $1 \mapsto b$, tedy na intervalu $\Omega = (0, 1)$ uvažujeme náhodnou veličinu

$$X(x) = (b - a)x + a$$

lehce zjistíme, že její **střední hodnota** je

$$E[X] = (b - a) \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + a$$

její **rozptyl** je

$$\text{Var}(X) = (b - a)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

a její **modus** je (jestliže $\alpha, \beta \geq 1$ a $\alpha + \beta > 2$)

$$\text{Mod}(X) = (b - a) \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} + a$$

Současně podle vzorečků uváděných v literatuře (a tudíž i na přednáškách) má platit

$$E[X] = \bar{y} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

a

$$\text{Var}(X) = s^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

Odtud plyne úkol: Zkontrolujte správnost vzorců uváděných v literatuře, tj., jsou-li zadána čísla a, m, b , najděte parametry $\alpha, \beta > 0$ tak, aby výše uvedené vztahy platily!

Řešení: V metodě PERT se z nějakého důvodu o parametrech α, β předpokládá, že platí $\alpha, \beta \geq 1$ a oba parametry splňují rovnici $\alpha + \beta = K$, kde K je předem pevně zvolená konstanta ($K > 2$). Jak uvidíme, v metodě PERT se uvažuje hodnota $K = 6$ se zdůvodněním, že tato hodnota je empiricky vyhovující.

Budiž tedy dán optimistický odhad a , modální odhad m a pesimistický odhad b doby trvání dané činnosti, přičemž se předpokládá, že $a < b$ a $a \leq m \leq b$. Dále předpokládejme, že pro parametry α, β platí $\alpha, \beta \geq 1$ a $\alpha + \beta = K > 2$. Pak hodnotu parametru α můžeme vyjádřit ze vztahu pro modus m následovně:

$$\text{Mod}(X) = m = (b - a) \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} + a$$

$$m = (b - a) \frac{\alpha - 1}{K - 2} + a$$

$$(K - 2)(m - a) = (b - a)(\alpha - 1)$$

Tudíž

$$\alpha = \frac{b + (K - 2)m - (K - 1)a}{b - a}$$

a pomocí předpokládaného vztahu $\alpha + \beta = K$ dostáváme rovněž

$$\beta = \frac{(K - 1)b - (K - 2)m - a}{b - a}$$

Hodnoty parametrů α, β , vypočtené pomocí zadaných údajů a, m, b , dosadíme do vztahu pro střední hodnotu rozdělení beta (β) transformovaného na interval (a, b) :

$$\begin{aligned}
E[X] = \bar{y} &= (b - a) \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + a = (b - a) \frac{1}{K} \frac{b + (K - 2)m - (K - 1)a}{b - a} + a = \\
&= \frac{a + (K - 2)m + b}{K}
\end{aligned}$$

a volba $K = 6$, odůvodněná empirickými zkušenostmi, pak dává

$$E[X] = \bar{y} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Vidíme, že vzorec pro střední hodnotu uváděný v literatuře je za uvedených předpokladů ($\alpha, \beta \geq 1$ a $\alpha + \beta = 6$) správný.

Nyní vypočtené hodnoty parametrů α, β dosadíme do vztahu pro rozptyl rozdělení beta (β) transformovaného na interval (a, b) :

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= (b - a)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \\
&= (b - a)^2 \frac{1}{K^2} \frac{1}{K + 1} \frac{(b + (K - 2)m - (K - 1)a)((K - 1)b - (K - 2)m - a)}{(b - a)^2} = \\
&= \frac{((K - 1)b - (K - 2)m - a)(b + (K - 2)m - (K - 1)a)}{(K + 1)K^2}
\end{aligned}$$

načež volba $K = 6$, když $7 \times 36 = 252$, dává

$$\text{Var}(X) = s^2 = \frac{(5b - 4m - a)(b + 4m - 5a)}{252}$$

Vidíme, že vzorec pro směrodatnou odchylku ($s = (b - a)/6$) resp. rozptyl ($s^2 = (b - a)^2/36$) uváděný v literatuře za uvedených předpokladů ($\alpha, \beta \geq 1$ a $\alpha + \beta = 6$) není správný.