Funkce Gama a Beta a pravděpodobnostní rozdělení beta

Nejprve zavedeme funkci Γ (Gama) a ukážeme některé její vlastnosti, především souvislost s funkcí faktoriálu ($n!$). Následně zavedeme funkci B (Beta) a ukážeme některé její vlastnosti, především souvislost s funkcí Gama (Γ). Dále zavedeme pojem pravděpodobnostního rozdělení beta (β) a ukážeme jeho základní vlastnosti (střední hodnotu, rozptyl a modus). Nakonec se budeme zabývat pravděpodobnostním rozdělením beta (β) v metodě PERT.

Definice. Pro komplexní z s kladnou reálnou částí ($z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$) definujeme funkci *Gama* následovně:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Poznámka. Požaduje se, aby $\operatorname{Re} z > 0$, aby integrál konvergoval. Zde vystačíme jen se z reálnými kladnými ($z \in \mathbb{R}, z > 0$).

Z definice vidíme, že hodnota funkce Gama v bodě $z = 1$ je rovna

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Dále je lehkým cvičením – integrováním per partes – odvodit, že pro kladné reálné z, obecněji pro komplexní z s kladnou reálnou částí, platí

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = t^z & v' = \mathrm{e}^{-t} \\ u' = zt^{z-1} & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{matrix} \right| = [-t^z \mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -zt^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t =$$

$$= [0 + 0] + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = z\Gamma(z)$$

Odtud již snadno vidíme, že $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1)$, $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2)$, $\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3)$ atd., tudíž

$$n! = \Gamma(n+1) \qquad \text{pro} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Poznámka. Uvedeným vztahem lze definovat hodnotu faktoriálu pro libovolné reálné číslo $n > -1$.

Nyní přejdeme k funkci Beta.

Definice. Pro komplexní p, q s kladnou reálnou částí $(p, q \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} p > 0,\ \operatorname{Re} q > 0)$ definujeme funkci *Beta* následovně:

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

Poznámka. Požaduje se, aby $\operatorname{Re} p > 0$ a $\operatorname{Re} q > 0$, aby integrál konvergoval. Zde opět vystačíme jen s p, q reálnými kladnými $(p, q \in \mathbb{R},\ p, q > 0)$.

Pozorování. *Na základě symetrie integrálu je vidět, že*

$$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$$

Nyní nás bude zajímat následující vztah mezi funkcemi Gama a Beta, v němž funkci Beta vyjádříme pomocí funkce Gama. Počítejme:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} s^{p-1}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \int_0^{+\infty} t^{q-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{p-1}t^{q-1}\mathrm{e}^{-(s+t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$

Pokračujme zavedením substituce

$$\begin{aligned} s &= uv \\ t &= u(1-v) \end{aligned} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} u &= s+t \\ v &= s/(s+t) \end{aligned}$$

Protože pro původní proměnné platí $0 < s < +\infty$ a $0 < t < +\infty$, pro nové proměnné (po transformaci) platí $0 < u < +\infty$ a $0 < v < 1$. Určíme ještě jakobián této transformace:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

Tedy

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{p-1}t^{q-1}\mathrm{e}^{-(s+t)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{1} (uv)^{p-1}[u(1-v)]^{q-1}e^{-u}|-u|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{1} u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-u}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \int_0^{1} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,\mathrm{d}v = \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)$$

Odtud

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Odtud již vidíme, že

$$\mathrm{B}(p+1,q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$$

Zbývá se zabývat rozdělením pravděpodobnosti beta (β). Uvedené rozdělení beta (β) definujeme na otevřeném intervalu $(0,1)$, což bude prostor elementárních jevů, spolu se všemi lebesgueovsky měřitelnými podmnožinami daného intervalu $(0,1)$, které budou prostorem jevů, spolu s pravděpodobnostní mírou na daném intervalu $(0,1)$ zavedenou hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad \text{pro} \qquad x \in (0,1)$$

kde $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ jsou dva pevně zvolené parametry uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti beta (β).

Tedy, jinými slovy, pro dva pevně zvolené parametry $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ uvažujme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $\Omega = (0,1)$ je *prostor elementárních jevů*, systém podmnožin $\mathcal{A}$, zde kolekce všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin intervalu $\Omega = (0,1)$, je *prostor jevů* a P je *pravděpodobnostní míra*, zde zavedená svojí hustotou následovně:

$$P(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro} \qquad A \in \mathcal{A}$$

kde $f(x)$ je výše uvažovaná hustota pravděpodobnostního rozdělení beta (β).

<u>Poznámka.</u> Obecně platí, že prostor jevů $\mathcal{A}$ je σ-algebra (sigma-algebra) na prostoru elementárních jevů Ω. To znamená, že platí:

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$\text{jestliže} \quad A \in \mathcal{A}\,, \qquad \text{potom} \quad \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$\text{jestliže} \quad A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}\,, \qquad \text{potom} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

<u>Pozorování.</u> *Na základě přechodu k doplňkům (podle prostředního pravidla) vidíme, že platí rovněž* $\emptyset \in \mathcal{A}$ *a, jestliže* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$, *potom* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

V našem případě je σ-algebra $\mathcal{A}$ tvořena všemi lebesgueovsky měřitelnými podmnožinami intervalu $(0,1)$.

Připomeňme, že funkce $P\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ se nazývá *σ-aditivní* (*sigma-aditivní*) právě tehdy, když pro libovolné po dvou disjunktní jevy $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ platí $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Poznámka. Obecně platí, že pravděpodobnostní míra P je nezáporná σ-aditivní funkce $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ taková, že $P(\Omega) = 1$.

Nyní určíme některé charakteristiky (střední hodnotu, rozptyl, modus) pravděpodobnostního rozdělení beta (β).

Uvažujme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Připomeňme, že funkce $X: \Omega \to \mathbb{R}$ je *měřitelná* právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $G \subseteq \mathbb{R}$ platí $X^{-1}(G) \in \mathcal{A}$, řečeno slovy, vzor každé otevřené množiny je jevem.

Připomeňme, že náhodnou veličinou na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ rozumíme libovolnou měřitelnou funkci $X: \Omega \to \mathbb{R}$. To znamená, že náhodná veličina je měřitelná funkce, která každému elementárnímu jevu $\omega \in \Omega$ přiřadí reálné číslo $X(\omega)$.

V našem případě, kde $\Omega = (0, 1)$ je množina jevů a $\mathcal{A}$ je kolekce všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin intervalu $(0, 1)$ a pravděpodobnostní míra P má rozdělení beta (β), budeme uvažovat identickou náhodnou veličinu $X: (0, 1) \to (0, 1)$, zavedenou předpisem $X(x) = x$ neboli $X: x \mapsto x$ pro každé $x \in (0,1)$.

Střední hodnota:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\Omega} X \, \mathrm{d}P = \int_{\Omega} x f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha - 1} (1 - x)^{\beta - 1} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)} \int_{0}^{1} x^{\alpha} (1 - x)^{\beta - 1} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{B}(\alpha + 1, \beta)}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Rozptyl:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2] = \int_{\Omega} (X-\mathrm{E}[X])^2\,\mathrm{d}P = \int_{\Omega} \left(x - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^2 \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 2x \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}\,dx - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\frac{\mathrm{B}(\alpha+2,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)} - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta} - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\alpha}{\alpha+\beta} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - 2\alpha^2(\alpha+\beta+1) + \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha+\beta-2\alpha^2-2\alpha\beta-2\alpha+\alpha^2+\alpha\beta+\alpha)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} =$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Modus:

Připomeňme, že *modus* je nejpravděpodobnější hodnota náhodné veličiny. V našem případě, kdy náhodná veličina $X(x) = x$ je identita, modus je bodem, ve kterém hustota $f(x)$ uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti nabývá svého (globálního) maxima. Připomeňme, že hustota námi uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení beta (β) je

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad \text{pro} \qquad x \in (0,1)$$

kde $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ jsou dva pevně zvolené parametry uvažovaného rozdělení pravděpodobnosti beta (β).

Abychom nalezli bod (globálního) maxima uvažované hustoty $f(x)$, a tedy modus identické náhodné veličiny $(X(x) = x)$ s rozdělením pravděpodobnosti beta (β), rozlišíme několik případů:

• Jestliže $0 < \alpha, \beta < 1$, potom modus není definován, protože $f(x) \to +\infty$ pro $x \to 0^+$ i pro $x \to 1^-$, tj., modem by byly body $x = 0$ i $x = 1$.

• Jestliže $\alpha, \beta = 1$, potom modus není definován, protože $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \langle 0,1 \rangle$, tj., rozdělení beta (β) degeneruje na rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti, tj., modem by byly všechny body intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

• Jestliže $0 < \alpha \leq 1 < \beta$ nebo $0 < \alpha < 1 \leq \beta$, potom modus je $x = 0$.
Jestliže $1 \leq \beta$, potom $f(1) = 1$, jestliže $\beta = 1$, nebo $f(1) = 0$, jestliže $\beta > 1$.
Jestliže $0 < \alpha < 1$, potom $f(x) \to +\infty$ pro $x \to 0^+$.
Jestliže $\alpha = 1$, a tudíž $1 < \beta$, potom $1 = f(0) > f(x) > f(1) = 0$ pro $x \in (0,1)$.

• Jestliže $0 < \beta \leq 1 < \alpha$ nebo $0 < \beta < 1 \leq \alpha$, potom modus je $x = 1$.
Jestliže $1 \leq \alpha$, potom $f(0) = 1$, jestliže $\alpha = 1$, nebo $f(0) = 0$, jestliže $\alpha > 1$.
Jestliže $0 < \beta < 1$, potom $f(x) \to +\infty$ pro $x \to 1^-$.
Jestliže $\beta = 1$, a tudíž $1 < \alpha$, potom $0 = f(0) < f(x) < f(1) = 1$ pro $x \in (0,1)$.

• Jestliže $\alpha, \beta > 1$, potom $f(0) = 0 = f(1)$ a $f(x) > 0$ pro $x \in (0,1)$. Proto je zřejmé, že modus leží uvnitř intervalu $(0,1)$. Protože hustota pravděpodobnosti $f(x)$ je hladká (má derivaci), stačí nalézt stacionární bod hustoty pravděpodobnosti, tj. bod, ve kterém její derivace $f'(x)$ je nulová. Počítejme:

$$f'(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \Big((\alpha-1)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} - x^{\alpha-1}(\beta-1)(1-x)^{\beta-2} \Big) \qquad \text{pro} \quad x \in (0,1)$$

V intervalu $(0,1)$ řešme rovnici $f'(x)=0$, tedy

$$(\alpha-1)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}=(\beta-1)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2}$$

$$(\alpha-1)(1-x)=(\beta-1)x$$

$$\alpha-1=(\beta-1)x+(\alpha-1)x$$

Tedy, jestliže $\alpha,\beta>1$, potom **modus** je:

$$x=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$$

(Uvedená rovnice platí i v limitních případech, kdy $\alpha=1<\beta$ nebo $\beta=1<\alpha$, tj. souhrnně $\alpha,\beta\geq 1$ a $\alpha+\beta>2$.)

Použití pravděpodobnostního rozdělení beta (β) v metodě PERT

V metodě PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) se uvažuje, že doba trvání každé činnosti se řídí pravděpodobnostním rozdělením beta (β). Pro každou činnost se zadává: optimistický odhad a, modální odhad m a pesimistický odhad b doby trvání dané činnosti. (Předpokládá se $a<b$ a $a\leq m\leq b$.)

Jestliže uvažované rozdělení pravděpodobnosti beta (β) je zadáno svými pevně zvolenými parametry $\alpha>0$ a $\beta>0$ (viz výše) a interval $\Omega=(0,1)$ transformujeme lineárně na interval (a,b), tedy $0\mapsto a$ a $1\mapsto b$, tedy na intervalu $\Omega=(0,1)$ uvažujeme náhodnou veličinu

$$X(x)=(b-a)x+a$$

lehce zjistíme, že její **střední hodnota** je

$$\mathrm{E}[X]=(b-a)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+a$$

její **rozptyl** je

$$\mathrm{Var}(X)=(b-a)^2\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

a její **modus** je (jestliže $\alpha,\beta\geq 1$ a $\alpha+\beta>2$)

$$\mathrm{Mod}(X)=(b-a)\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}+a$$

Současně podle vzorečků uváděných v literatuře (a tudíž i na přednáškách) má platit

$$\mathrm{E}[X] = \bar{y} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

a

$$\mathrm{Var}(X) = s^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

<u>Odtud plyne úkol:</u> Zkontrolujte správnost vzorců uváděných v literatuře, tj., jsou-li zadána čísla $a, m, b,$ najděte parametry $\alpha, \beta > 0$ tak, aby výše uvedené vztahy platily!

<u>Řešení:</u> V metodě PERT se z nějakého důvodu o parametrech α, β předpokládá, že platí $\alpha, \beta \geq 1$ a oba parametry splňují rovnici $\alpha + \beta = K,$ kde K je předem pevně zvolená konstanta ($K > 2$). Jak uvidíme, v metodě PERT se uvažuje hodnota $K = 6$ se zdůvodněním, že tato hodnota je empiricky vyhovující.

Budiž tedy dán optimistický odhad $a,$ modální odhad m a pesimistický odhad b doby trvání dané činnosti, přičemž se předpokládá, že $a < b$ a $a \leq m \leq b.$ Dále předpokládejme, že pro parametry α, β platí $\alpha, \beta \geq 1$ a $\alpha + \beta = K > 2.$ Pak hodnotu parametru α můžeme vyjádřit ze vztahu pro modus m následovně:

$$\mathrm{Mod}(X) = m = (b - a)\frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} + a$$

$$m = (b - a)\frac{\alpha - 1}{K - 2} + a$$

$$(K - 2)(m - a) = (b - a)(\alpha - 1)$$

Tudíž

$$\alpha = \frac{b + (K - 2)m - (K - 1)a}{b - a}$$

a pomocí předpokládaného vztahu $\alpha + \beta = K$ dostáváme rovněž

$$\beta = \frac{(K - 1)b - (K - 2)m - a}{b - a}$$

Hodnoty parametrů $\alpha, \beta,$ vypočtené pomocí zadaných údajů $a, m, b,$ dosadíme do vztahu pro střední hodnotu rozdělení beta (β) transformovaného na interval (a, b):

$$\mathrm{E}[X] = \bar{y} = (b-a)\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + a = (b-a)\frac{1}{K}\frac{b+(K-2)m-(K-1)a}{b-a} + a =$$

$$= \frac{a+(K-2)m+b}{K}$$

a volba $K = 6$, odůvodněná empirickými zkušenostmi, pak dává

$$\mathrm{E}[X] = \bar{y} = \frac{a+4m+b}{6}$$

Vidíme, že vzorec pro střední hodnotu uváděný v literatuře je za uvedených předpokladů ($\alpha, \beta \geq 1$ a $\alpha+\beta = 6$) správný.

Nyní vypočtené hodnoty parametrů α, β dosadíme do vztahu pro rozptyl rozdělení beta (β) transformovaného na interval (a, b):

$$\mathrm{Var}(X) = (b-a)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} =$$

$$= (b-a)^2 \frac{1}{K^2}\frac{1}{K+1}\frac{(b+(K-2)m-(K-1)a)\big((K-1)b-(K-2)m-a\big)}{(b-a)^2} =$$

$$= \frac{\big((K-1)b-(K-2)m-a\big)(b+(K-2)m-(K-1)a)}{(K+1)K^2}$$

načež volba $K = 6$, když $7 \times 36 = 252$, dává

$$\mathrm{Var}(X) = s^2 = \frac{(5b-4m-a)(b+4m-5a)}{252}$$

Vidíme, že vzorec pro směrodatnou odchylku ($s = (b-a)/6$) resp. rozptyl ($s^2 = = (b-a)^2/36$) uváděný v literatuře za uvedených předpokladů ($\alpha, \beta \geq 1$ a $\alpha+\beta = 6$) není správný.