SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Distanční studijní text

Radmila Krkošková

Karviná 2024

Obor: Matematika, Statistika.

Klíčová slova: Matice, determinanty, posloupnost a její limita, funkce a její limita, diferenciální počet jedné reálné proměnné, kvalitativní znaky, kvantitativní znaky, binomické rozdělení, Poissonovo rozdělení, normální rozdělení, exponenciální rozdělení, Chí-kvadrát test dobré shody, Chí-kvadrát test nezávislosti, regresní analýza.

Anotace: Publikace představuje studijní oporu základního vysokoškolského kurzu matematiky a statistiky pro bakalářské studium na vysoké škole ekonomického zaměření. Obsahově pokrývá základní témata: operace s maticemi, determinanty, posloupnosti, funkce, derivace funkce jedné reálné proměnné, kvalitativní a kvantitativní znaky, rozdělení pravděpodobnosti, testování hypotéz, regresní analýza. Součástí textu jsou řešené a neřešené příklady.

Autor: **Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.**

Obsah

ÚVODEM

Tento text představuje studijní oporu pro studium kvantitativních metod ekonomických studijních programů v bakalářském studiu na Slezské univerzitě, Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné.

Studijní opora je rozdělena do 8 kapitol. První polovina studijní opory je věnována základům matematiky, druhá část se zabývá základy statistiky. Po každé z těchto částí je následující přednáška věnována shrnutí učiva (6. a 12. přednáška). Rozsah kapitoly 1, 2, 3, 5, 6, 7 odpovídá klasické dvouhodinové přednášce v prezenčním studiu na vysoké škole ekonomického zaměření. Kapitole 4, která se zabývá diferenciálním počtem funkce jedné reálné proměnné, jsou věnovány 2 přednášky. Stejně tak se učivo kapitoly 8, která se zabývá regresní analýzou, přednáší na 2 přednáškách.

Učební text této knihy nabízí studentům vysokých škol ekonomického zaměření strukturovaný a komplexní přehled o 8 důležitých tematických kapitolách. Každá kapitola je přibližně stejně rozsáhlá a obtížností vyvážená, což umožňuje učebním materiálům pokrýt dostatečný rozsah znalostí, aby se studenti mohli seznámit s klíčovými koncepty a metodami v každé oblasti.

V případě prezenčního studia na vysoké škole je každá přednáška doplněna seminářem. Semináře jsou klíčovým prvkem výuky, protože umožňují studentům aplikovat teoretické znalosti na praktické číselné příklady. Tímto způsobem studenti získávají dovednosti a praxi v řešení reálných ekonomických situací. Navíc jsou semináře vybaveny počítačovými technologiemi, což umožňuje efektivnější řešení složitějších problémů a analýz.

Spojení prezenčních přednášek a seminářů vytváří dynamické a interaktivní vzdělávací prostředí, které podněcuje aktivní zapojení studentů a posiluje jejich schopnost kriticky uvažovat, analyzovat a aplikovat získané poznatky. Tato kombinace připraví studenty na praktické uplatnění svých dovedností v reálném ekonomickém prostředí.

RYCHLÝ NÁHLED STUDIJNÍ OPORY

Vysokoškolské studium v případě předmětu Kvantitativní metody v ekonomické praxi vyžaduje enormní úsilí studenta zaměřené na pravidelnost a vytrvalost ve studiu i samostudiu, schopnost koncentrace na předmět, aktivní přístup spočívající v samostatném řešení příkladů. V tom všem by tato studijní opora měla studentům kombinované formy studia pomoci nahradit kvalitní prezenční výuku i úlohu učebnic a skript. Studijní opora je k tomu účelu vybavena určitými nástroji, o jejichž funkcích byste měli být informováni a mohli je tudíž účelně využívat ve svůj prospěch. Pro lepší zvládnutí látky jsou vám v elektronické verzi kurzu Statistické zpracování dat k dispozici ještě doplňkové materiály v elektronické podobě. Dalšími podpůrnými zdroji ke studiu mohou být klasické učebnice a skripta a další doporučená literatura.

První kapitola této studijní opory se zaměřuje na lineární algebru, kde jsou studenti seznámeni se základními vlastnostmi matic a determinantů. Důležitost druhé kapitoly spočívá v rozšíření znalostí o číselných posloupnostech a jejich limitách. Třetí kapitola je klíčová, neboť se zabývá funkcemi jedné reálné proměnné, představuje grafy elementárních funkcí a jejich vlastnosti. Patrně nejdůležitější je čtvrtá kapitola, která důkladně probírá diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné.

Další kapitoly se věnují oblasti statistiky. Pátá kapitola představuje statistické znaky, jejich rozdělení, a charakteristiky polohy a variability. Následující kapitola je věnována náhodným veličinám, jak diskrétním, tak spojitým, a pravděpodobnostním modelům. Z diskrétních modelů jsou studenti seznámeni s rovnoměrným rozdělením, binomickým a Poissonovým rozdělením, zatímco ze spojitých pravděpodobnostních modelů jsou uvedena rovnoměrné, normální a exponenciální rozdělení.

Testování hypotéz, jak parametrických, tak neparametrických, je předmětem sedmé kapitoly. Poslední kapitola je věnována regresní analýze, s důrazem na jednoduchý lineární regresní model.

Každý poznatek je podrobně vysvětlen a aplikován na řešené příklady. Na konci každé kapitoly jsou připraveny úlohy spolu s jejich řešeními.

1 MATICOVÝ POČET A DETERMINANTY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

V této kapitole zavedeme pojem matice reálných čísel a příslušné operace, které s maticemi běžně vykonáváme. Všechny tyto operace mají své přímé opodstatnění v reálné praxi. Pojem matice nám umožňuje výhodně zapsat komplikované systémy lineárních rovnic do tabulkové podoby. Druhá část této kapitoly se zabývá zavedením pojmu determinant matice, který je její základní číselnou charakteristikou. Existuje několik důvodů, které nás vedou k pojmu determinantu. Mezi nejdůležitější můžeme zařadit tyto: nalezení inverzní matice, charakteristika řešitelnosti systémů lineárních rovnic, některé aplikace využívající pojem vlastních čísel.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- základní operace s maticemi (sčítání, násobení),
- vypočítat transponovanou matici a řešit maticové rovnice,
- vypočítat determinant matice,
- použít Cramerovo pravidlo pro výpočet soustavy lineárních rovnic.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Matice, operace s maticemi, inverzní matice, determinant, Sarussovo pravidlo, Cramerovo pravidlo.

1.1 Operace s maticemi

Operace s maticemi představují základní manipulace, které můžeme provádět s maticemi. Mezi tyto operace patří sčítání, odčítání, násobení matic skalárem, násobení dvou matic, transpozice a inverze. Tyto operace s maticemi jsou základem pro řešení mnoha matematických a inženýrských problémů a mají široké uplatnění v různých oblastech, jako je například lineární algebra, statistika, počítačová grafika a další.

Začněme příkladem matice typu (2,3). Takto zapíšeme typ matice, která má 2 řádky a 3 sloupce. Konkrétním příkladem může být například tato matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

DEFINICE 1 Df

Maticí typu (*m*,*n*) nazýváme množinu prvků a_{ik} uspořádaných do m řádků a n sloupců, tj. schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Stručněji zapisujeme: $A = (a_{ik})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2,\ldots,n$.

Pro zápis matic se někdy používají ještě další 2 typy závorek:

$$A = [a_{ik}], \qquad A = \|a_{ik}\|.$$

První index „*i*“ se nazývá **řádkový index,** druhý index „*k*“ se nazývá **sloupcový index.** Prvky matice mohou být reálná čísla, komplexní čísla, funkce, operátory, vektory a také matice.

Hlavní diagonálu matice A tvoří prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pp}$,kde $p = \min\{m,n\}$, **vedlejší diagonálu** prvky a_{1n} , $a_{2\,n-1}$, $a_{3\,n-2}$,...

Matice lze podle tvaru rozdělit na **čtvercové** ($m = n$) a **obdélníkové** ($m \neq n$).

Matice typu (n, n) se nazývá čtvercová matice **stupně (řádu) *n***.

Bodová matice je matice typu (1,1).

Typy matic:

- **a. nulová matice *0***, jejíž prvky jsou nuly, tj. $a_{ik} = 0, \forall i, \forall k$,
- **b. diagonální matice** je čtvercová matice, jejíž prvky neležící v hlavní diagonále jsou nuly, tj. $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$,
- **c. jednotková matice** E je diagonální matice, jejíž prvky v hlavní diagonále jsou jedničky, tj. $a_{ik} = 1$ pro $i = k$, $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$,
- **d. trojúhelníková matice** je matice, která má pod (resp. nad. hlavní diagonálou samé nuly, tj. pro :

  horní trojúhelníkovou matici je $a_{ik} = 0$ pro $i > k$,

  dolní trojúhelníkovou matici je $a_{ik} = 0$ pro $i < k$,
- **e. symetrická matice** je čtvercová matice, pro kterou platí $a_{ik} = a_{ki}$, $\forall i, \forall k$,
- **f. antisymetrická matice** je čtvercová matice, pro kterou platí $a_{ik} = -a_{ki}$, $\forall i, \forall k$.

Promyslete si následující úkol:

Ke čtvercovým maticím

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ přiřaďte následující pojmy

- Dolní trojúhelníková matice,
- Horní trojúhelníková matice,
- Diagonální matice,
- Symetrická matice,
- Antisymetrická matice,
- Skalární matice.

Odpověď:

Dolní trojúhelníkové matice jsou matice D, E.

Horní trojúhelníkové matice jsou matice C, E

Diagonální matice je matice E.

Symetrické matice jsou matice A, E.

Antisymetrická matice je matice B.

Skalární matice je matice E.

1.1.1 ROVNOST MATIC

Matice $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ téhož typu (m, n) se sobě rovnají, mají-li na stejných místech stejné prvky: $A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ik} = b_{ik}\ , \forall i, \forall k.$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Vypočtěte $a, b \in R$, jestliže platí:

$$\begin{pmatrix} a^2 & a+b \\ b+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

Z podmínek o rovnosti odpovídajících si prvků v obou maticích sestavíme rovnosti:

$$a^2 = 4; \quad a + b = 5; \quad b + 1 = 4$$

Řešením dostaneme: $b = 3; a = 2$.

1.1.2 SČÍTÁNÍ MATIC

Součtem matic $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ téhož typu (m, n), rozumíme matici, jejíž prvky jsou součtem odpovídajících si prvků v maticích A a B, tj.

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik}),\ \forall i,\ \forall k.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Vypočtěte $A + B$, je-li dáno:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$A + B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti sčítání matic:

$A + B = B + A$ (komutativní zákon)
$A + (B + C) = (A + B) + C,$ (asociativní zákon)
$A + 0 = 0 + A = A,$
$A + (-A) = (-A) + A = 0.$

Všimněte si, že matice A, B musí být stejného typu, matice různých typů nelze sčítat! Dále 0 je nulová matice stejného typu jako matice A.

1.1.3 NÁSOBENÍ MATICE REÁLNÝM ČÍSLEM

Součinem čísla r a matice A typu (m,n) nazýváme matici $rA = (ra_{ik})$, $\forall i$, $\forall k$. Výsledná matice je téhož typu (m,n), přitom každý prvek původní matice vynásobíme číslem r.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Vypočtěte rA, je-li dáno $r = -2$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení.

$$-2A = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť $p, q \in R$ a A, B jsou matice téhož typu. Pro násobení matice číslem platí:

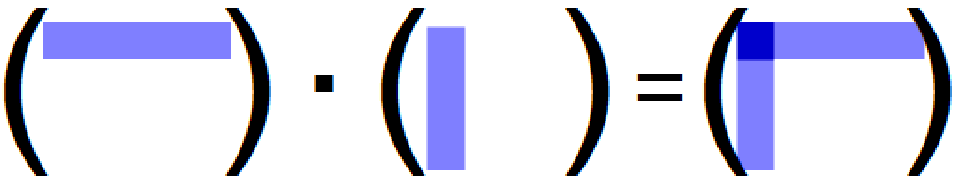
$$pA = Ap,$$
$$(-1)\,A = -A,$$
$$p\,(A + B) = pA + pB,$$
$$(p + q)\,A = p\,A + qA,$$
$$p(qA) = (pq)\,A,$$
$$1A = A.$$

1.1.4 NÁSOBENÍ MATICE MATICÍ

Součinem matice A typu (m,n) a matice B typu (n,p) v daném pořadí je matice $C = A.B$ typu (m,p), pro jejíž prvky c_{ik} platí:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}.$$

Uvědomte si, že podmínkou existence definovaného součinu AB je rovnost počtu sloupců matice A, a počtu řádků matice B. Při násobení vždy bereme z první matice řádky a z druhé sloupce. Konkrétně pro prvek c_{11} uvažujeme první řádek v první matici a první sloupec ve druhé matici, jak je znázorněno na obrázku:



ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Vypočtěte AB, je-li dáno:

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$,

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Řešení.

a. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.(-1)+1.2 & 2.3+1.(-4) \\ (-1).(-1)+3.2 & (-1).3+3.(-4) \\ 0.(-1)+(-2)2 & 0.3+(-2).(-4) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2+2 & 6-4 \\ 1+6 & -3-12 \\ 0-4 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -15 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

b. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ -2+3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Násobili jsme matice typu (3,2)(2,1) a výsledkem je matice typu (3,1).

c. Nelze násobit matice typu (3,2)(3,3), protože počet řádků první matice není roven počtu sloupců matice druhé.

Vlastnosti součinu matic:

$$EA = AE = A,$$
$$A\,(BC) = (AB)C,$$
$$A0 = 0A = 0,$$
$$p\,(AB) = (pA)\,B = A\,(pB),$$
$$A\,(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

Komutativní zákon obecně pro součin matic neplatí! Pokud dvě matice tento zákon splňují, tj. platí pro ně rovnost $AB = BA$, pak se nazývají **záměnné**. Například každá diagonální matice řádu n je záměnná s každou diagonální maticí téhož řádu.

1.2 Transponovaná matice

Transponovaná matice z matice A typu (m,n) je matice A^T typu (n,m), která vznikne z matice A vzájemnou výměnou řádků a sloupců ve stejném pořadí (tj. překlopením prvků matice kolem hlavní diagonály). Označujeme ji A^T.

Pro operace s transponovanou maticí platí:

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$(pA)^T = pA^T,$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Transponujte matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Řešení.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Vypočtěte matici $C = (-3)A^T + 2B^T$, je-li dáno:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

Nejprve vypočítáme matice transponované a pak dosadíme do požadované rovnosti.

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = (-3)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -10 & -11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Hodnost matice

Na řádky a sloupce matice se můžete dívat jako na řádkové a sloupcové vektory. Lineární závislost a nezávislost řádků (sloupců) matice se pak definuje analogicky jako u vektorů.

DEFINICE 2

Hodnost $h(A)$ matice A je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A. Hodnost nulové matice $\boldsymbol{0}$ je nula. Hodnost matice je také možné definovat jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice. Obě definice jsou ekvivalentní.

Dvě matice, které mají stejnou hodnost nazýváme **ekvivalentní** a značíme $A \approx B$.

Hodnost matice se nezmění, jestliže v matici provedeme tzv. **řádkové elementární úpravy**:

1. vyměníme dva řádky matice,
2. násobíme řádek matice nenulovým číslem,
3. přičteme-li k jednomu řádku matice lineární kombinaci ostatních řádků,
4. vynecháme-li v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků.

Aniž by se změnila hodnost matice lze stejné úpravy provádět i se sloupci matice, neboť platí: $h(A) = h(A^T)$.

Určování hodnosti matice

Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme matici A na horní (resp. dolní) trojúhelníkovou matici B, která má všechny prvky na hlavní diagonále nenulové. Hodnost matice A je pak rovna počtu řádků trojúhelníkové matice B.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení.

Hodnost matice zjišťujeme tak, že danou matici převedeme řádkovými úpravami uvedenými výše na matici, která má v diagonále vesměs nenulové prvky a pod diagonálou samé nuly. Hodnost matice je pak rovna počtu řádků.

Upravujeme tak, aby pod prvkem $a_{11} \neq 0$ byly nulové hodnoty Toho dosáhneme, když k (-3)násobku druhého řádku přičteme řádek první. A když k řádku třetímu přičteme (-4)násobek druhého řádku:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Druhý a třetí řádek jsou stejné, proto má matice pouze dva lineárně nezávislé řády a hodnost matice je rovna 2.

Df

DEFINICE 3

Čtvercová matice *A* typu *n* se nazývá **regulární,** jestliže její hodnost je rovna počtu řádků (sloupců), tj. $h(A) = n$. Čtvercová matice, která není regulární se nazývá **singulární**. O regulárnosti či singulárnosti hovoříme pouze u čtvercových matic. Součin regulárních matic je opět regulární matice.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 8

Zjistěte, zda vektory $\boldsymbol{u} = (1, -2{,}5)$, $\boldsymbol{v} = (3, -1{,}2)$, $\boldsymbol{w} = (2, -9{,}23)$ jsou lineárně závislé.

Řešení.
Dané vektory napíšeme jako řádky matice a vypočítáme její hodnost. Bude-li rovna počtu daných vektorů, jsou vektory lineárně nezávislé, bude-li tomu naopak jsou vektory lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & 5 & -13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -13 \end{pmatrix}$$

$h = 2 \quad \Rightarrow \quad$ vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ jsou lineárně závislé.

1.4 Inverzní matice

V této kapitole začneme jednoduchým příkladem, na kterém budeme definovat pojem inverzní matice. Najděte matici, která bude vyhovovat následující rovnosti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Násobíme matice na levé straně rovnosti a dostáváme:

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ b + 2d &= 0 \\ 3a + 4c &= 0 \\ 3b + 4d &= 1 \end{aligned}$$

Řešením je soustavy je $a = -2$; $b = 1$; $c = 1{,}5$; $d = -0{,}5$.

Hledaná matice je tvaru $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Tuto matici pak nazveme inverzní maticí k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

DEFINICE 4

Inverzní maticí k regulární matici A řádu n nazveme matici A^{-1}, pro kterou platí:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

kde E je jednotková matice řádu n.
Ke každé regulární matici existuje právě jedna matice inverzní.

Vlastnosti inverzních matic:

$$E^{-1} = E,$$
$$(A^{-1})^{-1} = A,$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Výpočet inverzní matice se provádí pomocí elementárních řádkových transformací.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9

Určete k dané matici A inverzní matici A^{-1}, je-li:

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, **b.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení.

Každou matici A řádu n lze jen řádkovými (resp. jen sloupcovými) úpravami převést na jednotkovou matici E. Jestliže se stejných úprav použije na řádky (resp. sloupce) jednotkové matice E téhož řádu, pak z této jednotkové matice obdržíme inverzní matici A^{-1}. Výchozí matice je tvaru (A, E).

a. V následujícím schématu upravujeme matici A tak, abychom na pozicích prvků a_{21}, a_{12} dostali nulové prvky a v hlavní diagonále jedničky.

$$(A, E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Následující čtyři úpravy vedou k výpočtu matice A^{-1}:

1. k (-3)násobku 2. řádku přičteme (2)násobek 1. řádku,
2. k (-17)násobku 1.řádku přičteme 1.řádek,
3. 1.řádek dělíme číslem (-3),

4. oba řádky dělíme číslem 17.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\end{array}\right). \approx \left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}-51 & 0 & -15 & -3\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cc|cc}17 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{5}{17} & \frac{1}{17}\\ 0 & 1 & \frac{2}{17} & -\frac{3}{17}\end{array}\right)=\left(E,A^{-1}\right).$$

Inverzní matice: $A^{-1}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

b. Opět se budeme snažit získat nulové prvky na pozicích a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{23}, a_{13}, a_{12}. Přesně v tomto pořadí. Postupujeme následovně:

1. k (2)násobku 2. řádku přičteme 1. řádek, k (2)násobku 3. ádku přičteme (-3)násobek 1. řádku,
2. k 3. řádku přičteme (-1)násobek 2. řádku,
3. k (-6)násobku 2. řádku přičteme 3. řádek, k (2)násobku 1. řádku přičteme 3. řádek,
4. k (3)násobku 1. řádku přičteme 2. řádek,
5. 1. řádek dělíme číslem (12), 2. řádek číslem (6), 3. řádek číslem(-6).

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -3 & 0 & 2\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & -2 & 0 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 6 & 0 & -10 & -14 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}12 & 0 & 0 & -16 & -20 & 8\\ 0 & 6 & 0 & -10 & -14 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{16}{12} & -\frac{20}{12} & \frac{8}{12}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{6} & -\frac{14}{6} & \frac{2}{6}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6}\end{array}\right)=$$

(E,A^{-1})

Po zkrácení zlomků a vytknutí $\frac{1}{3}$ dostaneme $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4 & -5 & 2\\ -5 & -7 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Výsledek ověříme vypočtením součinu $AA^{-1}=E$.

Poznámka. Jestliže $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, pak $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Například pro $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ je $B^{-1}=\frac{1}{1\cdot4-(-2)\cdot3}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

1.5 Maticové rovnice

Maticová rovnice je rovnice, kde neznámá je matice. Při řešení maticových rovnic používáme maticové operace součtu a součinu a nesmíme zapomenout, že pro součin matic obecně neplatí komutativní zákon. To mimo jiné znamená, že při úpravách rovnic (pokud násobíme rovnici libovolnou maticí), je nutné obě strany rovnice násobit danou maticí současně buď zleva nebo zprava.

Připomínáme dva důležité vztahy, které budeme při řešení maticových rovnic používat:

1. pro regulární matici D platí: $DD^{-1} = D^{-1}D = E,$

2. pro matici X platí: $XE = EX = X.$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 10

Řešte maticové rovnice:

a) $AX = B$; kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $XA = B$; kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení.

a) Z maticové rovnice vyjádříme matici X tak, že rovnici násobíme maticí A^{-1} zleva:

$$AX = B \quad /.A^{-1}$$
$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}.B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Z maticové rovnice vyjádříme matici X tak, že rovnici násobíme maticí A^{-1} zprava:

$$XA = B \quad /.A^{-1}$$
$$X.A.A^{-1} = B.A^{-1}$$
$$X = B.A^{-1}$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1.6 Determinant matice

Každé čtvercové matici je přiřazeno číslo, které nazýváme determinantem matice. Pokud matice není čtvercová, tak determinant definován není. Pro determinant užíváme tato označení:

$$\det A = \det(a_{ij}) = |A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

DEFINICE 5

Čtvercovou matici A nazýváme regulární $\Leftrightarrow$ det A $\neq$ 0.

Čtvercovou matici B nazýváme singulární $\Leftrightarrow$ det B = 0.

DEFINICE 6

Výpočet determinantu druhého řádu:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinant se rovná rozdílu součinu prvků hlavní diagonály a součinu prvků vedlejší diagonály.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 11

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$.

Řešení. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3.(-2) - 1.(-5) = -1.$

DEFINICE 7

Výpočet determinantu třetího řádu (Sarussovo pravidlo):

det$A$= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} +$
$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 12

Vypočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

Řešení.

Řešíme Sarussovým pravidlem – připíšeme první dva sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{matrix} =$$

$$= 1.1.(-3) + 2.1.(-2) + (-4).3.3 - [(-4).1.(-2) + 1.1.3 + 2.3.(-3)] = -36.$$

1.6.1 VLASTNOSTI DETERMINANTU

1. Determinant matice A se rovná determinantu transponované matice A^T.

Platí: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 7 & 6 & 3 \\ 13 & 9 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Jestliže v matici vzájemně zaměníme dva řádky (resp. dva sloupce), změní determinant matice znaménko.

Platí: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 13 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

3. Společného nenulového činitele k všech prvků jednoho řádku (resp. jednoho sloupce) matice lze vytknout před determinant.

Platí: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 2 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

Obráceně: $5\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 35 & 13 \\ 4 & 30 & 9 \\ 16 & 15 & 8 \end{vmatrix}$.

4. Determinant matice se rovná nule, jestliže:

a. všechny prvky aspoň jednoho řádku (resp. jednoho sloupce) jsou rovny nule,

b. jeden řádek (resp. sloupec. matice je lineární kombinací řádků (resp. sloupců) s ním rovnoběžných.

$$\text{Platí: } \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 32 & 53 \end{vmatrix} = 0.$$

Třetí řádek je součtem dvojnásobku prvního řádku a trojnásobku druhého řádku.

5. Jestliže k některému řádku (resp. sloupci) matice přičteme lineární kombinaci zbývajících řádků (resp. sloupců), potom determinant nové matice je stejný, jako determinant původní matice.

6. Jsou-li *A*, *B* čtvercové matice stejného řádu, platí: det (*AB*) = det*A*. det *B*.

$$\text{Platí: } \begin{vmatrix} 14 & -9 & 7 \\ 10 & -1 & 2 \\ 12 & -9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Df

DEFINICE 8

Doplněk prvku $\boldsymbol{a_{ij}}$

Ve čtvercové matici *A* vypustíme *i*-tý řádek a *j*-tý sloupec. Obdržíme tak matici typu $(n-1, n-1)$. Její determinant označíme A_{ij}^* a nazveme **subdeterminantem** prvku $\boldsymbol{a_{ij}}$ v matici $\boldsymbol{A}$. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$ nazýváme **doplňkem** prvku $\boldsymbol{a_{ij}}$ v matici *A*.

Zapamatujte si, že doplněk (daného prvku) je subdeterminantem (tohoto prvku) opatřený vhodným znaménkem.

Ve schématu $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ je naznačena symbolem +, resp. symbolem − „poloha“ prvků, jejichž subdeterminant a doplněk se sobě rovnají, resp. liší se znaménkem.

Df

DEFINICE 9

Výpočet determinantu řádu $\boldsymbol{n \geq 3}$ (rozvoj determinantu podle prvků určitého řádku resp. sloupce):

Vztah pro rozvoj determinantu podle prvků *i*-tého řádku :

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Vztah pro rozvoj determinantu podle j-tého sloupce:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Pomocí uvedených vztahů počítáme především determinanty řádu $n > 3$, protože pro výpočet determinantů řádu $n = 3$ používáme Sarrusovo pravidlo. V následujícím příkladě vypočteme determinant rozvojem.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 13

Vypočítejte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ rozvojem podle třetího řádku.

Řešení.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 + 12 + 0 = 6.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 14

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} e^x & 1 \\ 1 & e^{-x} \end{vmatrix}$.

Řešení.

$$\begin{vmatrix} e^x & 1 \\ 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} - 1 = e^0 - 1 = 0.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 15

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Řešení.

Řešíme Sarrusovým pravidlem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$
$$= 2.(-2).(-1) + 1.5.1 + 3.2.2 - [3.(-2).1 + 2.5.2 + 1.2.(-1)] = 9.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 16

Určete parametr $k \in \boldsymbol{R}$ tak, aby:

a. matice A byla regulární, **b.** matice B byla singulární.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2-k \\ 3+k & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení.

a. Matice A je regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Řešíme proto následující rovnici, kde determinant vypočteme Sarrusovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 3.$$

Matice A je regulární pro $k \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

b. Matice B je singulární $\Leftrightarrow$ $\det B = 0$. Řešíme rovnici:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2-k \\ 3+k & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-4)(k+5) = 0.$$

Matice B je singulární pro $k \in \{-5, 4\}$.

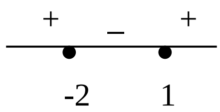
ŘEŠENÁ ÚLOHA 17

Řešte nerovnici: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3+x \end{vmatrix} \geq 0.$

Řešení.

Sarrusovým pravidle vypočteme daný determinant:

$$\begin{aligned} (2-x)(3+x)+1+1-[(2-x)+1+(3+x)] &\geq 0 \\ -x^2 - x + 2 &\geq 0 \\ x^2 + x - 2 &\leq 0 \\ (x+2)(x-1) &\leq 0 \end{aligned}$$



Řešení nerovnice je $x \in \langle -2, 1 \rangle$.

1.6.2 CRAMEROVO PRAVIDLO

Pomocí Cramerova pravidla můžeme řešit soustavu lineárních rovnic, je-li matice soustavy regulární. Pro numerické výpočty není Cramerovo pravidlo výhodné, protože výpočet determinantů je pracný. Výhodou Cramerova pravidla je explicitní vyjádření řešení, což v mnoha úvahách v matematice i v aplikacích je důležité.

Nechť je dána soustava n rovnic o n neznámých

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered}$$

Nechť matice A této soustavy je regulární (tj. $\det A \neq 0$). Potom soustava má právě jedno řešení a platí:

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

kde B_i je matice, která vznikne z matice A tak, že i-tý sloupec matice A nahradíme aritmetickým vektorem pravých stran soustavy a ostatní sloupce ponecháme beze změny. Tento postup ilustrují následující příklady.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 18

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{gathered} 2x - 3y = 5 \\ -x + 2y = -3. \end{gathered}$$

Řešení.

Nejprve vypočteme příslušné determinanty a pak jejich hodnoty dosadíme do příslušných vztahů.

$$det\ A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

$$detB_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1, \quad detB_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1.$$

Na základě Cramerova pravidla dostáváme:

$$x = \frac{detB_x}{det\ A} = \frac{1}{1} = 1, \qquad y = \frac{detB_y}{det\ A} = \frac{-1}{1} = -1.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 19

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 7 \\ 2x - 3y + 5z &= 17 \\ 3x - 2y - z &= 12. \end{aligned}$$

Řešení.

Vypočteme příslušné determinanty:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6, \qquad det B_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -12, \qquad det B_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 6.$$

Daná soustava má právě jedno řešení:

$$x = \frac{det B_x}{det\, A} = \frac{18}{6} = 3, \qquad y = \frac{det B_y}{det\, A} = \frac{-12}{6} = -2, \qquad z = \frac{det B_z}{det\, A} = \frac{6}{6} = 1.$$

1.7 Maticový počet v ekonomické problematice

Tato část je věnována aplikaci maticového počtu v ekonomii, konkrétně jde o úlohy: aplikace skalárního násobku dané produkční matice k výpočtu nové produkční matice, dojde-li k cenové změně vstupů, dále aplikace součinu dvou produkčních matic definujících výrobu složenou ze dvou navazujících výrob k výpočtu spotřeby surovin, a poslední příklad je věnován výpočtu minimální produkce nutné k zaručení návratnosti investičních nákladů.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 20

Stavební firma vyrábí tři druhy výroků V_1, V_2, V_3, na jejichž výrobu používá suroviny S_1, S_2. Spotřeba s_1, s_2 (v Kč) těchto suroviny na jeden kus výrobku je dána produkční maticí

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \end{array}$$

a. Interpretujte první sloupec matice A.

b. Zjistěte produkční matici A_1, vzrostou-li ceny surovin o 10%.

c. Určete produkční matici A_2, která udává spotřebu surovin na 20 kusů výrobků V_1, V_2, V_3 po zvýšení cen.

d. Maticovou rovností zapište vztah mezi maticemi A_2 a A.

Řešení.

a. Na výrobu 1 kusu výrobku V_1 se spotřebují suroviny S_1, S_2 v hodnotách $s_1 = 2K\check{c}$, $s_2 = 6K\check{c}$.

b. $A_1 = 1{,}1 \cdot A = 1{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2 & 4{,}4 & 6{,}6 \\ 6{,}6 & 7{,}7 & 11 \end{pmatrix}$.

c. $A_2 = 20 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 44 & 88 & 132 \\ 132 & 154 & 22 \end{pmatrix}$.

d. $A_2 = 20 \cdot A_1 = 20 \cdot 1{,}1 \cdot A = 22 \cdot A$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 21

Spotřeba polotovarů P_1 a P_2 (v kg) na výrobu výrobků V_1, V_2, V_3 je dána produkční maticí

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \end{array}$$

a spotřeba surovin S_1, S_2, S_3 (v kg) na výrobu těchto polotovarů je dána produkční maticí

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}. \\ \begin{matrix} P_1 & P_2 \end{matrix} \end{array}$$

Vypočítejte spotřebu surovin S_1, S_2, S_3 na výrobu 20 ks výrobku V_1, 30ks výrobku V_2 a 40ks výrobku V_3. Najděte produkční matici mezi výrobou a spotřebou surovin.

Řešení.

Matice A_1 popisuje zobrazení mezi spotřebovanými vstupy (polotovary P a konečnými výstupy V), matice A_2 popisuje zobrazení mezi maticí spotřeby S a maticí výroby P.

Vstupně-výstupní vztah dvou navazujících výrob definovaný součinem dvou produkčních matic:

$$S \quad (A_2) \quad P \quad (A_1) \quad V.$$

Spotřeba polotovarů $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ na výrobu určenou maticí $V = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ je dána součinem

$$P = A_1 \cdot V = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 470 \end{pmatrix}.$$

Spotřeba surovin S na výrobu polotovarů P je dána součinem

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = A_2 \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 280 \\ 470 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1970 \\ 3280 \\ 1690 \end{pmatrix},$$

nebo součinem

$$S = A_2 \cdot P = A_2 \cdot (A_1 \cdot V) = (A_2 \cdot A_1) \cdot V = \begin{pmatrix} 16 & 23 & 24 \\ 26 & 40 & 39 \\ 14 & 19 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1970 \\ 3280 \\ 1690 \end{pmatrix}.$$

Na výrobu 20 ks výrobku V_1, 30ks výrobku V_2 a 40ks výrobku V_3 je potřeba 1970 kg suroviny S_1, 3280 kg suroviny S_2 a 1690 kg suroviny S_3. Produkční matice mezi výrobou a spotřebou surovin je rovna součinu surovin $A_2 \cdot A_1$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 22

Firma Ploty Morava investovala 1 400 000 Kč do nových technologií, určených pro výrobu dvou komponentů na výrobu plotu. K výrobě výrobku V_1 nakupuje polotovar P_1 a k výrobě výrobku V_2 polotovar P_2 od společnosti Petronela, která investovala 25 000 Kč do technologií pro výrobu polotovarů. Z dodávky polotovaru P_1 pro výrobu jednoho výrobku V_1 má společnost Petronela čistý zisk 3 Kč, z dodávky polotovaru P_2 pro výrobu jednoho výrobku V_2 má společnost Petronela čistý zisk 4 Kč. Firma Ploty Morava má z prodeje jednoho výrobku V_1 čistý zisk 250 Kč a z prodeje jednoho výrobku V_2 čistý zisk 450 Kč. Při jaké minimální produkci se firmě Ploty Morava a společnosti Petronela současně vrátí vložené investice?

Řešení.

Zisk firmy Ploty Morava a společnosti Petronela z jednoho výrobku V_1 resp. V_2 lze popsat maticí

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 250 & 450 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V \\ P \end{array} \\ \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array} & \end{array}.$$

Matice

$$B = \begin{pmatrix} 1\,400\,000 \\ 25\,000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} V \\ P \end{array}$$

udává svými prvky ložené investice firmou Ploty Morava a společnosti Petronela a nechť neznámá matice

$$X = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \end{array}$$

určuje prvkem x_1 počet výroků V_1 a prvkem x_2 počet výrobků V_2, jejich prodej zabezpečí současný návrat investice. Matici X dostaneme řešením maticové rovnice

$$A \cdot X = B.$$

Protože determinant matice A je roven – 350 (je nenulový), má daná rovnice jediné řešení ve tvaru

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-350} \begin{pmatrix} 4 & -450 \\ -3 & 250 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,400\,000 \\ 25\,000 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 16\,143 \\ 5\,857 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \end{array}.$$

Minimální produkce pokrývající současné investiční náklady představuje 16 143 výrobků V_1 a 5 857 výrobků V_2,

SAMOSTATNÉ ÚKOLY

1.1 Řešte příklady k maticovému počtu.

1) Jsou dány matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete matice:

a. $3A$, **b.** $A + B$, **c.** $A - C$, **d.** $2C - 5A$.

2) Jsou dány matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určete matice:

a. $A - 2B$ **b.** $3A - C$ **c.** $A + B + C$

3) Najděte matici D třetího řádu tak, aby platilo $A + B + C + D = 0$. Matice A, B, C jsou matice z příkladu 2.

4) Vypočtěte součiny AB a BA, kde A a B jsou následující matice:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5) Zjistěte, pro která $x, y \in R$ platí:

a. $\begin{pmatrix} 3x + 2y & 5 \\ -1 & 4x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + 11 & 5 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -2y & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y - 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & y + 8 \end{pmatrix}$.

6) Určete $x, y \in R$ tak, aby matice B byla transponovanou maticí k matici A :

a. $A = \begin{pmatrix} 2x + y & 3 \\ 2y & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & x - 3y \\ 2y & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$.

7) Určete hodnost matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8) Určete inverzní matici A^{-1} k matici A:

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, **b.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, **c.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

9) Řešte maticové rovnice:

a. $X \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, **b.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1.2 Vypočtěte úlohy k procvičení výpočtu determinantů.

1) Vypočtěte determinanty druhého řádu.

a. $\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, **c.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\sqrt{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$, **d.** $\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -6 & 16 \end{vmatrix}$.

2) Vypočtěte Sarussovým pravidlem determinanty třetího řádu.

a. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 14 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, **c.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, **d.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

3) Řešte následující rovnice a nerovnice.

a. $\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & 1-x \end{vmatrix} \geq 0$, **b.** $\begin{vmatrix} a+x & x \\ -x & x-a \end{vmatrix} = a^2$,

c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3+x \end{vmatrix} > 0$, **d.** $\begin{vmatrix} x & 3 & 2x \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} < 0$,

e. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & x+2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} > 0$, **f.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$.

4) Upravte a vypočtěte determinanty.

a. $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & a^2 \\ 2 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

5) Pro která $a \in R$ je determinant *D* roven nule?

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -a^2 \\ 2 & \frac{a}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

6) Pro která $a \in R$je determinant *D* záporný?

$$D = \begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

7) Určete parametry v daných maticích tak, aby matice *A, C* byly singulární a matice *B, D* byly regulární. Matice jsou:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4+a \\ a+1 & 5-a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3+b & 6 \\ 6-b & b \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & c & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ d^2 & 2d & 1\\ 2d & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

8) Cramerovým pravidlem řešte soustavy lineárních rovnic:

a. $4x+y-z=\ 2$
$-y+z=-10$
$2x+3y-2z=24,$

b. $-2x+2y-z=-3$
$y+3z=-4$
$4x-y+2z=3,$

c. $-2x+y+3z=1$
$3x+2y+3z=-2$
$-x+3y-z=8.$

ODPOVĚDI

Řešení příkladů (MATICE)

1) **a.** $\begin{pmatrix}3 & 9\\ 6 & 15\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -1\\ 6 & -1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 9\\ -8 & 7\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}-7 & -13\\ -2 & -13\\ -9 & -4\end{pmatrix}$

2) **a.** $\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ -3 & 4 & -5\\ -14 & 13 & -1\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}3 & -3 & 4\\ 6 & 11 & 15\\ 0 & 5 & -7\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 9 & 5 & 10\\ 7 & -7 & 3\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}-1 & -1 & -5\\ -9 & -5 & -10\\ -7 & 7 & -3\end{pmatrix}$

4) **a.** $AB=\begin{pmatrix}18 & 16\\ 14 & 28\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}7 & 1\\ -7 & 39\end{pmatrix}$

b. $AB=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 8 & 4 & -7\\ -1 & 8 & -3\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}5 & 3 & -12\\ 4 & -2 & 1\\ 7 & -4 & -4\end{pmatrix}$

c. AB nedefinováno, $BA=\begin{pmatrix}9 & 19\\ 2 & 6\\ 10 & 20\end{pmatrix}$

5) **a.** $x=1,\ y=2$ **b.** $x=2,\ y=3$

6) **a.** $x=1, y=-2$ **b.** $x=3, y=-2$

7) $h(B)=2$

8) **a.** $A^{-1}=\frac{1}{41}\begin{pmatrix}2 & -7\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ **b.** $A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 4\end{pmatrix}$ **c.** $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 4 & 4\\ -7 & 4 & 5\\ -6 & 4 & 6\end{pmatrix}$

9) **a.** $X = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$ **b.** $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

Řešení příkladů (DETERMINANTY)

1) **a.** 28 **b.** –7 **c.** 2 **d.** 0

2) **a.** – 43 **b.** 0 **c.** 16 **d.** 40

3) **a.** $x \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$ **b.** $x = \pm a$ **c.** $x \in (-2,1)$ **d.** $x \in (3, \infty)$
e. $x \in (-4, \infty)$ **f.** $x \in \{-1,3\}$

4) **a.** $a^4 - 2a^3$ **b.** 10

5) $a \in \{-2,0,2\}$

6) $a \in (2,\ 17)$

7) $a \in \{-13,\ 2\}$, $b \in R - \{-12,3\}$, $c = 0$, $d \in R - \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$

8) **a.** $(-2,8,-2)$ **b.** $(1,-1,-1)$ **c.** $(-1,2,-1)$

SHRNUTÍ KAPITOLY

Matice a matematické operace s nimi mají v ekonomii široké uplatnění. Používány jsou v oblasti ekonomického modelování, kde se používají k reprezentaci ekonomických modelů a systémů (model input-output využívá matice vstupů a výstupů pro analýzu interakcí mezi různými odvětvími ekonomiky), dále v oblasti lineárního programování (optimalizace omezených zdrojů), ve finanční analýze (analýza portfolia investic, hodnocení rizika, modelování výnosů a cen finančních aktiv), v oblasti ekonometrie, teorie her (matice reprezentují strategie hráčů a výplatních tabulek), a ve faktorové analýze při identifikaci a interpretaci skrytých faktorů ovlivňujících různé ekonomické proměnné.

Tato kapitola byla věnována základům lineární algebry. Konkrétně maticovému počtu a determinantu matice. V této kapitole jste se naučili základní operace s maticemi jako je sčítání matic, násobení matice reálným číslem, násobení matice maticí. Byl zde také zaveden pojem transponovaná a inverzní matice. Pomocí inverzní matice se počítají maticové rovnice a dá se tím také definovat regularita matice. V této kapitola byla regularita matice definována pomocí determinantu matice. V závěru kapitoly bylo představeno Cramerovo pravidlo, pomocí kterého se dají řešit určité typy soustav lineárních rovnic.

2 POSPOUPNOST A LIMITA POSLOUPNOSTI

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

V této kapitole se budeme zabývat posloupnostmi. Jedná se o speciální případ funkcí, jejichž definičním oborem je množina přirozených čísel. Jsou zde uvedeny vlastnosti posloupností, jako je monotonie a omezenost. Dále se tato kapitola věnuje pojmu limita posloupnosti a hlavně výpočtu limity posloupnosti. V ekonomických aplikacích se vyskytují zejména dvě posloupnosti, a to posloupnost aritmetická a geometrická. Tyto posloupnosti jsou známy již ze střední školy.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- definovat pojmy posloupnost a limita posloupnosti,
- vypsat prvky posloupnosti,
- sestrojit graf posloupnosti,
- vypočítat limitu posloupnosti.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Posloupnost, limita posloupnosti, monotónnost posloupnosti, omezenost posloupnosti, graf posloupnosti.

2.1 Posloupnost

DEFINICE 1

Df

Nekonečnou číselnou posloupností prvků číselné množiny je funkce, která každému přirozenému číslu *n* přiřazuje reálné číslo.

Jelikož je to funkce, má funkční předpis, definiční obor (je to množina přirozených čísel *N*), obor funkčních hodnot (je to množina reálných čísel), graf (je to množina izolovaných bodů v rovině).

V matematice se setkáváme také s posloupnostmi, jejichž prvky nejsou čísla, např. s posloupnostmi bodů, úseček, funkcí a podobně. V této kapitole se budeme zabývat pouze číselnými posloupnostmi, a proto přívlastek číselná u posloupnosti vynecháme.

Posloupnost můžeme zapsat například tak, že postupně za sebou píšeme prvky $a_1, a_2, a_3, \ldots$, které tato funkce přiřazuje číslům 1, 2, 3 ..., nebo použitím zápisu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme používat jednoduššího zápisu $\{a_n\}$. Posloupnost může být zadána vzorce, rekurentním vztahem nebo graficky.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Napište první čtyři členy a a_{n+1} člen posloupnosti $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
n = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = -1,\\
n = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2},\\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3},\\
n = 4 \quad &\Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{4},\\
n = n + 1 \quad &\Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}
$$

DEFINICE 2

Df

Aritmetická posloupnost přiřazuje číslu *n* hodnotu a_n lineární funkcí. Rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní, nazývá se **diference** aritmetické posloupnosti a značíme ho d. Platí: $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Součet prvních *n* členů je dán vzorcem: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Je to **součet konečné** aritmetické posloupnosti.

Součet nekonečné aritmetické posloupnosti je vždy roven ∞, resp. $-\infty$, v závislosti na znaménku diference $d \neq 0$. Pro $d = 0$ v závislosti na znaménku a_1.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 1000.

Řešení.

Čísla 1, 2, 3, ..., 1000 tvoří konečnou aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 1$, prvním členem $a_1 = 1$, počet členů této posloupnosti je $n = 1000$.

Součet prvních 1000 členů je $s_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500500$.

DEFINICE 3

Geometrická posloupnost přiřazuje číslu n hodnotu a_n exponenciální funkcí. U geometrické posloupnosti je konstantní poměr mezi libovolným členem a_n $(n \geq 2)$ a předcházejícím členem a_{n-1}. Tuto konstantu značíme q, číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti. Platí: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Jestliže kvocient $q \neq 1$, potom pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Jedná se o **součet konečné** geometrické posloupnosti.

Jestliže $|q| < 1$, lze **sečíst i nekonečnou** geometrickou posloupnost.
Pro součet s platí: $s = \frac{a_1}{1-q}$.

2.2 Limita posloupnosti

V ekonomii je limita posloupnosti často využívána při analýze chování trhů, dynamiky cen, růstu ekonomiky a při hodnocení dlouhodobých trendů. V ekonomických modelech růstu limita posloupnosti přestavuje dlouhodobý trend růstu produkce, příjmů nebo produktivity práce. Jsou zde analyzovány limity růstu ekonomiky a možnosti dosažení stabilního stavu (např. Harrod-Domarův model). Při analýze dynamiky cen lze limitu posloupnosti použít k určení chování cenových indexů, inflace a deflace v ekonomice. V oblasti chování trhů limita posloupnosti představuje hranici, na které se poptávka a nabídka ustálí v dlouhodobém horizontu.

Výše uvedené oblasti ukazují, že limita posloupnosti hraje důležitou roli v ekonomické analýze a pomáhá ekonomům a analytikům porozumět dlouhodobým trendům a chování ekonomik v dlouhodobém horizontu.

DEFINICE 4 – VLASTNÍ LIMITA NEKONEČNÉ POSLOUPNOSTI

Df

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu A, když k libovolnému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro každé přirozené $n > n_0$ je splněna nerovnost

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, užíváme při tom zkratky latinského slova *limes*.

Když je limita nekonečné posloupnosti vlastní, pak říkáme, že posloupnost je **konvergentní**.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Na základě definice vlastní limity posloupnosti dokažte, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$.

Řešení.

K libovolnému $\varepsilon > 0$ musíme určit číslo n_0 tak, aby pro každé $n > n_0$ platila nerovnost

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon.$$

Provedeme následující úpravy:

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2} < \varepsilon.$$

Číslo n_0 určíme jako nejmenší přirozené číslo, pro které platí

$$\frac{2}{n+2} < \varepsilon \quad \text{neboli} \quad n \geq \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

Pro $\varepsilon = 0{,}01$ je hledané číslo $n_0 = 18$, pro $\varepsilon = 0{,}0001$ je $n_0 = \frac{2}{0{,}0001} - 2 = 19999$ atd.

DEFINICE 5 – NEVLASTNÍ LIMITA NEKONEČNÉ POSLOUPNOSTI

Df

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ („plus“ nekonečno, označuje se také $+\infty$), když k libovolnému reálnému číslu $M > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro každé přirozené $n > n_0$ je splněna nerovnost $a_n > M$.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (mínus nekonečno), když k libovolnému reálnému číslu $M > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro každé přirozené číslo $n > n_0$ je splněná nerovnost $a_n < -M$.

Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Pokud je limita nekonečné posloupnosti nevlastní nebo limita neexistuje, pak říkáme, že posloupnost je **divergentní**.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Na základě definice nevlastní limity posloupnosti dokažte, že platí $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Řešení.

K libovolnému reálnému číslu M musíme určit $n_0 \in N$ tak, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí nerovnost $n^2 > M$. Z této nerovnosti určíme číslo n_0.
Dostáváme $n > \sqrt{M}$; $n_0$stanovíme jako nejmenší přirozené číslo, pro které platí $n_0 > M$.
Např. Pro $M = 10^2$ hledané číslo n_0 je $n_0 = \sqrt{10^2} = 10$.

DEFINICE 6

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá **ohraničená** (též omezená), je-li ohraničená shora i zdola. **Shora** je ohraničená tehdy, když existuje číslo k takové, že pro každé n platí $a_n \leq k$. **Zdola** je ohraničená tehdy, když existuje číslo m takové, že pro každé přirozené n platí $a_n \geq m$.

DEFINICE 7

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, resp. rostoucí, jestliže

$a_m \leq a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$, resp. $a_m < a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$.

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, resp. klesající, jestliže

$a_m \geq a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$, resp. $a_m > a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$.

Jestliže je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ buďto neklesající, rostoucí, nerostoucí nebo klesající, říkáme, že je monotónní.

Pro monotónní posloupnosti platí:

1. Monotónní posloupnost má vždy limitu (vlastní nebo nevlastní).
2. Limita neklesající nebo rostoucí posloupnosti je rovna supremu této posloupnosti, tedy $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = sup\{a_n\,; n \in N\}$.
3. Limita nerostoucí nebo klesající posloupnosti je rovna infimu této posloupnosti, tedy $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = inf\{a_n\,; n \in N\}$.

Výpočet limit posloupností

K výpočtu limit posloupností využijeme znalosti limit jednoduchých základních posloupností, základních vět o limitách a znalosti operací s prvky v R^*, zejména s ∞ a $-\infty$.

Následující soubor 12 pravidel představuje matematické věty, které lze odvodit přímo z definice limity. Pečlivě si je projděte a dobře si je zapamatujte! Budou se vám později hodit k výpočtům příkladů limit.

Pravidla výpočtu vlastních limit

Pro vlastní limity $\underset{n\to\infty}{lim} a_n = a, \underset{n\to\infty}{lim} b_n = b, q > 0, n \in N, k \in R$ platí:

1. $\underset{n\to\infty}{lim}(a_n \pm b_n) = \underset{n\to\infty}{lim} a_n \pm \underset{n\to\infty}{lim} b_n = a \pm b,$
2. $\underset{n\to\infty}{lim}(a_n \cdot b_n) = \underset{n\to\infty}{lim} a_n \cdot \underset{n\to\infty}{lim} b_n = a \cdot b,$
3. $\underset{n\to\infty}{lim}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\underset{n\to\infty}{lim} a_n}{\underset{n\to\infty}{lim} b_n} = \frac{a}{b},\ b \neq 0,$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[l]{a_n} = \sqrt[l]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\ , l \in N$
5. $\underset{n\to\infty}{lim}|a_n| = \left|\underset{n\to\infty}{lim} a_n\right|,$
6. $\underset{n\to\infty}{lim} k a_n = k \underset{n\to\infty}{lim} a_n,\ \underset{n\to\infty}{lim}\sqrt[n]{n} = 1,\ \underset{n\to\infty}{lim}\sqrt[n]{q} = 1,$
7. $\underset{n\to\infty}{lim} q^{a_n} = q^{\underset{n\to\infty}{lim} a_n},$
8. je-li $a_n > 0, c > 0, c \neq 1$, pak $\underset{n\to\infty}{lim}\, log_c\, a_n = log_c \underset{n\to\infty}{lim} a_n$,
10. existuje-li $\underset{n\to\infty}{lim} a_n$ pak $\underset{n\to\infty}{lim} a_n^k = \left(\underset{n\to\infty}{lim} a_n\right)^k$,
11. $\underset{n\to\infty}{lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$

($e \cong 2{,}718$ je Eulerovo číslo, základ přirozených logaritmů),

12. je-li $\underset{n\to\infty}{lim} a_n = \infty,$ resp. $-\infty$, potom $\underset{n\to\infty}{lim}\left(1 + \frac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k.$

Pravidla výpočtu nevlastních limit

Dále se budeme zabývat limitou součtu (součinu a podílu) dvou posloupností, přičemž alespoň jedna nebo obě mají nevlastní limitu.

Uvažujme posloupnosti$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a číslo $a \in R$. Platí tato tvrzení:

1. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \pm\infty$.
Symbolicky lze toto tvrzení zapsat takto: „$a \pm \infty = \pm\infty$“.

2. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
Symbolicky: „$\frac{a}{\pm\infty} = 0$“.

3. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, b_n = \infty$,
pokud $a < 0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, b_n = -\infty$.

Symbolicky: „$a \cdot \infty = \infty$ pro $a > 0$, $a \cdot \infty = -\infty$ pro $a < 0$“.

4. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
Symbolicky: „$\infty \cdot \infty = \infty$“

5. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.
Symbolicky: „$\infty + \infty = \infty$“

6. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$.
Symbolicky: „$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$“

7. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.
Symbolicky: „$-\infty - \infty = -\infty$“

8. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
Symbolicky: „$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$“

Neurčité výrazy

Celkem rozeznáváme neurčité výrazy typů $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$, 0^0, $(\pm\infty)^0, 1^{\pm\infty}$.

Jestliže při výpočtu limit po dosazení limitní meze zjistíme, že limita je neurčitý výraz musíme tento výraz vhodným matematickým obratem (dělením nebo rozšířením) převést na „určitý“ výraz, tj. výraz, jehož limitu známe.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+5}{3+7n-6n^2}$.

Řešení.

Limita je neurčitý výraz $\frac{\infty}{-\infty}$. Neboť $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2-3n+5)=\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}(3+7n-6n^2)=-\infty$. Výraz pro *n*-tý člen posloupnosti upravíme tak, že čitatele i jmenovatele dělíme největší mocninou *n*.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+\frac{7n}{n^2}-\frac{6n^2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}6}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}.$$

Uvědomte si, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}=0.$

Uvedeným způsobem můžeme postupovat vždy v případě výpočtu limity posloupnosti, jejíž *n*-tý člen má tvar racionálního lomeného výrazu obsahujícího proměnnou *n*, tj. v čitateli i ve jmenovateli se nacházejí mnohočleny. Následující věta nám dává návod na velmi rychlé a elegantní řešení.

K ZAPAMATOVÁNÍ

Jestliže $a_n=\frac{P_m(n)}{Q_r(n)}$, kde *m* je stupeň mnohočlenu v čitateli, *r* je stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, potom:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_m(n)}{Q_r(n)}=\begin{cases}\infty & \text{pro } m>r\\ 0 & \text{pro } m<r\\ \text{podíl koeficientů} & \\ \text{při nejvyšších} & \text{pro } m=r\\ \text{mocninách } n & \end{cases}$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Vypočtěte

a. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+2}{n^5+4n^3-2n^2}$,

b. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{n-3}$,

c. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-6n^2+4n-8}{5n^3+7n^2-2n+2}$.

Řešení.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_3(n)}{Q_5(n)}=0$, protože stupeň mnohočlenu v čitateli je menší než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, to znamená st $P_3(n)<$ st $Q_5(n)$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_2(n)}{Q_1(n)}=\infty$, protože stupeň mnohočlenu v čitateli je větší než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, to znamená st $P_2(n)>$ st $Q_1(n)$.

c. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_3(n)}{Q_3(n)} = \frac{2}{5}$, st $P_3(n) =$ st $Q_3(n)$, koeficient u n^3 v čitateli je 2, ve jmenovateli je 5.

Limity algebraických výrazů závisejí na členu, který nejrychleji roste pro rostoucí n a na operaci s tímto členem prováděné. Pamatujte si, že ze známých funkcí nejpomaleji roste funkce logaritmus $\log n$ (argument je n), potom následuje mocnina $n^a, (a > 0)$, rychleji roste exponenciální funkce $a^n, (a > 1)$, ještě rychlejší je faktoriál $n!$ a nejrychlejší je n^n. Seřazeny vzestupně podle rychlosti růstu (od nejmenšího k největšímu) mohou být takto:

$$\log n, \dots, \sqrt[4]{n}, \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n^2, n^3, n^4, \dots, 2^n, 3^n, 4^n, \dots, (n-1)!, n!, (n+1)!, \dots, n^n.$$

V následujících příkladech vysvětlíme výpočet limit posloupností, ve kterých a_n je iracionálním výrazem a zároveň se jedna o limitní typ „$\infty - \infty$“ Výraz určující a_n vhodně rozšíříme. Použijeme identity známé z algebry: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. To znamená místo výrazu $a - b$ napíšeme výraz $\frac{a^2-b^2}{a+b}$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n-7} - 2n\right)$

Řešení.

Jedná se o limitní typ „$\infty - \infty$“ neboť $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+5n-7} = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n) = -\infty$.

Limitní výraz vhodně rozšíříme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n-7} - 2n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+5n-7} - 2n\right)\left(\sqrt{4n^2+5n-7} + 2n\right)}{\sqrt{4n^2+5n-7} + 2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{\sqrt{4n^2+5n-7} + 2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2}}+2} = \frac{5}{4}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 8

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}-7-7^{n-1}}{9^n}$.

Řešení.

Poznamenejme, že $3^{2n+1} = 3^{2n}\cdot 3^1 = (3^2)^n \cdot 3 = 9^n \cdot 3$.
Limitní výraz nejdříve upravíme tak, aby obsahoval stejné exponenty:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 9^n - 7 - \frac{1}{7}\cdot 7^n}{9^n}.$$

Čitatele i jmenovatele dělíme exponenciálním výrazem s největším základem. V našem případě je to 9^n a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{7}{9^n} - \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^n}{\left(\frac{9}{9}\right)^n} = 3.$$

Místo dělení exponenciálním výrazem s největším základem můžeme samozřejmě tento výraz vytknout z čitatele i jmenovatele a zkrátit.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^{2n-2} - 10}{5\cdot 4^{n-1} + 3^n}$.

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^{2n-2} - 10}{5\cdot 4^{n-1} + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 0{,}25\cdot 4^n - 10}{5\cdot 0{,}25\cdot 4^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(0{,}75 - \frac{10}{4^n}\right)}{4^n\left(1{,}25 - \frac{3^n}{4^n}\right)} = \frac{3}{5}.$$

2.3 Limitní proces ve finanční matematice

V poslední části kapitoly o posloupnostech si ukážeme aplikaci limitního procesu a využití definice Eulerova čísla jako limity na odvození vzorce pro spojité úročení jako limity složeného úročení.

Naším úkolem tedy je, abychom odvodili vzorec pro spojité úročení, které je využíváno v teoretických finančních modelech, víte-li, že je limitním případem složeného úročení. Složené úročení je při zanedbání srážkové daně z úroků popsáno vztahem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n,$$

kde K_n, resp. K_0, je splatná částka, resp. jistina, i představuje sazbu p. a., m je frekvence úročení, n je doba uložení kapitálu v letech.

Vypočítejme limitu složeného úročení pro $m \to \infty$. Za n let se úroky připíší $m \cdot n$ krát, tedy limitní proces

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{i\cdot n} = K_0 \cdot \lim_{\frac{m}{i}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{i\cdot n},$$

vede na vzorec popisující spojité úročení

$$K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n},$$

přičemž byl použit vztah $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Spojité úročení je pro vkladatele výhodnější než složené úročení.

SAMOSTATNÉ ÚKOLY

1) Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{6-5n}$ **b)** $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{3n^2-8}$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-4)^2}{(3n-1)(4n+2)}$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3+\sqrt{n}\right)^2}{n+7}$ **f)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{n+4}$

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$ **h)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+5n}}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$

i) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ **j)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$

k) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ **l)** $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)$

m) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}\right)$ **n)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)$

o) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}+1}$ **p)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{2n+2}-8}{5\cdot 4^{n-1}+1}$

q) $\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$ **r)** $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$

s) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}-4^{2n}+2^{n-1}}{5^{n+1}-16^{n+\frac{1}{2}}}$ **t)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}-7^{n-1}+2^{2n}}{5-9^n+2^n}$

ODPOVĚDI

1) a) $-0{,}8$	**b)** $\frac{1}{3}$	**c)** $\frac{1}{3}$	**d)** 0	**e)** 1
f) ∞	**g)** $\sqrt{2}-2$	**h)** $\sqrt{3}$	**i)** -1	**j)** $\frac{4}{7}$
k) 0	**l)** $-2{,}5$	**m)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$	**n)** $\frac{1}{2}$	**o)** $\frac{1}{4}$
p) $\frac{48}{5}$	**q)** $\frac{5}{4}$	**r)** -1	**s)** $\frac{1}{4}$	**t)** -1

SHRNUTÍ KAPITOLY

V této kapitole jste se seznámili s posloupnostmi. Jedná se o speciální případ funkcí, jejichž definičním oborem je množina přirozených čísel. Byly zde uvedeny vlastnosti posloupností, jako je monotonie a omezenost. Dále se tato kapitola věnovala pojmu limita posloupnosti a hlavně výpočtu limity posloupnosti. Důraz je kladen na výpočet limity racionálně lomené funkce.

Limita posloupnosti hraje důležitou roli jak v ekonomické analýze, tak i ve finanční matematice, kde mají široké uplatnění a jsou důležitým nástrojem pro analýzu a rozhodování v oblasti investic, správy portfolia, a řízení rizika.

3 FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ A JEJÍ LIMITA

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Funkce je základním objektem, který je zkoumán diferenciálním počtem. Obecně pod pojmem funkce chápeme jistý způsob přiřazení mezi dvěma množinami reálných čísel, které musí splňovat jisté předpoklady. S takovým přiřazením se setkáváme na každém kroku. Z ekonomické praxe můžeme uvést např. závislost množství vyrobeného zboží na počtu zaměstnanců, vstupních investicích či poptávce po tomto zboží. Druhá část kapitoly se pak věnuje limitě funkce a jejímu výpočtu.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- definovat pojem funkce jedné reálné proměnné,
- uvést vlastnosti funkce,
- načrtnout grafy elementárních funkcí,
- vypočítat definiční obor funkce,
- vypočítat limitu funkce.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 120 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkce, definiční obor funkce, obor hodnot funkce, monotónnost funkce, omezenost funkce, sudá a lichá funkce, graf funkce, limita funkce.

3.1 Funkce jedné reálné proměnné

DEFINICE 1

Df

Nechť $D(f)$ a $H(f)$ jsou dvě podmnožiny reálných čísel, tj. $D(f) \subseteq R$, $H(f) \subseteq R$ a nechť $x \in D(f)$, $y \in H(f)$. Předpis $y = f(x)$ se nazývá funkcí, jestliže ke každému $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$.

Proměnná x se obvykle nazývá **nezávisle proměnná** nebo **argument**, kdežto proměnná y se nazývá **závisle proměnná**.

Množina $D(f)$ se nazývá **definiční obor** funkce f, množina $H(f)$ se nazývá **obor hodnot** (obor funkčních hodnot) funkce f.

Kromě uvedeného označení funkce se často používá také označení:

$$f : D(f) \to H(f),$$
$$f : y = f(x),$$
$$f : x \mapsto y.$$

Funkce $y = f(x)$ je definována (určena), když je dán její definiční obor $D(f)$ a pravidlo, dle kterého je ke každému číslu $x \in D(f)$ přiřazena **právě jedna funkční hodnota** $f(x)$. Toto pravidlo může být vyjádřeno následujícími způsoby: analyticky (explicitní nebo implicitní rovnicí, tabulkou nebo grafem.

3.1.1 Vlastnosti funkcí

DEFINICE 2

Df

Funkce $y = f(x)$ se nazývá na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená shora**, existuje-li taková konstanta h, zvaná **horní závora** funkce f na oboru M, že pro všechna $x \in M$ platí:
$f(x) \leq h$.

Funkce $y = f(x)$ se nazývá na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená zdola**, existuje-li taková konstanta d, konstantní pro všechna $x \in M$, zvaná **dolní závora** funkce f na oboru M, že pro všechna $x \in M$ platí: $f(x) \geq d$.

Funkce $y = f(x)$ je na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená**, právě když je současně ohraničená zdola i shora. Právě tehdy existuje taková konstanta $K \geq 0$, že pro všechna $x \in M$ platí $|f(x)| \leq K$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Rozhodněte, zda je kvadratická funkce $f(x) = x^2 + 5$ ohraničená v celém svém $D(f)$.

Řešení.

Protože $x^2 \geq 0$, je $f(x) \geq 5$ pro všechna $x \in R$. Funkce $f(x)$ je zdola ohraničená. Grafem uvažované funkce $f(x) = x^2 + 5$ je parabola, která má větve směrem nahoru, proto funkce není shora ohraničená.

Na základě uvedeného můžeme již konstatovat, že $f(x)$ není ohraničená na množině R.

DEFINICE 3

Funkce $f(x)$ je **sudá**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = f(x)$.

Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy *y*.

Funkce je **lichá**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = -f(x)$.

Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku souřadnicového systému.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Sudé jsou například funkce:

$f(x) = |x|$, neboť $|-x| = |x|$,
$f(x) = x^{2k}$, neboť $(-x)^{2k} = x^{2k}$, $k \in N$,
$f(x) = \cos x$, neboť $\cos(-x) = \cos x$.

Liché jsou například funkce:

$f(x) = \frac{1}{x}$, kde $x \neq 0$, neboť $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$,
$f(x) = x^{2k+1}$, neboť $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, $k \in N$,
$f(x) = \sin x$, neboť $\sin(-x) = -\sin x$.

DEFINICE 4

Funkce $f(x)$ se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in D(f)$ je též $x \pm p \in D(f)$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$. Číslo p se nazývá **perioda funkce.** Graf periodické funkce se posunutím podél osy x o hodnotu p nezmění. Typickým příkladem periodických funkcí jsou goniometrické funkce.

DEFINICE 5

Df

Monotónní funkce jsou takové funkce, které splňují pro každou dvojici čísel $x_1 < x_2 \quad (x_1, x_2 \in M \subset D(f))$ následující podmínky:

$$\text{jestliže} \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2), \\ f(x_1) > f(x_2), \\ f(x_1) \le f(x_2), \\ f(x_1) \ge f(x_2), \end{array} \right\} \text{pak funkce } f \text{ je v } M \left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí,} \\ \text{klesající,} \\ \text{neklesající,} \\ \text{nerostoucí.} \end{array} \right.$$

Funkce klesající a rostoucí nazýváme **ryze monotónní**.

DEFINICE 6

Df

Funkce $f(x)$ je na $D(f)$ **prostá** (jednoznačná), jestliže ke každým dvěma hodnotám $x_1, x_2 \in D(f)$, kde $x_1 \neq x_2$, přiřazuje hodnoty $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Platí:

1. Jestliže je funkce prostá, pak každá přímka rovnoběžná s osou *x* protne její graf nejvýše v jednom bodě.
2. Každá ryze monotónní funkce je prostá, však ne každá prostá funkce je ryze monotónní.
3. Sudá funkce není nikdy prostá. Lichá funkce může, ale nemusí být prostá.

DEFINICE 7

Df

Nechť $f(x)$ je prostá funkce definovaná na $D(f)$. Obor jejích funkčních hodnot je $H(f)$. Potom funkce, která přiřazuje každému $y \in H(f)$ hodnotu $x \in D(f)$, pro kterou platí $y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkcí** k funkci $f(x)$ a značíme ji $f^{-1}(x)$. Platí $x = f^{-1}(y)$, nebo $x = g(y)$.

Funkce $y = f(x),\ x \in D(f)$ a $x = f^{-1}(y),\ y \in H(f)$ se nazývají **vzájemně inverzní funkce**. Jejich grafy jsou křivky osově souměrné dle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. dle přímky *y* = *x*.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Inverzní funkcí k exponenciální funkci $f(x) = e^x$ (na celém $D(f)$, jelikož exponenciální funkce je prostá) je funkce logaritmická $f^{-1}(x) = ln\,x$. Obor funkčních hodnot exponenciální funkce je množina všech kladných čísel, kterou označujeme R^+, proto definičním oborem logaritmické funkce je také R^+, takže argument logaritmické funkce musí být vždy kladný.

3.1.2 ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

Podle toho, jaké operace vytvářejí funkci $f(x)$ z argumentu x, rozlišujeme dvě hlavní skupiny funkcí: algebraické funkce a transcendentní funkce.

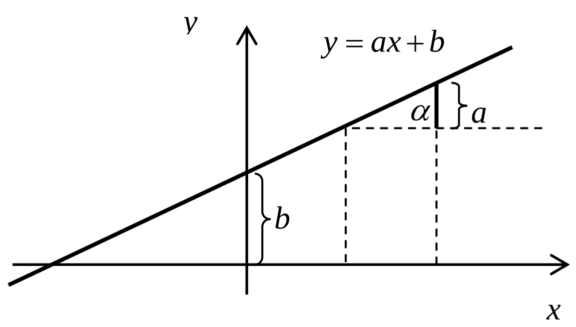
ALGEBRAICKÉ FUNKCE

Algebraickou funkcí rozumíme funkci, kterou lze vytvořit z konstant a z proměnné x konečným počtem algebraických operací (tj. sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a umocňováním racionálním exponentem).
Algebraické funkce dělíme na **racionální** a **iracionální** (např. $y = \sqrt[3]{x^2}$).
Racionální funkce dělíme na **polynomické funkce**, též polynomy neboli mnohočleny (např. $y = 2x^3 - 2x + 8$) a **racionální lomené funkce** (např. $y = \frac{2x+1}{x^2}$), tj. funkce, které vznikají podílem dvou polynomů.

Lineární funkce je funkce ve tvaru:

$$y = ax + b, \;\; a, b \in R, \quad \text{kde } \; D(f) = R.$$

Grafem této funkce je přímka. Jednotlivé koeficienty mají tento význam:
$\boldsymbol{a} = \mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha}$ - směrnice přímky, která je grafem lineární funkce,
b - úsek (vyťatý přímkou) na ose y, viz Obr. 1.



Obrázek 1: Graf lineární funkce $\boldsymbol{y = ax + b}$

Jestliže $a = 0$, potom hovoříme o **funkci konstantní.**

Kvadratická funkce je funkce ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in R, \quad a \neq 0, \quad \text{kde} \quad D(f) = R.$$

Grafem je parabola. Jednotlivé koeficienty mají tento význam:
$a > 0$, pak parabola je konvexní funkce na *R*,
$a < 0$, pak parabola je konkávní funkce na *R*.

Racionální lomená funkce
Racionální lomenou funkcí nazýváme funkcí *R*(*x*), která je podílem dvou polynomických funkcí, tj. má tvar

$$R(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

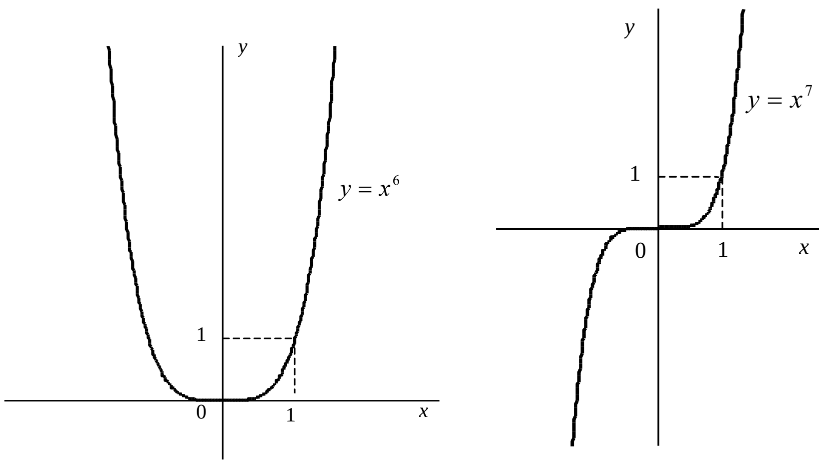
Mocninné funkce
Mocninné (potenční) funkce jsou funkce ve tvaru $y = x^r$, kde $D(f) = (0, +\infty)$, tj: $x > 0$, *r* je libovolné reálné číslo. Pro některé *r* budeme mocninnou funkci definovat i mimo interval $(0, \infty)$.

Jestliže *r* je přirozené číslo, pak máme tyto případy:

a. **Sudá mocninná funkce s kladným exponentem** je funkce ve tvaru

$$y = x^{2n}, \quad n \in N, \text{ kde } \quad D(f) = R.$$

Grafem těchto funkcí je konvexní parabola (2*n*)-tého stupně s vrcholem v počátku souřadnic
Konkávní parabola (2*n*)-tého stupně s vrcholem v počátku souřadnic je grafem funkce $y = -x^{2n}$, kde $n \in N$. Viz. Obr. 2.



Obrázek 2: Graf paraboly šestého a sedmého stupně

b. **Lichá mocninná funkce s kladným exponentem** je funkce ve tvaru

$$y = x^{2n+1}, \quad n \in N, \qquad \text{kde} D(f) = R.$$

Grafem funkce je parabola (2n+1)-ního stupně, která leží v 1. a 3. kvadrantu a jejímž středem souměrnosti je počátek souřadnicového systému.

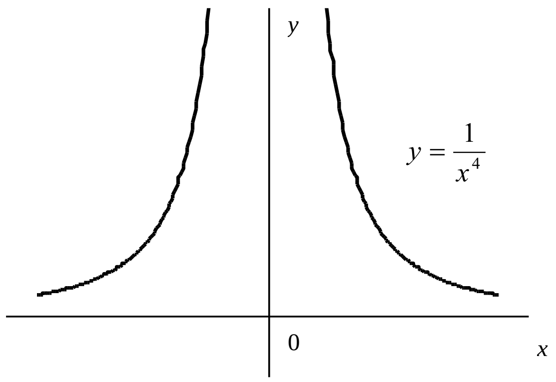
V případě $y = -x^{2n+1}$ je grafem křivka osově souměrná podle osy x ke grafu funkce $y = x^{2n+1}$. Tato parabola (2n+1)-ního stupně leží ve 2. a 4. kvadrantu.

Když $r = -n$, $n \in N$, je $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Nastávají tyto případy:

c. Sudá mocninná funkce se záporným exponentem je funkce ve tvaru

$$y = x^{-2n}, \quad n \in N, \text{ kde } D(f) = R - \{0\}.$$

Funkce $y = \frac{1}{x^{2n}}$ není definována pro $x = 0$!
Grafem funkce je hyperbola (2n)-tého stupně, která leží v 1. a 2. Kvadrantu. V případě funkce $y = -x^{-2n}$ je grafem hyperbola (2n)-tého stupně, která leží ve 3. a 4. kvadrantu.

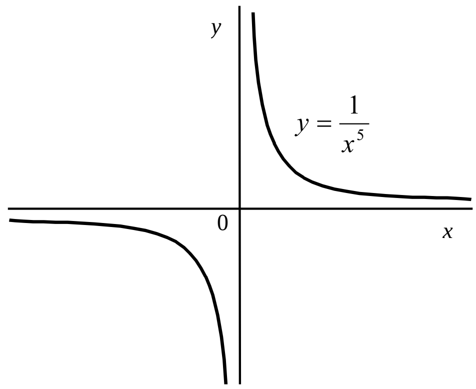


Obrázek 3: Graf hyperboly čtvrtého stupně

d. Lichá mocninná funkce se záporným exponentem je funkce ve tvaru

$$y = x^{-2n-1}, \quad n \in N, \quad \text{kde } D(f) = R - \{0\}.$$

Funkce $y = \frac{1}{x^{2n+1}}$ opět není definována pro $x = 0$!
Grafem funkce je hyperbola (2n+1)-ního stupně, která leží v 1. a 3. kvadrantu. Zvláštním případem je funkce $y = \frac{1}{x}$ (tj. $n = 0$), jejímž grafem je vám dobře známá rovnoosá hyperbola.



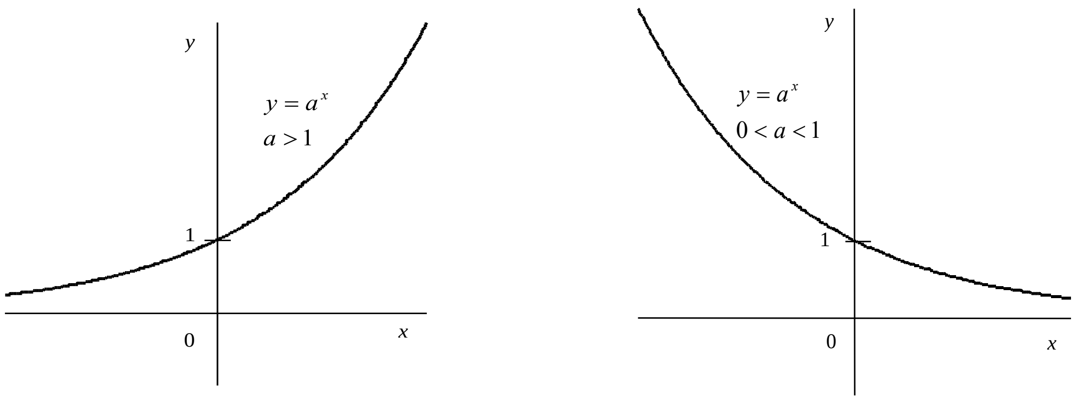
Obrázek 4: Graf hyperboly pátého stupně

TRANSCENDENTNÍ FUNKCE
Připomeňme, že funkce, která není algebraická, se nazývá transcendentní (nealgebraická). Především nás budou zajímat exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce.

Exponenciální funkce má (na rozdíl od mocninné funkce) proměnnou x v exponentu. Je to funkce ve tvaru

$$y = a^x, \quad a > 0, \text{ kde } D(f) = R, \ H(f) = (0, \infty).$$

Pro $a > 1$ je to funkce rostoucí, tzn. ryze monotónní.
Pro $a = 1$ je to funkce konstantní $y = 1^x = 1$.
Pro $0 < a < 1$ je to funkce klesající, tzn. taktéž ryze monotónní. Velmi důležitá je funkce $y = e^x$ se základem $e = 2{,}1782\ldots$, což je tzv. Eulerovo číslo. Toto číslo je iracionální, podobně jako $\pi = 3{,}14159\ldots$, nelze jej vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. Někde se setkáte s názvem exponenciální funkce pouze pro funkci $y = e^x$. Funkci $y = a^x$ se pak říká **obecná mocnina**.

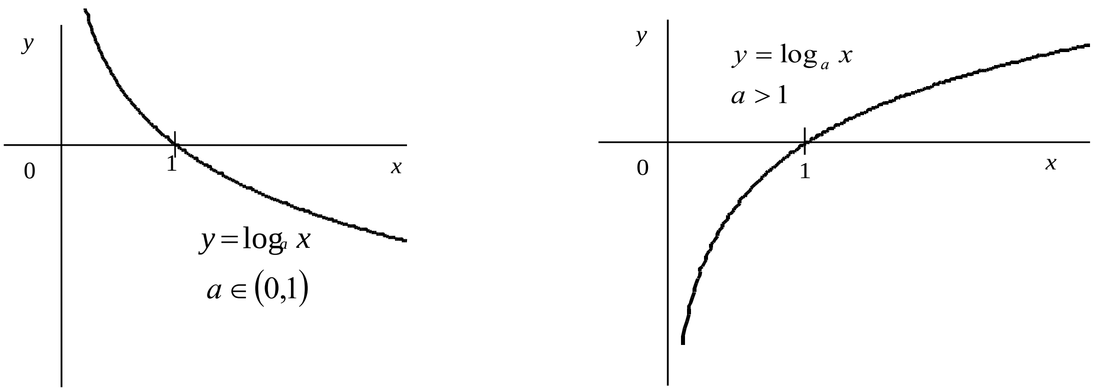


Obrázek 5 a 6: Graf rostoucí a klesající exponenciální funkce

Logaritmická funkce je funkce ve tvaru

$$y = log_a x, \quad a > 0, \ a \neq 1, \text{ kde } D(f) = (0, \infty), \ H(f) = R.$$

Logaritmická funkce je inverzní k exponenciální funkci o tomtéž základu a. Pro $a > 1$ je to funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ je to funkce klesající. Všimněte si, že jsme v definici vynechali základ $a = 1$. Je to proto, že příslušná exponenciální funkce $y = 1^x = 1$ je konstantní, a proto k ní inverzní funkce neexistuje.



Obrázek 7 a 8: Graf klesající a rostoucí logaritmické funkce

Poznámka. Při numerických výpočtech užíváme logaritmické funkce se základem $a = 10$, píšeme zjednodušeně $y = log\,x$. Tento **logaritmus** se nazývá **dekadický**. Jak bylo již řečeno dříve, často užíváme logaritmické funkce o základu $a = e$. Kvůli rozlišení ho píšeme $y = ln\,x$ a tento logaritmus nazýváme **přirozeným logaritmem**.

Z vlastností exponenciální funkce plynou následující vlastnosti pro všechna přípustná a:

$$a^0 = 1, \qquad \log_a 1 = 0,$$
$$log_a\,a = 1, \;\; ln\,e = 1.$$

Velice často je využíván vztah $f^g = e^{g\,ln\,f}$, kde f je kladná funkce.

Goniometrické funkce

$$y = sin\,x\,, y = cos\,x\,, y = \text{tg}\,x, y = \text{cotg}\,x.$$

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní ke goniometrickým funkcím v intervalech, kde goniometrické funkce jsou ryze monotónní. Grafy těchto funkcí jsou znázorněny na Obr. 9.

a) Cyklometrická funkce arkussinus je funkce ve tvaru

$$y = arcsin\,x, \text{kde } D(f) = \langle -1{,}1\rangle, H(f) = \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle.$$

Funkce je ohraničená, rostoucí v celém $D(f)$. Graf funkce získáme překlopením funkce $y = sin\,x$ v uvažovaném intervalu podle přímky $y = x$. Hodnota $y = arcsin\,x$ pro $x \in \langle -1{,}1\rangle$ je číslo $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, jehož sinus je roven *x*, tj. $sin\,y = x$. Platí:

$$arcsin\,0 = 0, \quad arcsin\,0{,}5 = \frac{\pi}{6}, \qquad arcsin\,1 = \frac{\pi}{2}.$$

b) Cyklometrická funkce arkuskosinus je funkce ve tvaru

$$y = arccos\,x, \text{kde } D(f) = \langle -1{,}1\rangle,\; H(f) = \langle 0, \pi\rangle.$$

Funkce je ohraničená, klesající v celém $D(f)$. Hodnoty *y* = arccos *x* jsou čísla z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, jejichž kosinus je roven *x*. Platí:

$$arccos\, 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3}, \quad arccos\, 1 = 0.$$

c) Cyklometrická funkce arkustangens je funkce ve tvaru

$$y = \operatorname{arctg} x, \text{ kde } D(f) = R,\ H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkce je ohraničená, rostoucí v celém $D(f)$. Graf funkce leží uvnitř pásu vytvořeného rovnoběžkami $y = -\frac{\pi}{2}$ a $y = \frac{\pi}{2}$. Hodnoty $y = \operatorname{arctg} x$ jsou čísla z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, jejichž tangens je roven x. Platí:

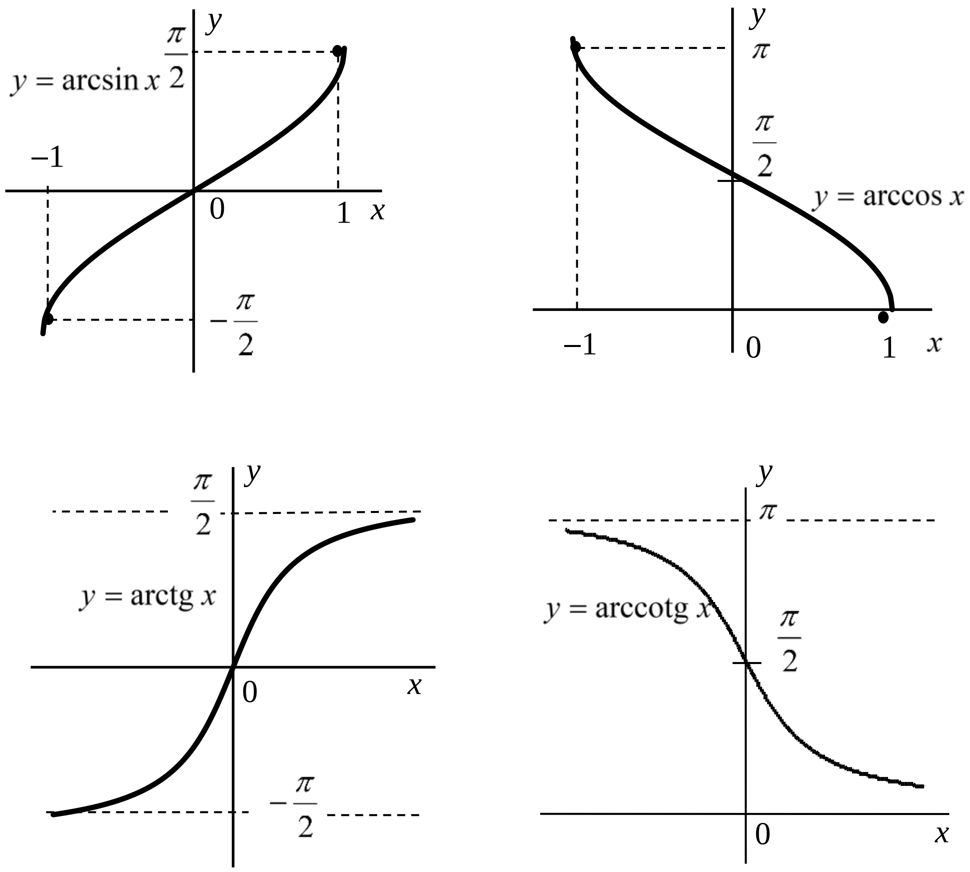
$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

d) Cyklometrická funkce arkuskotangens je funkce ve tvaru

$$y = \operatorname{arccotg} x, \text{kde } D(f) = R,\ H(f) = (0, \pi).$$

Funkce je ohraničená, klesající v celém $D(f)$. Graf funkce leží uvnitř pásu vytvořeného rovnoběžkami $y = 0,\ y = \pi$. Hodnoty $y = \operatorname{arccotg} x$ jsou čísla z intervalu $(0, \pi)$, jejichž kotangens je roven x. Platí:

$$\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$



Obrázek 9: Cyklometrické funkce

3.1.3 DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Určete definiční obor funkce $f(x) = ln(9 - x^2) + 4\sqrt{x-1}$

Řešení.

$9 - x^2 > 0$ $\qquad x - 1 \geq 0$

$(3 - x)(3 + x) > 0$ $\qquad x \geq 1$

$x \in (-3;\ 3)$

Výsledek: $x \in <1;\ 3)$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin(x - 2) + \frac{\sqrt[3]{x+4}}{x-2}$

Řešení.

$|x - 2| \leq 1$ $\qquad x - 2 \neq 0$

$-1 \leq x - 2 \leq 1$ $\qquad x \neq 2$

$1 \leq x \leq 3$

$x \in \langle 1;\ 3 \rangle$

Výsledek: $x \in <1; 2) \cup (2; 3>$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{5 + x}{\sqrt{x^2 - x - 12}} + log(x - 1)$$

Řešení.

$x^2 - x - 12 > 0$ $\qquad x - 1 > 0$

$(x - 4)(x + 3) > 0$ $\qquad x > 1$

$x \in (-\infty;\ -3) \cup (4;\ \infty)$

Výsledek: $x \in (4;\ \infty)$

3.2 Limita funkce

K hlubšímu studiu funkcí je účelné zavést pojem spojité funkce. Existuje řada reálných situací, ve kterých malým změnám jedné veličiny často odpovídají malé změny jiné veličiny. Pojem spojitosti funkce a pojem limita funkce lze definovat dvěma způsoby: buď pomocí okolí bodu (Cauchyova definice) nebo pomocí posloupností (Heineova definice). V této publikaci je uveden druhý z uvedených způsobů. Tato část pojednává o reálných funkcích jedné reálné proměnné $f(x)$. Zavedeme značení $f(x) \equiv f$,definiční obor funkce $f(x)$ budeme značit $D(f)$, výraz $x_n \to C$ znamená $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

DEFINICE 8

Df

O funkci f řekneme, že je v bodě $C \in D(f)$ spojitá, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(f)$ platí ekvivalence:

$$x_n \to C \quad \Leftrightarrow \quad f(x_n) \to f(C), \text{ neboli}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \text{ právě když } \lim_{n\leftarrow\infty} f(x_n) = f(c).$$

Platí:

1) Nechť f, g jsou spojité funkce v bodě C. Potom rovněž funkce $|f|$, $f \pm g$, $f.g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(C) \neq 0)$ jsou spojité v bodě C.

2) Nechť funkce g je spojitá v bodě C a funkce f je spojitá v bodě $d = g(C)$. Potom složená funkce $f \circ g$, která je dána předpisem $y = f(g(x))$, je spojitá v bodě C.

3) Funkce f je **spojitá**, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou spojitých funkcí, absolutní hodnota spojité funkce a funkce složená ze dvou spojitých funkcí jsou opět spojité funkce.

VĚTA 1 – BOLZANOVA VĚTA

V

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$ taková, že $f(a).f(b) < 0$. Potom existuje reálné číslo $c \in (a,b)$ takové, že $f(c) = 0$.

V VĚTA 2 – DŮSLEDEK BOLZANOVY VĚTY

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu (a,b) taková, že nemá v intervalu (a,b) žádný nulový bod. Potom funkce f je stále kladná nebo stále záporná v intervalu (a,b).

V VĚTA 3 – WEISTRASSOVA VĚTA

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu. Potom funkce f nabývá v intervalu jak svého minima, tak i svého maxima.

Df DEFINICE 9

Řekneme, že číslo $a \in R^*$ je **limitou funkce *f*** v bodě C, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(f) - \{C\}$ platí ekvivalence: $\quad x_n \to C \quad \Leftrightarrow \quad f(x_n) \to a.$

Zapisujeme $\lim\limits_{x \to C} f(x) = a$.

Jestliže $a \in R$ jedná se o **vlastní limitu**, pro $a = \pm\infty$ jde o **nevlastní limitu**.

Existence a hodnota limity funkce f v bodě C nezávisí dokonce ani na tom, zda je či není funkce f v bodě C definovaná.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 2x + 8)$.

Řešení.

Označme funkci $f(x) = 3x^2 - 2x + 8$. Tato funkce je v bodě $x = 1$ spojitá, proto limitu vypočteme jako funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$.

Dostáváme: $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 2x + 8) = 3.1^2 - 2.1 + 8 = 9.$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 8

Z grafu funkce určeme limitu funkce v krajních bodech definičního oboru funkce:

a. $y = log\,x$, **b.** $y = arctgx$, **c.** $y = arcsin\,x$,

d. $y = cos\,x$, **e.** $y = 2^x$, **f.** $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Řešení.

a. Definiční obor funkce $y = log\,x$ je interval $(0, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to 0^+} \log x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \log x = \infty$.

Protože limita $\lim\limits_{x \to 0^-} \log x$ neexistuje, neexistuje ani $\lim\limits_{x \to 0} \log x$.

b. Definiční obor funkce $y = arctgx$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to \infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$.

Daná funkce má dvě vodorovné asymptoty o rovnicích $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

c. Definiční obor funkce $y = arcsin\,x$ je interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Protože jednostranné limity $\lim\limits_{x \to -1^-} \arcsin x$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \arcsin x$ neexistují, neexistují ani příslušné oboustranné limity funkce $y = arcsin\,x$.

d. Definiční obor funkce $y = cos\,x$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos x$, $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ neexistují, protože funkce je periodická v celém svém definičním oboru.

e. Definiční obor funkce $y = 2^x$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x = \infty$.

Funkce $y = 2^x$ má vodorovnou asymptotu danou rovnicí $y = 0$.

f. Definiční obor funkce $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = 0$.

Funkce $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ má vodorovnou asymptotu danou rovnicí $y = 0$.

K ZAPAMATOVÁNÍ

Nyní uvedeme obecný vztah pro výpočet limit racionálních lomených funkcí, které již znáte z výpočtu limit posloupnosti. Tento vztah budeme používat v dalším řešeném příkladu.

Nechť $k, m \in N$; $a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_m \in R$; $a_0, b_0 \neq 0$.

Pak platí následující tvrzení:

$$\text{I.}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ je-li } k = m, \\ 0, \text{ je-li } k < m, \\ \infty, \text{ je-li } (k > m) \wedge \left(\dfrac{a_0}{b_0} > 0\right), \\ -\infty, \text{ je-li } (k > m) \wedge \left(\dfrac{a_0}{b_0} < 0\right).. \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ je-li } k = m, \\ 0, \text{ je-li } k < m, \\ \infty, \text{ je-li } (k > m) \wedge \left((-1)^{k-m}\dfrac{a_0}{b_0} > 0\right), \\ -\infty, \text{ je li} (k > m) \wedge \left((-1)^{k-m}\dfrac{a_0}{b_0} < 0\right). \end{cases}$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9

Pomocí výše uvedených vztahů vypočtěte následující limity funkcí (jsou uvedeny v řešení tohoto příkladu). Je zde zachyceno všech osm případů, které mohou nastat. Řešení nekomentujeme, neboť se zde jedná pouze o určení stupně polynomu v čitateli a ve jmenovateli a jednoduchou úvahu.

Řešení.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+2x-3}{5+5x^4}=\frac{2}{5}$, **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{5x^4-4x+2}=0$,

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5}{5+x}=\infty$, **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^4+2x}{x+8}=-\infty$,

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3+3x-3}{2+5x^3}=\frac{4}{5}$, **6.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2-3}{2+5x^7}=0$,

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2x-1}{2+5x}=-\infty$, **8.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^4-3}{2-5x}=\infty$.

Při výpočtu limity funkce typu $\frac{f(x)}{g(x)}$ dojdeme často k výrazu, kdy $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, (výraz $\frac{0}{0}$) a hodnotu limity přímo nelze určit. Úpravu provádíme tak, že se snažíme zlomek krátit výrazem konvergujícím k nule. Vede k tomu například rozklad v součin mnohočlenů v čitateli i ve jmenovateli nebo použití identity $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$, pokud se ve výrazu $a-b$ vyskytují druhé mocniny.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 10

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

Řešení.

Pokud do výrazu dosadíme $x=2$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů, krátíme výrazem $(x-2)$ a nakonec dosadíme $x=2$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{5}{4}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 11

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$.

Řešení.

Pokud do výrazu dosadíme $x=2$, dostaneme výraz $\dfrac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů, krátíme výrazem $(x-2)$ a nakonec dosadíme $x=2$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3(x+2)}=\frac{7}{20}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 12

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Řešení.

Pokud do výrazu dosadíme $x=7$, dostaneme výraz $\dfrac{0}{0}$. Rozšíříme zlomek výrazem $\left(2+\sqrt{x-3}\right)$, potom krátíme výrazem $(x-7)$ a nakonec dosadíme $x=7$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)}{x^2-49}\frac{\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}.$$

SAMOSTATNÉ ÚKOLY

1) Odpovězte ano či ne?

a) Funkce $y=\ln x$ je ryze monotónní funkcí v celém svém definičním oboru.
b) Funkce $y=\sin x$ je ryze monotónní funkcí v celém svém definičním oboru.
c) Kvadratická funkce $y=x^2$ je klesající v intervalu $(-\infty;0\rangle$.

d) Funkce $y = \sqrt{x}$ je inverzní funkcí ke kvadratické funkci $y = x^2$ v R.
e) Funkce $y = e^x$ je exponenciální funkcí.
f) Definičním oborem funkce $y = arcsin\frac{x}{2}$ je interval $\langle -2,2 \rangle$.
g) Funkce $y = \frac{1}{x^6}$ je sudá a funkce $y = \frac{1}{x^9}$ je lichá.
h) Funkce $y = x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{arctg} x \cdot ln\, x$ je složenou funkcí.
i) Definiční obory funkcí $f(x) = \frac{\mathrm{arctg}(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x}}$ a $g(x) = \frac{\sqrt[7]{x^3}}{x \cdot \log x}$ jsou identické.

2) Napište rovnici kvadratické funkce $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, je-li $f(-1) = 4,\ f(0) = 2,\ f(3) = 12$.

3) Je dána funkce $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{2x^2+3}$. Vypočtěte $f(-1), f(5), f(a+1)$.

4) Určete definiční obor následujících funkcí:

a. $y = \arcsin(x-2)$ **b.** $y = \arccos\sqrt{2x}$ **c.** $y = \arcsin\dfrac{3x}{x+5}$

d. $y = (x-4)^{-1} \ln\left(x^2+4\right)^{-1}$ **e.** $y = 3\sqrt{2x - x^2}$

5) Vypočtěte limity funkce v daných bodech:

a. $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$ v bodech $-\infty,\quad \infty,$
b. $f(x) = (x-1)^2(2-x)^3$ v bodech $-\infty,\quad \infty,$
c. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{1 + 3x - 2x^3}$ v bodech $-1,\quad 0,\quad -\infty,\quad \infty,$
d. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x - 6}$ v bodech $3,\quad -\infty,\quad \infty,\quad -2$,
e. $f(x) = \dfrac{2x^3 + x + 18}{x^3 - 4x}$ v bodech $0,\quad -2,\quad -\infty,\quad \infty,$
f. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{8 - x^3}$ v bodech $2,\quad 0,\quad -\infty,\quad \infty,$
g. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x - 4}{4 - x^2}$ v bodech $2,\quad -2,\quad -\infty,\quad \infty,$
h. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x+3}$ v bodech $3,\quad -3,\quad -\infty,\quad \infty,$

ODPOVĚDI

1)
a) ano
b) ne
c) ano

d) ne; kvadratická funkce není prostá, a proto k ní neexistuje inverzní funkce v celém definičním oboru R.

e) ano

f) ano

g) ano

h) ne; je to součin čtyř základních funkcí.

i) ano, $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$

2) $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$

3) 0,8 ; 25,094 ; $\dfrac{2(a+1)(a^3+3a^2+3a+3)}{2(a+1)^2+3}$

4) **a.** $x \in \langle 1,3 \rangle$ **b.** $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ **c.** $x \in \left\langle -\frac{5}{4}, \frac{5}{2} \right\rangle$ **d.** $x \in R - \{4\}$ **e.** $x \in \langle 0,2 \rangle$

5) **a.** ∞, ∞ **b.** ∞, $-\infty$ **c.** $-\frac{2}{3}$, 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

d. $\frac{9}{5}$, $-\infty$, ∞, neexistuje **e.** neexistuje, $\frac{25}{8}$, 2, 2

f. $-\frac{1}{6}$, 0, 0, 0 **g.** $-\frac{13}{2}$, neexistuje, ∞, $-\infty$

h. -6, 0, $-\infty$, ∞

SHRNUTÍ KAPITOLY

V této kapitole jsme se seznámili se základním pojmem diferenciálního počtu a tím je pojem funkce jedné reálné proměnné. Obecně pod pojmem funkce chápeme jistý způsob přiřazení mezi dvěma množinami reálných čísel, které musí splňovat jisté předpoklady. V první části kapitoly jsou uvedeny vlastnosti funkcí, jako je monotónnost, omezenost funkce, sudost a lichost funkce. Součástí této kapitoly jsou také grafy elementárních funkcí. Důraz je kladen na výpočet definičního oboru funkce. Druhá část kapitoly se pak věnuje limitě funkce a jejímu výpočtu.

Funkce a limity funkcí mají v ekonomii široké uplatnění a jsou základními nástroji pro analýzu a modelování ekonomických jevů. V ekonomii jsou základními koncepty poptávka a nabídka. Tyto ekonomické veličiny jsou obvykle reprezentovány funkcemi, které závisí na ceně a množství zboží. Analýza těchto funkcí a jejich limit přispívá k porozumění chování trhů a stanovení cenové rovnováhy. V ekonomických modelech a simulacích se často využívají matematické funkce a limity k popisu chování a interakcí mezi různými ekonomickými proměnnými. Tyto modely a simulace umožňují ekonomům a analytikům předpovídat chování ekonomiky a provádět strategické rozhodnutí.

4 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Zkoumání mnoha přírodních i ekonomických jevů vede k závislostem vyjádřeným ve tvaru funkce jedné reálné proměnné. Derivace této funkce má zásadní význam pro popis příslušného jevu. Pojem derivace vznikl během druhé poloviny 17. století při řešení konkrétních geometrických a fyzikálních úloh. Tento pojem byl přesně definován v 19. století matematiky Cauchym a Bolzanem na základě jimi zpřesněného pojmu limity funkce.

Diferenciální počet, který zahrnuje koncepty jako jsou derivace a diferenciály, má v ekonomii široké uplatnění a je klíčovým nástrojem pro analýzu a modelování ekonomických jevů. Zde jsou některé oblasti, kde se diferenciální počet v ekonomii využívá: optimalizace, funkce poptávky a nabídky, produkční funkce, teorie firmy, ekonometrie a finanční matematika.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- definovat pojem derivace funkce,
- pravidla derivování funkcí,
- používat vzorce pro derivace funkce,
- vypočítat extrémy funkce a inflexní body funkce.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

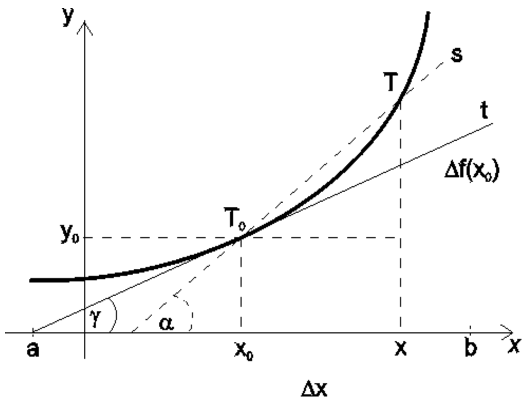
K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 120 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Derivace funkce, monotónnost funkce, extrémy funkce, inflexní body funkce, konvexnost a konkávnost funkce, stacionární body funkce.

4.1 Pojem derivace funkce

Uvažujme funkci $y = f(x)$ definovanou na otevřeném intervalu $M = (a, b)$. Zvolíme bod x_0 uvnitř intervalu *M*. Náš úkol bude určit směrnici tečny *t* ke křivce $y = f(x)$ v bodě $T_0 = [x_0, y_0]$, kde $y_0 = f(x_0)$. Za tímto účelem vedeme bodem T_0 sečnu *s*, která protíná křivku v dalším bodě $T = [x, f(x)]$, $x \in M$. Označíme $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Vše je graficky znázorněno na Obrázku 10.



Obrázek 10: Derivace funkce

Potom směrnice uvažované sečny je rovna

$$\mathrm{tg}\alpha(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \tag{4.1}$$

kde $\alpha(x)$ je velikost směrového úhlu přímky *s* v závislosti na *x*-ové souřadnici bodu *T*.

Přitom rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ (4.2)

se nazývá **diference (přírůstek) funkce** *f* v bodě x_0,

kdežto rozdíl $\Delta x = x - x_0$ (4.3)

se nazývá **diference (přírůstek) argumentu** *x* v bodě x_0.

Diferenční podíl $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ je funkcí proměnné Δx, nikoliv x_0, které je pevné. Připomeňme, že je to směrnice sečny. Význam diferenčního podílu spočívá v tom, že charakterizuje relativní změnu hodnot funkce $y = f(x)$ vzhledem k změně hodnot argumentu. Funkce (1) není definována pro $\Delta x = 0$. Může ovšem mít v tomto bodě limitu.

DEFINICE 1

Nechť funkce $y = f(x)$ je definována na otevřeném intervalu *M* a nechť číslo $x_0 \in M$. **Derivací funkce *f* v bodě x_0** nazýváme číslo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{neboli} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{4.4}$$

Jinak řečeno: derivací funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 nazýváme limitu diferenčního podílu $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ pro $\Delta x \to 0$.

K ZAPAMATOVÁNÍ

Pravidla pro derivování funkcí

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace na intervalu $M \subset R$. Nechť k je libovolná konstanta. Potom pro $x \in M$ platí:

1. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$,
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, pro $g(x) \neq 0$.

Vzorce pro derivování elementárních funkcí

V bodě x, který splňuje připojené podmínky, platí pro derivace uvedených funkcí tyto vzorce:

(1) $k' = 0$, k – libovolná konstanta, $k \in R$,
(2) $(x^a)' = ax^{a-1}, x > 0, a \in R$,
(3) $(\sin x)' = \cos x$,
(4) $(\cos x)' = -\sin x$,
(5) $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x,\ \cos x \neq 0$,
(6) $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{cotg}^2 x), \sin x \neq 0$,
(7) $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0 \Rightarrow (e^x)' = e^x$,
(8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1, x > 0 \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$,
(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$,
(10) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$,
(11) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in R$,
(12) $(\mathrm{arccotg}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}, x \in R$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Derivujte funkci $y = x^6 + 3x^4 - 8x^2 + x + 23, x \in R$.

Řešení.

Kromě násobného užití vzorce **(2)** použijeme též pravidla **1.** a **2.**

$y' = 6x^5 + 3 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 2x + 1 = 6x^5 + 12x^3 - 16x + 1$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Derivujte funkci $y = \frac{2x^7+3x^6-2x^4+7x-2}{2x^4}$, $x \neq 0$.

Řešení.

Čitatel dělíme jmenovatelem.

$$y = x^3 + 1{,}5x^2 - 1 + 3{,}5x^{-3} - x^{-4},$$

$$y' = 3x^2 + 3x - 10{,}5x^{-4} + 4x^{-5}.$$

Ověřte si, že stejný výsledek obdržíte použitím pravidla **4.** pro derivování podílu. Postup je ovšem zdlouhavější.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Derivujte funkci $y = 3x\sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$.

Řešení.

Funkci nejprve upravíme jako mocninu proměnné x, potom použijeme **(2)**.

$$y = 3x^{1+\frac{1}{4}} = 3x^{1{,}25},$$

$$y' = 3{,}75x^{0{,}25} = 3{,}75\sqrt[4]{x}.$$

Derivovaný výraz, pokud lze, vždy nejprve upravíme.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Derivujte funkci $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^4 \cdot \sqrt{x^3}}}$, $x \geq 0$.

Řešení.

Funkci y můžeme upravit takto: $y = x^{\frac{19}{12}}$. Pak použijeme vzorec **(2)**.

$$y' = \frac{19}{12}x^{\frac{7}{12}} = \frac{19}{12}\sqrt[12]{x^7}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Derivujte funkci $y = x^2 \cos x$, $x \in R$.

Řešení.

Použijeme pravidlo **3.** pro derivaci součinu.

$$y' = (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x - x^2 \sin x.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Derivujte funkci $y = \frac{\sin x}{\ln x}$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Řešení.

Použijeme pravidlo **4.** pro derivaci podílu. Všimněte si správného pořadí funkcí z čitatele a jmenovatele derivovaného zlomku: čitatel výsledku začíná derivací čitatele.

$$y' = \frac{(\sin x)' \ln x - \sin x (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x \ln x - \sin x \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{x(\ln x)^2}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Derivujte funkci $y = \operatorname{cotg} x$, $x \neq k\pi$.

Řešení.

Použijeme základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi a pravidlo **4.** pro derivaci podílu.

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$
$$= -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Vzorec pro derivaci tg x ověřte teď sami!

ŘEŠENÁ ÚLOHA 8

Derivujte funkci $y = \frac{3x+8}{x^2+4}, x \in R$.

Řešení.

Použijeme pravidlo **4.** pro derivaci podílu.

$$y' = \frac{3(x^2+4) - (3x+8)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-3x^2 - 16x + 12}{(x^2+4)^2}.$$

K ZAPAMATOVÁNÍ

Má-li funkce $u = g(x)$ derivaci v bodě x_0 a má-li funkce $y = f(u)$ derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$, potom $y = f(g(x))$ má derivaci v bodě x_0 a platí pravidlo derivování složené funkce:

5. $y'_{x_0} = \{f(g(x))\}'_{x_0} = f'(u_0) g'(x_0)$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9

Derivujte funkci $y = sin(x^4 + 5x^2 + 9), x \in R$.

Řešení.

Položíme $u = g(x) = x^4 + 5x^2 + 9$, $f(u) = sin\, u$, potom derivujeme

$$g'(x) = 4x^3 + 10x,$$
$$f'(u) = cos\, u = cos(x^4 + 5x^2 + 9)$$

Použitím pravidla **5.** obdržíme postupně:

$$y' = f'(u)g'(x) = cos\, u \cdot (4x^3 + 10x) = (4x^3 + 10x) \cdot cos(x^4 + 5x^2 + 9).$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 10

Derivujte funkci y:

a. $y = (x^2 - 1)^5, x \in R$.

Označme $g(x) = x^2 - 1 = u$, potom $f(u) = u^5$, podle pravidla **5.** obdržíme:

$$y' = (u^5)'(x^2 - 1)' = 5u^4 2x = 10x(x^2 - 1)^4.$$

b. $y = \sqrt{1 + x^2}, x \in R$.

Označme $1 + x^2 = u$, potom

$$y' = \left(\sqrt{u}\right)'(1 + x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

c. $y = sin(ax + b), x \in R$.

Označme $ax + b = u$, potom

$$y' = (sin\, u)' \cdot (ax + b)' = a\, cos\, u = a\, cos(ax + b).$$

d. $y = ln cos\, x, x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

Označme $cos\, x = u$, potom

$$y' = (ln\, u)'(cos\, x)' = \frac{1}{u}(-\sin x) = \frac{-\sin x}{cos\, x} = -\mathrm{tg}\, x.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 11

Vypočtěte šestou derivaci funkce $y = x^5 - 2x^4 + 4x^2 - 16x + 15$.

Řešení.

Podle definice derivace vyšších řádů postupně vypočítáme:

$y' = 5x^4 - 8x^3 + 8x - 16,$

$$y'' = 20x^3 - 24x^2 + 8,$$
$$y''' = 60x^2 - 48x,$$
$$y^{(4)} = 120x - 48,$$
$$y^{(5)} = 120,$$
$$y^{(6)} = 0.$$

4.2 Užití diferenciálního počtu – průběh funkce

Vyšetření průběhu funkce vyžaduje znalost všech předchozích kapitol matematické analýzy. Výklad v této kapitole je omezen na vyšetřování průběhů algebraických funkcí.

4.2.1 Monotónnost funkce

V teorii funkcí jsme definovali monotónnost funkce. Zjišťování monotónnosti funkce na daném intervalu pomocí dříve uvedených definicí je často neefektivní, proto tuto vlastnost funkce $f(x)$ v intervalu $J = (a, b)$ vyšetřujeme pomocí derivace funkce. Platí následující věta.

VĚTA 1

Jestliže pro všechna x z intervalu $J = (a, b)$ je splněna nerovnost

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \\ f'(x) < 0, \\ f'(x) \geq 0, \\ f'(x) \leq 0, \end{array}\right\} \quad \text{potom funkce } f \text{ je v tomto intervalu} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí,} \\ \text{klesající,} \\ \text{neklesající,} \\ \text{nerostoucí.} \end{array}\right.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 12

Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x,\ x \in R$.

Řešení.

Zjistíme nejprve intervaly, v nichž platí $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -5) \cup (1, \infty),$$
$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-5, 1)\,.$$

Podle věty 4 je funkce rostoucí v intervalu $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$ a klesající v intervalu $(-5, 1)$.

Funkce je spojitá v R, takže v bodě $x = -5$ musí mít lokální maximum, tzn., že v nějakém okolí bodu $x = -5$, tj. intervalu obsahující bod $x = -5$, je hodnota $f(-5)$ maximální ze všech hodnot, jež funkce nabývá na tomto intervalu. Analogicky v bodě $x = 1$ musí funkce mít lokální minimum. V případě této kubické funkce, na základě znalosti průběhu elementárních funkcí, stanovíme charakter grafu. Obecně výpočet extrému nemusí být tak jednoduchý. Proto pro jejich určení používáme postup uvedený v následujícím odstavci.

4.2.2 LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ

DEFINICE 2

Df

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou v bodě x_0 a jeho jistém okolí. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **lokální minimum**, právě když existuje takové okolí $J \subset D(f)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in J$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.
Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **lokální maximum**, právě když existuje takové okolí $J \subset D(f)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in J$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.
Souhrnně se lokální minima a lokální maxima nazývají **lokální extrémy funkce.**

Dále budeme vyšetřovat, za jakých podmínek nastává v určitém bodě x_0 lokální extrém.

DEFINICE 3

Df

Bod x_0, ve kterém je $f'(x_0) = 0$, se nazývá **stacionární bod funkce** $f(x)$.

VĚTA 2

V

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 obě derivace $f'(x_0), f''(x_0)$ a nechť x_0 je stacionární bod, tj. $f'(x_0) = 0$. Pak funkce $f(x)$ v bodě x_0:

- **a.** má lokální maximum, je-li $f''(x_0) < 0$,
- **b.** má lokální minimum, je-li $f''(x_0) > 0$.

Jestliže však $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, pak funkce $f(x)$ může mít (ale i nemusí) v bodě x_0 lokální extrém.

Např. pro $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ platí pro $x_0 = 0$ v obou případech $f'(0) = g'(0) = f''(0) = g''(0) = 0$ a přitom funkce $g(x) = x^4$ má v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum, kdežto funkce $f(x) = x^3$ v tomto bodě nemá extrém, neboť je rostoucí v celém definičním oboru. Nakreslete si tyto funkce!

Nyní nás zajímá, jak postupovat, když ve stacionárním bodě x_0 druhá derivace je nulová.

VĚTA 3

V

Nechť funkce $f(x)$ má na okolí bodu x_0 spojitou derivaci řádu $n \geq 3$, přičemž platí

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) = B \neq 0.$$

Je-li číslo n liché, nemá $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém. Je-li však číslo n sudé, má $f(x)$ v bodě x_0:

- **a.** lokální maximum při $B < 0$,
- **b.** lokální minimum při $B > 0$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 13

Určete lokální extrémy funkce $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5$.

Řešení.

Vypočteme derivace

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3),$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x.$$

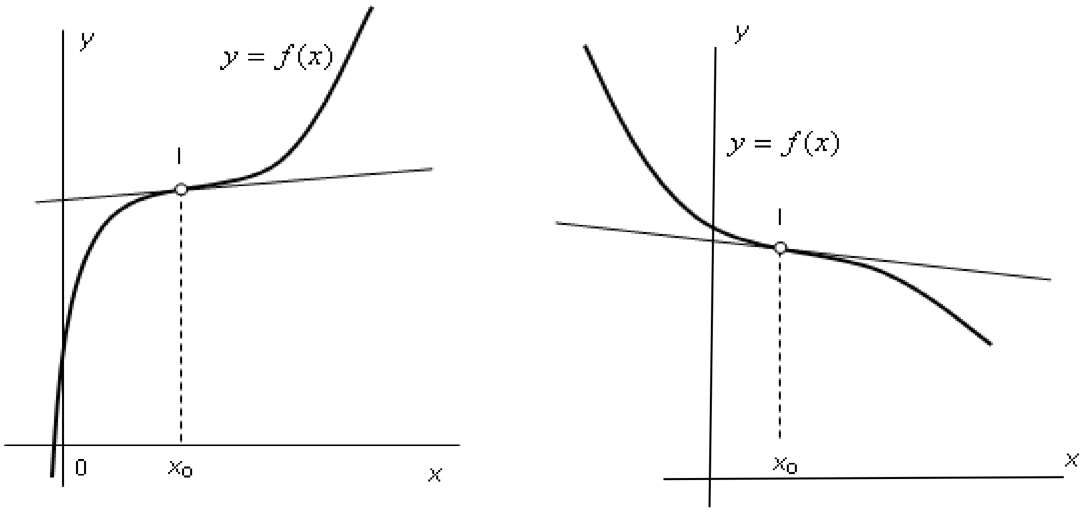
Protože daná funkce $f(x)$ má všude v R derivaci, může mít $f(x)$ lokální extrém jen ve stacionárních bodech, pro něž je $f'(x) = 0$.
Proto řešíme rovnici

$$5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0.$$

Dostaneme stacionární body $x_{1,2} = 0, x_3 = 1, x_4 = 3$.
Dále platí $f''(0) = 0, f''(1) = -10, f''(3) = 90$.
Podle věty 4. má $f(x)$ v bodě $x_3 = 1$ lokální maximum a v bodě $x_4 = 3$ lokální minimum.
Zbývá rozhodnout pomocí věty 5. o situaci v bodě $x_1 = 0$.
Protože $f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30$, $f'''(0) = 30 = B$, nemá $f(x)$ extrém ve stacionárním bodě $x_1 = 0$.

4.2.3 INFLEXNÍ BODY FUNKCE

Inflexní bod funkce je bod, v němž graf funkce přechází z jedné strany své tečny na druhou. Je to na Obr. 11 bod I, v němž se funkce $f(x)$ mění z funkce konvexní na konkávní nebo obráceně. Říkáme také, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **inflexi**.



Obrázek 11: Inflexní bod funkce

Nyní nás bude zajímat, za jakých podmínek je bod x_0 **inflexním bodem**.

VĚTA 4

Je-li x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$ a existuje-li druhá derivace $f''(x_0)$, potom platí: $f''(x_0) = 0$.

VĚTA 5

Je-li $f''(x_0) = 0$ a mění-li $f''(x)$ při přechodu přes bod x_0 znaménko, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexi.

VĚTA 6

Je-li $f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$, kdežto $f^{(2n+1)}(x_0) = A \neq 0$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 inflexi.

Je-li $f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$, kdežto $f^{(2n+1)}(x_0) = A \neq 0$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 inflexi.

Tzn. má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 nulové všechny derivace počínaje druhou až do určité derivace sudého řádů (včetně), potom x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$, pokud bezprostředně následující derivace lichého řádu je nenulová.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 14

Určete inflexní body a intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ konvexní nebo konkávní.

Řešení.

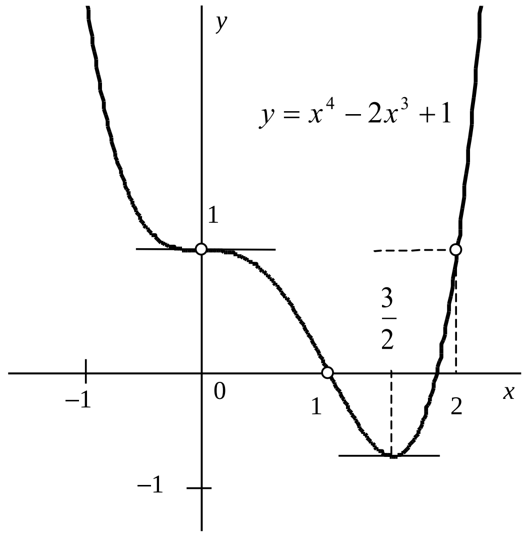
1. Určení inflexních bodů:
Nejprve vypočteme derivace

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1),$$

$$f'''(x) = 24x - 12.$$

Dále řešíme rovnici $f''(x) = 12x(x-1) = 0$.
Řešením dostaneme x-ové souřadnice bodů, ve kterých může existovat inflexe: $x_1 = 0, x_2 = 1$.
V těchto bodech určíme hodnotu třetí derivace: $f'''(0) = -12, f'''(1) = 12$.
V obou případech jsou třetí derivace nenulové, proto body $I_1[0,1]$, $I_2[1,0]$ jsou inflexními body (Obr. 12).



Obrázek 12: Inflexní body funkce

2. Určení intervalů, na nichž je daná křivka konvexní nebo konkávní:
Nejprve řešíme nerovnice $f''(x) > 0$ nebo $f''(x) < 0$.
a. $f''(x) = 12x(x-1) > 0$.
Funkce je konvexní v intervalu $(-\infty, 0)$ a také v intervalu $(1, \infty)$.
b. $f''(x) = 12x(x-1) < 0$.
Funkce je konkávní pro $(0,1)$.

4.2.4 KONVEXNOST A KONKÁVNOST FUNKCE

Obdobně jako monotónnost funkce, tak i konvexnost a konkávnost jsme definovali v kapitole věnované funkcím. Prakticky ji ovšem budeme vyšetřovat v závislosti na znaménku druhé derivace funkce podle níže uvedené věty.

V

VĚTA 7

Jestliže v intervalu $J = (a, b)$ platí nerovnost:

$$\left.\begin{matrix} f''(x) > 0, \\ f''(x) < 0, \end{matrix}\right\} \text{ pak funkce } f \text{ je v tomto intervalu } \left\{\begin{matrix} \text{konvexní,} \\ \text{konkávní.} \end{matrix}\right.$$

Řešením uvedených nerovnic určíme intervaly, na kterých funkce je konvexní nebo konkávní.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 15

Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$ konvexní nebo konkávní.

Řešení.
Vypočteme nejprve druhou derivaci funkce a pak vyřešíme příslušné nerovnice:

$$f''(x) = 6x + 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2,$$
$$f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2.$$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalu $(-2, \infty)$ a konkávní v intervalu $(-\infty, -2)$.

4.3 Aplikace pojmu derivace funkce

Tato část kapitoly obsahuje příklad, který je věnován aplikaci pojmu derivace funkce k řešení úlohy o výpočtu maximálního zisku.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 16

Půjčovna aut disponuje 50 osobními auty. Dlouhodobým pozorováním se zjistilo, že při denním pronájmu jednoho auta za 600Kč se dosahuje plná denní pronajímatelnost a každé zvýšení pronájmu o 30Kč způsobuje úbytek zájmu o jedno auto. Jakou cenu pronájmu máme stanovit, aby zisk firmy byl maximální, jestliže nové kalkulace na denní režijní náklady pronajatého auta vycházejí půjčovnu na 60Kč.

Řešení.

Když x označuje počet pronajatých aut, pak $50 - x$ aut zůstává denně nepronajatých, což je důsledek zvýšeného pronájmu o $30 \cdot (50 - x)$. Pak denní zisk půjčovny je roven

$$P(x) = \big(600 + 30 \cdot (50 - x)\big) \cdot x - 60x = 2040x - 30x^2 .$$

Kvadratická funkce $P(x)$ je konkávní parabola, která má jediné lokání i globální maximum ve stacionárním bodě x_0, pro který platí $P'(x_0) = 2040 - 60x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 34$.

Zvýšený pronájem o $30 \cdot (50 - 34) = 480Kč$. To je 600Kč + 480Kč = 1080Kč na jedno auto. Při denním pronájmu 34 aut je maximální denní zisk v hodnotě $P(34) = 34680Kč$.

SAMOSTATNÉ ÚKOLY

1) Vypočtěte první derivaci dané funkce a určete $D(y')$

a. $y = \sqrt[5]{x^2}$

b. $y = \frac{1}{x} - x + \ln 5$

c. $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x}$

d. $y = x^3\sqrt{x}$

e. $y = \frac{3}{(3x-2)}$

f. $y = \frac{3x^2}{7x^5-x+2}$

g. $y = 2^{\frac{x+1}{x-1}}$

h. $y = \left(\frac{1}{x} + 4\right)^4$

2) Vypočtěte první derivaci dané funkce a určete $D(y')$

a. $y = \sqrt{x} - \frac{5}{6\sqrt[5]{x^3}} - 2\sqrt{x^3}$

b. $y = \frac{2}{x^3\sqrt{x}}$

c. $y = \frac{5}{2x^2-5x+1}$

d. $y = \frac{8x^3}{x^3+x-1}$

e. $y = \frac{5x^2+x-2}{x^2+7}$

f. $y = \frac{3}{(1-x^2)}$

g. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$

h. $y = (7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^6$

i. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

j. $y = \frac{3\sqrt{x}}{x^2+1}$

k. $y = \frac{5}{\sin^3 2x}$

l. $y = \frac{x}{\sin x+\cos x}$

3) Určete lokální extrémy funkcí. Symbolem $\overline{\mathrm{V}}$, resp. $\underline{\mathrm{V}}$ označujeme ve výsledcích lokální maximum, resp. lokální minimum funkce.

a. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 4$

b. $f(x) = x^3 + x + 1$

c. $f(x) = -x^3 + x^2$

d. $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3$

4) Určete inflexní body funkce $f(x)$ a intervaly, v nichž je tato funkce konvexní nebo konkávní.

a. $f(x) = x^5 - 10x^2 + x + 3$

b. $f(x) = e^x + x^2 + x^4$

c. $f(x) = 2x^2 + \ln x, \quad x > 0$

d. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \neq \pm 1$

ODPOVĚDI

1)

a. $x \neq 0\,;\, y' = \frac{2}{5\cdot\sqrt[5]{x^3}}$ **b.** $x \neq 0\,;\, y' = \frac{-1}{x^2} - 1$

c. $x \neq 0\,;\ y' = -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **d.** $x \geq 0\,;\ y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

e. $x \neq \frac{2}{3}\,;\ y' = -\frac{9}{(3x-2)^2}$

f. $7x^5 - x + 2 \neq 0\,;\ y' = \frac{-3x(21x^5+x-4)}{(7x^5-x+2)^2}$

g. $x \neq 1\,;\ y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$ **h.** $x \neq 0\,;\ y' = \frac{-4}{x^2}\left(\frac{1}{x} + 4\right)^3$

2)

a. $x > 0\,;\ y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt[5]{x^8}} - 3\sqrt{x}$

b. $x \neq 0\,;\ y' = \frac{-7}{\sqrt{x^9}}$

c. $2x^2 - 5x + 1 \neq 0\,;\ y' = \frac{-20x+25}{(2x^2-5x+1)^2}$

d. $x^3 + x - 1 \neq 0\,;\ y' = \frac{8x^2(2x-3)}{(x^3+x-1)^2}$

e. $y' = \frac{-x^2+74x+7}{(x^2+7)^2}$

f. $x \neq \pm 1\,;\ y' = \frac{6x}{(1-x^2)^2}$

g. $x > 0\,;\ y' = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$

h. $x \neq 0\,;\ y' = 6(14x + \frac{4}{x^2})(7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^5$

i. $x > 1\,;\ y' = -\frac{3}{4}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^7}$

j. $x > 0\,;\ y' = \frac{3(1-3x^2)}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

k. $\sin 2x \neq 0\,;\, y' = -30\cos 2x \sin^{-4} 2x$

l. $\sin 2x \neq -1\,;\ y' = \frac{\sin x + \cos x + x(\sin x - \cos x)}{1 + \sin 2x}$

3)

a. $\overline{\mathrm{V}} = (-6,-50),\ \underline{\mathrm{V}} = (-2,-82)$ **b.** lokální extrémy neexistují

c. $\overline{\mathrm{V}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{27}\right),\ \underline{\mathrm{V}} = (0,0)$ **d.** $\underline{\mathrm{V}}\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$

4)

a. inflexní bod $x = 1$; konvexní v $(1,\infty)$; konkávní v $(-\infty,1)$

b. inflexní bod neexistuje, konvexní v R

c. inflexní bod $x = \frac{1}{2}$; konvexní v $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; konkávní v $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

d. inflexní bod neexistuje; konvexní v $(-1,1)$; konkávní v $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

SHRNUTÍ KAPITOLY

Tato kapitola studijní opory uzavírá část věnující se matematické oblasti. V této kapitole jste se seznámili s derivací funkce jedné reálné proměnné. Byly zde uvedeny základní vztahy pro derivování a vzorce pro derivaci elementárních funkcí. Vyšetřování průběhu funkce patří k základním znalostem. V tomto předmětu je důraz kladen na výpočet extrémů funkce, určení intervalů monotónnosti, výpočet inflexních bodů a určení intervalů konvexnosti a konkávnosti.

Diferenciální počet je klíčovým nástrojem pro ekonomy a analytiky při analýze ekonomických jevů, rozhodování a formulování strategií v různých oblastech ekonomie a finančního světa. Derivace se používají k analýze pružnosti poptávky a nabídky v reakci na změny cen a dalších faktorů. Tyto analýzy jsou klíčové pro porozumění chování trhu a stanovení optimálních cenových strategií. V ekonometrii se diferenciální počet používá k odhadu parametrů ekonometrických modelů a analýze jejich vlastností. V oblasti finanční matematiky se diferenciální počet používá k modelování různých finančních instrumentů a derivátů, analýze rizika a stanovení cenových strategií.

5 POPISNÁ STATISTIKA – KVALITATIVNÍ A KVANTITATIVNÍ ZNAKY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Cílem statistiky je odhalit zákonitosti a analyzovat informace, které jsou obsaženy ve velkém množství dat v číselné i nečíselné podobě. Prvním krokem k tomuto cíli je zpřehlednění dat. Obvyklé jsou dva přístupy: popisná statistika a induktivní statistika.

Do popisné statistiky patří grafické znázornění dat, které zpravidla využívá už provedeného třídění a vypočtených charakteristik. Mezi základní charakteristiky polohy patří: průměr, modus a medián. Mezi charakteristiky polohy patří: rozptyl, směrodatná odchylka, rozpětí, variační koeficient.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- rozdělit statistické znaky,
- uvést příklady kvalitativních a kvantitativních znaků,
- vypočítat charakteristiky polohy: průměr, modus, medián,
- vypočítat charakteristiky variability: rozptyl, směrodatnou odchylku, rozpětí, variační koeficient.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Statistické znaky, kvalitativní statistický znak, kvantitativní statistický znak, průměr, modus, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku, rozpětí, variační koeficient.

5.1 Statistické znaky

Jednotlivé objekty statistického zkoumání nazýváme **statistické jednotky**. Statistickými jednotkami mohou být například zákazníci, zaměstnaci firmy, samotné firmy nebo organizace určitého typu, jako jsou prodejny potravin, supermarkety učitého řetězce (např. Hypernova), ale i studenti SU OPF, voliči v ČR, též výrobky (např. televizory, počítače aj.), nebo také události (uzávěrky, úrazy, vrhy hrací kostkou apod.).

Souhrn statistických jednotek stejného vymezení tvoří **statistický soubor**. Soubor, který obsahuje všechny statistické jednotky daného vymezení, se nazývá **základní soubor** (též **populační soubor** nebo krátce **populace**). Vybraná část základního souboru se nazývá **výběrový soubor**, též *vzorek*. V praxi se setkáváme především s výběrovými soubory, neboť populační soubory jsou jen zřídka dostupné.

Předmětem analýzy statistických souborů jsou vlastnosti jejich statistických jednotek. Těmto vlastnostem říkáme **statistické znaky** a z důvodu jejich dalšího sledování je podrobněji členíme na:

znaky kvalitativní (někdy též slovní, textové nebo alfanumerické),

znaky kvantitativní (též číselné, metrické, měřitelné).

Příkladem kvalitativních znaků mohou být pohlaví zákazníka, typ podniku, bydliště voliče, barva výrobku, chuť nápoje, spokojenost zákazníka apod.

Jako příklady kvantitativních znaků mohou sloužit tržby firmy za měsíc, cena výrobku, počet zákazníků za den, HDP státu v USD, výsledky vrhu hrací kostkou apod.

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme namísto „statistický znak“ používat pouze „znak“.

Z hlediska použitých metod je vhodné ještě podrobnější členění statistických znaků. Konkrétně kvalitativní znaky členíme na dvě skupiny:

nominální znaky (též jmenovité),

ordinální znaky (též pořadové).

Hodnotám, kterých nabývají kvalitativní znaky, říkáme **kategorie**. Tak například kategoriemi znaku „pohlaví zákazníka“ jsou „Muž“ a „Žena“ (nebo M a Ž, popřípadě z angličtiny M – „Male“ a F – „Female“), kategoriemi znaku „spokojenost zákazníka“ mohou být 3 výrazy „nízká“, „průměrná“ a „vysoká“, nebo též 3 kódy „1“, „2“ a „3“. Přestože se v tomto případě vyjadřuje znak spokojenost zákazníka čísly 1, 2 a 3, nejedná se o kvantitativní znak, neboť čísla zde pouze nahrazují příslušné slovní výrazy.

Kategorie nominálních znaků jsou navzájem rovnocenné, a tudíž je nelze vzájemně porovnávat a uspořádat do hodnotové stupnice. Na druhou stranu kategorie ordinálních znaků nejsou rovnocenné, a tudíž je lze vzájemně porovnávat a uspořádat do hodnotové stupnice, např. od nejméně hodnotného k nejvíce hodnotnému.

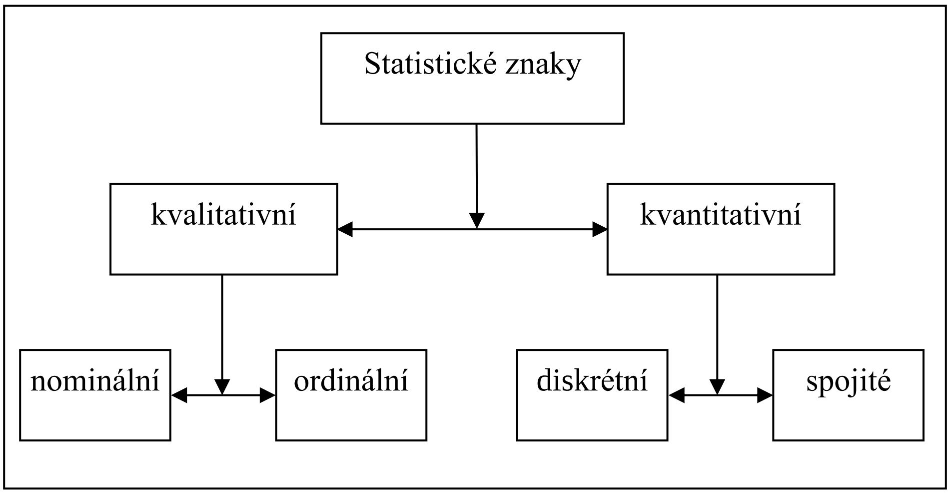
Kvantitativní znaky rovněž členíme do dvou skupin na:

diskrétní znaky (konečné nebo nekonečné),

spojité znaky.

Diskrétní znaky nabývají izolovaných číselných hodnot. Například počet zákazníků v prodejně za den může nabývat hodnot 0, 1, 2, 3,… atd., není shora omezen (alespoň teoreticky) a jedná se tudíž o nekonečný diskrétní znak. Počet ok na hrací kostce je naproti tomu omezený, konkrétně nabývá hodnot 1, 2,…, 6, jedná se proto o konečný diskrétní znak. Naopak spojité znaky nabývají všech možných číselných hodnot z určitého číselného intervalu. Přesněji říkáme, že nabývají hodnot všech reálných čísel z daného intervalu, který ovšem může být i neomezený, (-∞; +∞).

Přehledně je struktura statistických znaků znázorněna na Obr. 13.



Obrázek 13: Struktura statistických znaků

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Doplňte hodnoty v tabulce. Data představují počet dětí v 33 rodinách.

počet dětí	četnosti	relativní četnosti	kumulativní četnosti	relativní kumulativní četnosti
0	6			
1	7			
2	14			
3	5			
4				

Na základě informací z prvního příkladu odpovězte na následující otázky:

a) V kolika rodinách mají 4 děti?
b) Kolik procent z dotazovaných rodin má 2 děti?

c) Kolik rodin má méně než 2 děti?
d) Kolik procent z dotazovaných rodin má nejvýše 2 děti?

Řešení.

počet dětí	četnosti	relativní četnosti	kumulativní četnosti	relativní kumulativní četnosti
0	6	0,18	6	0,18
1	7	0,21	13	0,39
2	14	0,42	27	0,82
3	5	0,15	32	0,97
4	1	0,03	33	1,00

a) 1; b) 42%; c) 13; d) 82%

5.2 Kvalitativní znaky

Nejčetnější hodnota (kategorie) statistického znaku x v daném statistickém souboru se nazývá **modus** a označuje se „stříškou“, tedy $\hat{x}$.

Nejčetnější hodnota nemusí existovat jediná, statistický soubor, v němž existují dvě nejčetnější hodnoty (samozřejmě se stejnou četností), se nazývá **bimodální**, existuje-li takových hodnot v souboru více, pak se statistický soubor nazývá **multimodální**.

U ordinálního znaku můžeme kromě modu v daném souboru využít ještě další charakteristiku polohy – prostřední hodnotu v souboru statistických jednotek uspořádaných podle hodnoty znaku.

Medián představuje hodnotu odpovídající prostřední jednotce v souboru jednotek uspořádaných podle ordinálního ukazatele x, to je takovou hodnotu, kdy existuje stejný počet jednotek v souboru s menší nebo stejnou hodnotou znaku a stejný počet jednotek s větší nebo stejnou hodnotou (kategorií). Při sudém počtu statistických jednotek neexistuje pochopitelně žádná prostřední jednotka, prostřední jednotky jsou (sousední) dvě a medián se pak definuje jako hodnota menší z nich.

5.3 Kvantitativní znaky

5.3.1 Četnosti

Základní metodou zpracování číselných dat velkého rozsahu je **rozdělení četnosti**. Příkladem je náš soubor Firma (viz Příloha), který obsahuje kvantitativní znak Věk s údaji o 200 pracovnících Firmy.

Rozdělení četnosti představuje počet údajů, které přináleží každému ze zadaných nepřekrývajících se intervalů nazývaných **třídami**. Třída je v našem příkladu definována jako interval těch hodnot znaku Věk, které jsou větší, případně se rovnají 18 a současně jsou menší než 23. U každé třídy rozeznáváme **dolní hranici, horní hranici a šířku třídy**. Třídy v rozdělení četnosti musejí splňovat následující podmínku: každý údaj z analyzovaného souboru leží právě v jediné třídě. Z této podmínky vyplývají 2 důležité vlastnosti tříd:

- třídy se vzájemně nepřekrývají,
- všechny třídy pokrývají celou oblast hodnot dat.

Navíc požadujeme 3. vlastnost:

- šířka všech tříd je stejná.

Četnost třídy je definována jako počet hodnot, které přísluší do této třídy. V našem příkladě je četnost třídy rovna 7. V této souvislosti definujeme ještě další používané pojmy:

Rozpětí *R* představuje rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou dat, tedy:

$$R = \max x_i - \min x_i ,$$

kde x_i jsou jednotlivá data. V našem příkladu je

$$R = 62 - 18 = 44.$$

V metodě rozdělení četnosti se nejprve stanoví počet tříd, který zřejmě závisí na množství analyzovaných dat, tj. počtu statistických jednotek. Počet tříd nesmí být příliš velký. Čím menší je počet jednotek, tím menší musí být zároveň počet tříd, jinak by některé třídy neobsahovaly žádná data, byly by tak „zbytečné". Na druhou stranu nesmí být počet tříd ani příliš malý, pak by totiž výsledné rozdělení četnosti poskytovalo jen malou informací o analyzovaném souboru. Představte si například krajní situaci s jedinou třídou, kde se nachází všechna data. Takové extrémní „rozdělení četnosti" nedává o rozdělení hodnot v souboru prakticky žádnou informaci. Počet tříd je někdy přirozeně určen věcnou podstatou dat, kdy šířka třídy je např. dána předpisy, tradicí nebo zkušenostmi. Pokud tomu tak není, pak pro stanovení počtu tříd (intervalů) k se často používá tzv. **Sturgersovo pravidlo**:

$$k = Round\ (3{,}3\, log_{10}(n)) + 1,$$

kde k je počet tříd, n je počet hodnot kvantitativního znaku, jež jsou k dispozici, výraz $Round(a)$ označuje zaokrouhlení čísla a na celé číslo. Pro náš příklad je

$$k = Round\ (3{,}3\, log_{10}(200)) + 1 = Round(3{,}3 \cdot 2{,}3) + 1 = Round\,(7{,}59) + 1 =$$

$$= 8 + 1 = 9.$$

Počet tříd v našem příkladu je podle Sturgersova pravidla roven 9. Konkrétní třídy stanovíme tak, aby levá hranice 1. třídy, označíme ji L, byla menší (nebo rovna) než minimální hodnota v souboru označená $\min x_i$ a pravá hranice 9. třídy, označíme ji P, byla větší (nebo rovna) než maximální hodnota v souboru $\max x_i$. V našem příkladu jsme konkrétně zvolili

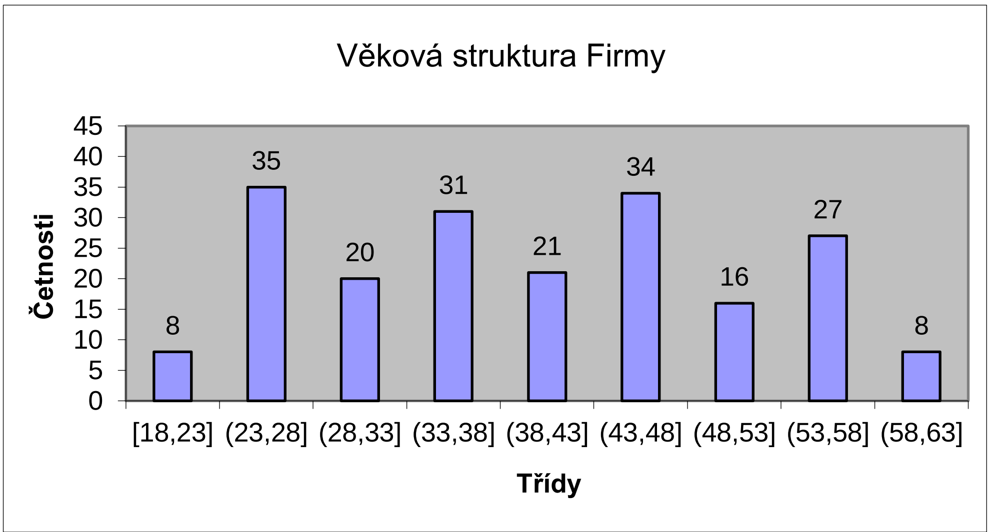
$L = 18$ a $P = 63$. Šířku třídy dostaneme tak, že rozdělíme celou oblast pokrytou třídami na k stejných intervalů, přičemž k je předem stanovený počet tříd. Šířka třídy z tedy je $z = (P - L)/k$,

konkrétně v našem příkladu obdržíme $z = (63 - 18)/9 = 5$.

Kumulativní četnost v dané třídě je součet četností všech předchozích tříd a četnosti dané třídy. **Relativní četnost** dané třídy je podíl její četnosti a celkového počtu dat. V našem příkladu je relativní četnost třídy "větší rovno 18 a zároveň menší než 23" rovna 7/200 = 0,035. **Kumulativní relativní četnost** dané třídy je součet relativních četností všech předchozích tříd a dané třídy.

Histogram četnosti představuje sloupcový graf znázorňující rozdělení četnosti pro kvantitativní znak. Spojením středů horních základen jednotlivých sloupců v histogramu lomenou čarou získáme **polygon četnosti**.

Třídy	Četnost	Kumulativní četnost	Relativní četnost	Kumulat. relat. četnost
[18,23]	8	8	0,040	0,040
(23,28]	35	43	0,175	0,215
(28,33]	20	63	0,100	0,315
(33,38]	31	94	0,155	0,470
(38,43]	21	115	0,105	0,575
(43,48]	34	149	0,170	0,745
(48,53]	16	165	0,080	0,825
(53,58]	27	192	0,135	0,960
(58,63]	8	200	0,040	1,000



Obrázek 14: Rozdělení četnosti

Jak je vidět z našeho příkladu, rozdělení četnosti jako statistická metoda poskytuje komplexní pohled na sledovanou problematiku věkové struktury zaměstnanců Firmy.

5.3.2 Modus a medián

Nejčetnější hodnota statistického znaku x v daném statistickém souboru se nazývá *modus* a označuje se $\hat{x}$. Avšak u kvantitativních dat, zejména pak spojitých, ztrácí modus na významu, neboť s tím, jak mohou hodnoty nabývat libovolných čísel, stává se zřídka, že se stejné hodnoty vícekrát opakují. Nastává situace, kdy módem je každá hodnota s počtem opakování 1. Proto v případě kvantitativních dat pojem modus modifikujeme a používáme pojem **modální třída**, což je nejčetnější třída v daném rozdělení četnosti. Modální třída pak ovšem není jediné číslo, jako v případě modu, ale celý interval čísel, jehož velikost závisí na zvolené metodě rozdělení četnosti. Může se tedy stát (možná pro někoho poněkud paradoxně), že modus neleží v modální třídě.

Medián představuje hodnotu odpovídající prostřední jednotce v souboru jednotek uspořádaných podle kvantitativního znaku x, to je takovou hodnotu, kdy existuje stejný počet jednotek v souboru s menší nebo stejnou hodnotou znaku a jednotek s větší nebo stejnou hodnotou. Při sudém počtu statistických jednotek neexistuje pochopitelně žádná prostřední jednotka, prostřední jednotky jsou (sousední) dvě a medián se pak definuje jako hodnota menší z nich. V případě kvantitativního znaku se v literatuře můžete setkat s tím, že se medián definuje jako aritmetický průměr těchto dvou sousedních hodnot.

5.3.3 Kvantily

Mezi charakteristiky polohy patří také tzv. kvantily. **Kvantil** je taková hodnota, která rozděluje (uspořádaný) soubor hodnot určitého znaku na dvě specifikované části. Jedna obsahuje statistické jednotky s hodnotami, které jsou menší nebo rovny kvantilu, druhá obsahuje hodnoty, které jsou větší, nebo se rovnají kvantilu.

Přesněji, **p-procentní kvantit** x_p je nejmenší hodnota znaku, pro kterou platí:

1. alespoň p procent všech jednotek má hodnotu menší nebo rovnu x_p,

2. alespoň (100 – p) procent všech jednotek má hodnotu větší (eventuálně rovnu) x_p.

Podle této definice je medián 50-procentním kvantilem. Je obvyklé, že 25 % a 75 % kvantily nazýváme **kvartily** (dolní a horní). Dále 10 %, 20 %, 30 %,...,90 % kvantily nazýváme **decily**, 1 %, 2 %, 3 %,..., 99 % kvantily se nazývají **percentily**

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Uvažujme následující soubor hodnot 21 nákupů v supermarketu uspořádaných podle velikosti:

102, 121, 123, 123, 123, 123, 215, 215, 233, 289, 320, 320, 320, 435, 450, 450, 500, 550, 580, 876, 1236.

Stanovte 20 a 25 % kvantily: x_{20}, x_{25}.

Řešení.

Víme, že 20 % z 21 jednotek je 4,2. Ukážeme, že pro 20 % kvantil platí: $x_{20} = 123$. Je tedy splněna druhá podmínka z definice kvantilu, totiž, že více než 80 % jednotek má hodnotu větší nebo rovnu 123.

Ze stejného důvodu je číslo 123 p-procentním kvantilem pro každé p z intervalu (9,52; 28,57], tedy speciálně platí $x_{25} = 123$. Jak je vidět, pro různé hodnoty p dostáváme stejný p % kvantil. Pro konkrétní hodnotu p však v souboru existuje pouze jediný kvantil! Z tohoto důvodu je v definici kvantilu podmínka, že jde o nejmenší hodnotu splňující podmínky 1 a 2.

5.3.4 PRŮMĚRY

Aritmetický průměr stanovíme tak, že sečteme jednotlivé výsledky měření nebo zjišťování a dělíme celkový součet počtem jednotek. Rozlišujeme přitom průměr z celého souboru údajů (např. všech obyvatel republiky), nebo jen z určitého vzorku – výběru (např. náhodně dotazovaných chodců na Univerzitním náměstí v Karviné). Ten první nazýváme **populačním průměrem** a označujeme jej řeckým písmenem μ (mí), pro ten druhý používáme označení x s horním pruhem, tedy $\bar{x}$ a nazýváme jej **výběrovým průměrem**. Zda se jedná o výběrový nebo populační průměr, závisí na konkrétní situaci. Vybereme-li z populace všechny prvky, pak výběrový a populační soubor budou totožné. Matematické vyjádření je následující:

$$\textit{populační průměr: } \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \qquad (5.1)$$

$$\textit{výběrový průměr: } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (5.2)$$

Přitom N představuje počet statistických jednotek v populačního souboru, n představuje počet jednotek v příslušného výběru. Pro aritmetický průměr platí:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu) = 0, \text{ resp.} \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0.$$

5.3.5 VARIAČNÍ ROZPĚTÍ, ROZPTYL, SMĚRODATNÁ ODCHYLKA

Variační rozpětí je dáno vztahem: R = MAX – MIN.

Rozptyl je aritmetickým průměrem kvadrátů odchylek od aritmetického průměru. Podle toho, zda se jedná o rozptyl z celého souboru – celé populace, nebo jen rozptyl z jistého vzorku – výběru z této populace, rozlišujeme populační rozptyl, kterému říkáme jednoduše **rozptyl**, označujeme jej σ^2 ("sigma na druhou"), a **výběrový rozptyl**, označujeme jej s^2 ("es na druhou"). Jedná se o analogii s průměrem a výběrovým průměrem. Vzorce pro výpočet průměru a výběrového průměru se formálně nelišily, u rozptylů však dochází k drobné odlišnosti obou vzorců. Zatímco u rozptylu (populačního) se součet kvadrátů dělí počtem všech sčítanců, u výběrového rozptylu se součet čtverců dělí počtem sčítanců zmenšeným o jeden.

Vzorce vypadají následovně:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\mu^2, \tag{5.3}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}. \tag{5.4}$$

Směrodatná odchylka je odmocninou z rozptylu. Ve shodě s předchozí terminologií rozlišujeme **populační směrodatnou odchylku**, označujeme ji σ, a říkáme jí **směrodatná odchylka**, a **výběrovou směrodatnou odchylku**, která je odmocninou z výběrového rozptylu, označujeme s.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Z osobních záznamů vybraných pěti zaměstnanců jisté firmy o počtu dnů nepřítomnosti v minulem roce dostáváme tato data:

Osobní číslo zaměstnance	Počet dnů nemoci
10786	3
10954	3
21334	4
23156	7
36511	8

Řešení.

Jaký je průměrný počet dnů nepřítomnosti, rozptyl a směrodatná odchylka?

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{3^2+\ldots+8^2-5\cdot5^2}{4} = \frac{22}{4} = 5{,}5$$

$$s = \sqrt{5{,}5} = 2{,}35$$

Průměrný počet dnů nepřítomnosti je 5, rozptyl je 5,5 a směrodatná odchylka je 2,35 dne.

5.3.6 VARIAČNÍ KOEFICIENT

Variační koeficient je nástroj nezávislý na měrných jednotkách. Používá se často jako míra rizika cenných papírů při investování. Definujeme jej jako podíl průměru a směrodatné odchylky a vyjadřujeme jej často v procentech:

$$V = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \text{resp.} \quad v = \frac{s}{\bar{x}}, \tag{5.5}$$

podle toho, jedná-li se o populační, resp. výběrový variační koeficient. Pro vyjádření variačního koeficientu v procentech (z průměru) násobíme výraz ve (5.5) číslem 100.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Aritmetický průměr denních cen akcie A za uplynulý rok je 580 Kč, přičemž směrodatná odchylka je 150 Kč. Stejně tak pro akcie B byl průměr 270 Kč a směrodatná odchylka je 90 Kč. U kterých akcií kolísala cena více?

Řešení.

Kolísání ceny akcií vyjádříme pomocí variačního koeficientu (5.5): 25,8 %, resp. 33,3 %.

Z výpočtu je zřejmé, že cena akcií B kolísala více než A. Při finančních analýzách slouží jak směrodatná odchylka, tak zejména variační koeficient, jako **míra rizika**. Proto můžeme konstatovat, že akcie A jsou méně rizikové, než akcie B.

5.3.7 KOEFICIENT ŠIKMOSTI

Koeficient šikmosti vyjadřuje tvar rozdělení četnosti pomocí jediného čísla. Koeficient šikmosti definujeme následovně:

$$S_k = \frac{3(\mu - \tilde{x})}{\sigma}, \tag{5.6}$$

kde μ je populační aritmetický průměr a je medián. Koeficient *výběrové šikmosti* má analogický tvar, populační charakteristiky μ, resp. σ jsou nahrazeny výběrovými charakteristikami , resp. s, tedy $s_k = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s}$.

Pokud je tato šikmost rovna nule, potom je histogram četnosti symetrický v tom smyslu, že medián a aritmetický průměr (případně i modus) jsou stejné. Koeficient šikmosti je tím menší (záporný), čím je graf polygonu četnosti více zešikmen doleva, naopak, šikmost je tím větší (kladná), čím je graf zešikmen více doprava.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Kreditní kancelář obchodního domu TREFA zasílá pravidelně svým zákazníkům výkaz o dlužných částkách. Ty jsou zaznamenány v tabulce:

337,00	563,20	109,70	450,90
570,50	398,90	501,20	594,90
99,70	625,40	201,50	421,60
759,30	214,70	99,60	344,20
486,70	360,50	637,50	185,60
352,60	177,60	327,60	681,00
214,90	827,00	539,10	397,30
59,70	300,60	150,00	790,10
212,50	501,00	417,20	271,80
948,60	199,20	250,10	514,50

a. Analyzujte soubor metodou rozdělení četnosti.
b. Nalezněte aritmetický průměr, medián a modální třídu dlužných částek.
c. Nalezněte rozpětí, směrodatnou odchylku, variační koeficient a šikmost dlužných částek.

Řešení.

a. Podle Sturgersova pravidla stanovte počet tříd $k = 6$. Protože minimální hodnota uvedeného souboru dat je $\min = 59{,}70$ a maximální hodnota $\max = 948{,}60$, je vhodné volit dolní hranici první třídy $L = 50$ a horní hranici poslední třídy $P = 950$. Šířka každé třídy je (950-50)/6 = 150.
Znáte-li četnosti jednotlivých tříd, sestrojíte histogram četnosti. Jedná se o sloupcový graf, jehož každý sloupec má výšku přímo úměrnou četnosti příslušné třídy.

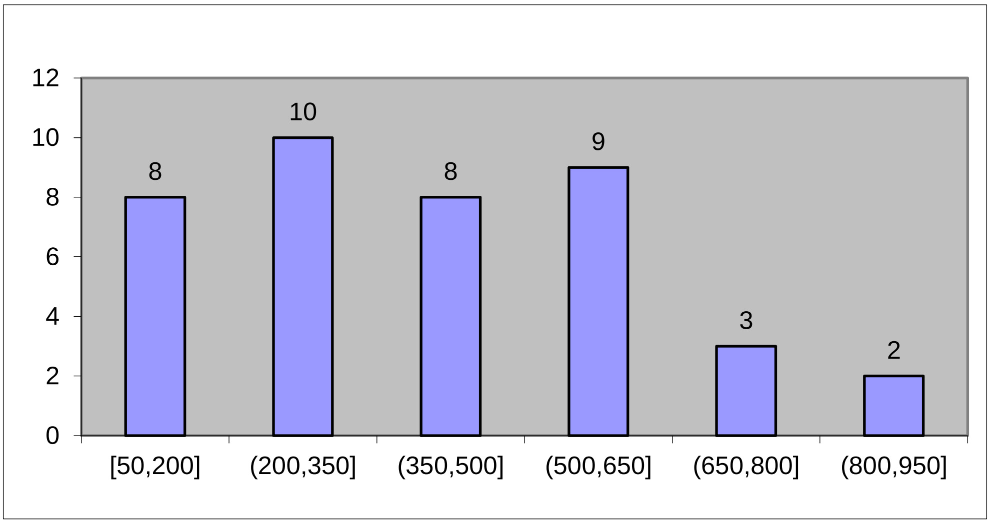
Třída	Četnost
[50,200]	8
(200,350]	10
(350,500]	8
(500,650]	9
(650,800]	3
(800,950]	2

b. Aritmetický průměr souboru Dlužné částky stanovíte podle (5.1):

$$\mu = 402{,}375 \,.$$

Medián Dlužné částky je hodnota odpovídající prostřední jednotce v souboru jednotek uspořádaných podle znaku Dlužné částky. Protože však je počet jednotek v souboru sudý, je to hodnota odpovídající 20. hodnotě v uspořádaní od nejnižší do nejvyšší, tedy 360,50.

Z Obr. 15 vyplývá, že modální třída příslušná k výše uvedenému rozdělení četnosti je interval (200; 350].



Obrázek 15: Graf četnosti dlužné částky

c. Rozpětí R vypočítáme jako $R = 948{,}6 - 59{,}7 = 888{,}9$.
Směrodatná odchylka $\sigma = 217{,}65$.
Variační koeficient: $V = 54{,}09\ \%$.
Šikmost: $S_k = 0{,}577$, tedy histogram četnosti je nesymetrický, mírně vychýlený směrem doprava.

5.4 Paradoxy v teorii pravděpodobnosti

Ve světě pravděpodobnosti se často setkáváme s fascinujícími situacemi, které na první pohled mohou působit zmateně nebo zdánlivě protichůdně. Tyto situace, které v sobě nesou rozpor nebo neintuitivní chování, jsou známy jako paradoxy v teorii pravděpodobnosti. Ačkoli mohou být na první pohled zmatené, mohou nám tyto paradoxy pomoci lépe porozumět základním principům pravděpodobnosti a rozhodování.

V této kapitole se zaměříme na několik klíčových paradoxů v oblasti teorie pravděpodobnosti, zkoumajících různé aspekty pravděpodobnostních jevů a rozhodování. Prozkoumáme jejich historii, matematické pozadí a praktické důsledky, abychom lépe porozuměli jejich podstatě a vlivu na naše chápání pravděpodobnostních jevů ve světě kolem nás. Tato kapitola využívá informací ze zdroje Matematika polopatě (https://www.matweb.cz/kategorie-kombinatorika/), záložka Paradoxy.

5.4.1 Problém tří dveří

Problém tří dveří, někdy též Monty-Hallův problém, je pravděpodobností úloha, která nejednoho člověka dokáže zmást.

Mějme troje dveře. Moderátor Monty Hall umístil za jedny dveře auto, za ostatní dveře umístí koloběžku. Vaším úkolem je najít a vybrat ty dveře, za kterými je auto. V tuto chvíli vás vybídne, abyste si zvolil jedny ze tří dveří, označme je A, B a C. Vy si vyberete jedny dveře, řekněme B. Dále vstupuje do hry moderátor, který ze zbývajících dveří, tj. A, C, otevře ty dveře, za kterými se skrývá koloběžka — tedy prozradí vám dveře, které určitě nevedou k cíli. Řekněme, že otevře dveře A.

Pointa celého problému je v následujícím kroku — moderátor vám nabídne, že můžete svou volbu změnit. Vy jste si nejdřív vybral dveře B, pak vám moderátor řekl, že za dveřmi A auto není a nabízí vám, že můžete změnit svou volbu na dveře C. Ale můžete si ponechat svou původní volbu B.

Jak se rozhodnete? Je větší šance, že auto bude za dveřmi B, nebo za dveřmi C? Nebo je to jedno?

Řešení

Máte troje dveře. Jedny dveře jsou ze hry, takže vlastně máte už jen dvoje dveře. Za jedněmi z těchto dveří určitě auto je. O zbývajících dvou dveří nic nevíte, žádnou další indicii k dispozici nemáte. Takže pravděpodobnost je samozřejmě 50 % u obou dveří. Řešení je to ale samozřejmě špatné.

Vyplatí se změnit svou volbu na ty dveře, které moderátor nevyřadil. K pochopení si můžeme rozepsat pravděpodobnosti od začátku. Když si poprvé volíte dveře, tak pravděpodobnost, že zrovna za nimi bude auto, je 1/3. Žádnou další indicii nemáme, takže pravděpodobnost je rozdělena rovnoměrně, 1/3 pro každé dveře.

Takže pokud si zvolíte dveře B, máte šanci 1/3, že je za nimi auto. Zároveň existuje 2/3 pravděpodobnost, že se auto nachází za dveřmi A, nebo C. Je tedy pravděpodobnější, že se auto nachází za dveřmi, které jsme nezvolili.

V dalším kroku vstupuje do hry moderátor a otevře jedny z dveří, za kterými není auto. Moderátor otevře dveře A. Za dveřmi A tak auto není. Co se stane s tou 2/3 pravděpodobností? Víme, že pravděpodobnost, že je auto za dveřmi A, nebo C je 2/3 a zároveň víme, že za dveřmi A není. 2/3 pravděpodobnost se tak přelije na dveře C. Šance, že auto je za dveřmi C je 2/3.

Naše šance u dveří B ale zůstává stále stejná, ta se nijak nezměnila. Takže máme 1/3 šanci, že je auto za dveřmi B, které jsme zvolili, a 2/3 šanci, že je za dveřmi C, na které můžeme svou volbu změnit. Je tak rozumné svou volbu změnit.

Více dveří

Příkladu lze možná lépe porozumět, pokud zvýšíme počet dveří a modifikujeme úlohu takto: mějme deset dveří. Na začátku si soutěžící vybere jedny dveře a moderátor otevře všechny dveře, kromě těch, které jsme zvolili a kromě těch, za kterými je auto. Zadání je prakticky stejné jako v předchozím příkladu.

Na začátku si vyberete dveře 1. Šance, že je za nimi auto je 1/10. Je 9/10 pravděpodobnost, že je auto za jinými dveřmi. Dále moderátor odstraní 8 dveří, za kterými určitě auto není a zůstanou vám opět jen dvoje dveře. Šance, že je auto za dveřmi, které vám moderátor ponechal, je 9/10, zatímco šance, že je za vašimi vybranými dveřmi je stále 1/10.

5.4.2 Pravděpodobnostní lhářův paradox

Tento příklad je podobný klasickému paradoxu lháře, pouze je převeden do pravděpodobnosti.

Pokud náhodně zvolíte odpověď na tuto otázku, jaká je šance, že bude daná odpověď správná?

A) 25 %

B) 50 %

C) 0 %

D) 25 %

Původní lhářův paradox

Příklad trpí klasickým problém úloh, které se odkazují na sebe. Proto byl výše zmiňován paradox lháře, který může znít takto: „Tato věta je nepravdivá“. Paradox je v tom, že pokud je ona věta opravdu nepravdivá, tak věta říká pravdu. Pokud ale věta říká pravdu, tak přece nemůže být pravdivá, vždyť to sama o sobě tvrdí!

Řešení

V řešení předpokládáme rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti, takže každou odpověď můžeme náhodně zvolit s pravděpodobností 25 %.

Předpokládejme, že odpověď A je správná. Zde je podstatné, že v odpovědi D je stejné procento, takže pravděpodobnost, že zvolíme odpověď 25 % je 50 %. Proto nemůže být odpověď A, ani D, správná.

Pravděpodobnost, že zvolíme odpověď B je 25 %. Proto ani odpověď B nemůže být správná, protože ta říká, že máme 50% šanci na zvolení správné odpovědi.

Pravděpodobnost, že zvolíme odpověď C je 25 %. Proto ani odpověď C nemůže být správná, protože ta říká, že máme 0% šanci na zvolení správné odpovědi.

Jak je vidět, žádná z odpovědí není správná. Jakou tak máme šanci, že zvolíme správnou odpověď? Pokud žádná z odpovědí není správná, tak máme 0% šanci, že zvolíme správnou odpověď. Což je ovšem spor s tím, že my ve skutečnosti máme 25% pravděpodobnost, že zvolíme odpověď, která říká, že máme 0% šanci.

Úloha tak nemá řešení, je to takový hezký paradox, podobně jako klasický lhářův paradox.

5.4.3 SIMPSONŮV PARADOX

Simpsonův paradox je statistický paradox pojmenovaný po britském statistikovi. Paradox spočívá v tom, že máme-li dva subjekty, přičemž jeden z nich je ve všech pozorováních úspěšnější než druhý, může se stát, že v celkovém součtu bude úspěšnější ten druhý.

Máme dva různé studenty na dvou různých školách studující dva různé obory. Říkejme jim Jana a Martin. Oba dva píší za semestr ve svém předmětu dva testy. Jana má v prvním úspěšnost 30 %, ve druhém 100 %. Martin má v prvním úspěšnost 25 %, ve druhém 75 %.

Zdá se, že Jana je úspěšnější studentka. Ovšem pokud doplníme počet správně zodpovězených otázek, už se to tak nemusí jevit. Podstatou problému je, že Jana s Martinem psali různé testy, protože chodili na různé školy.

Jana totiž v prvním testu mohla odpovědět správně na 3 z 10 otázek (30% úspěšnost) a pak na 2 ze 2 otázek (100%). Celkem tak zodpověděla správně 5 z 12 otázek. Martin mohl zodpovědět správně 1 ze 4 (25%) a pak 6 z 8 otázek (75%). Celkem tak zodpověděl 7 z 12 otázek. Z tohoto pohledu už je zase úspěšnější Martin.

Simpsonův paradox je docela obvyklý a není na něm nic nepochopitelného. Je pojmenovaný po Edwardu H. Simpsonovi, který tento jev jako první pořádně popsal — první výskyty tohoto paradoxu samozřejmě byly i předtím.

5.4.4 PETROHRADSKÝ PARADOX

Petrohradský paradox míchá dohromady statistiku, rozhodování a pravděpodobnost. V Petrohradě máme kasino, které nám nabízí hru, ve které můžeme vyhrát určité množství peněz. Naším úkolem je zjistit, jaké by bylo férové vstupné do této hry.

Pokud vstoupíme do hry, začne krupiér házet mincí. Pokud v prvním hodu padne hlava, hra končí a my jsme vyhráli jeden dolar. Pokud padne orel, hra pokračuje dále. V druhém kole se opět hází mincí. Pokud padne hlava, hra končí a my jsme vyhráli dvojnásobek předchozí možné výhry, tedy dva dolary. Pokud padne orel, pokračujeme dále. Padne-li ve třetím kole hlava, vyhráváme čtyři dolary. Padne-li ve čtvrtém kole, vyhráváme osm dolarů.

Když to zobecníme — pokud padla hlava v k-tém kole, pak jsme vyhráli 2^{k-1} dolarů. Otázka nyní zní, jaké by bylo férové vstupné do této hry?

Férová cena by se měla odvíjet od očekávané (střední) hodnoty. Pokud například v průměru můžeme vyhrát sto dolarů, mělo by být vstupné sto dolarů, respektive o trochu víc, aby kasino vydělalo. Jaká je ovšem očekávaná hodnota v naší hře? Rozepíšeme si pravděpodobnosti, s jakými můžeme získat jednotlivé výhry. V prvním sloupci jsou výhry, ve druhém je naše šance, že na danou výhru dosáhneme. Například šance, že v prvním hodu padne hlava je $\frac{1}{2}$. Šance, že padne nejdříve orel a pak hlava je $\frac{1}{4}$.

1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{8}$
8	$\frac{1}{16}$
…	…

Jak nyní spočítáme střední hodnotu? Vynásobíme částku, kterou můžeme získat s pravděpodobností, se kterou na tuto částku můžeme dosáhnout a všechno sečteme. Dostáváme:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

Očekávaná hodnota je nekonečno. Střední hodnota výhry je tak, v idealizovaném případě, nekonečně mnoho dolarů. To nevypadá špatně. Problémem je, že zároveň i vstup by měl být rovný nekonečnu. To je samozřejmě nesmysl.

Kritici tohoto paradoxu samozřejmě namítají, že nemůžete hrát nekonečně dlouhou dobu, nemůžeme vyhrát nekonečné množství peněz a dokonce i když „snížíte“ počet maximálních hodů mincí z nekonečna na nějaké konečné číslo n, pak se stejně poměrně brzy dostanete do takových částek, které nikdo na světě nemá. Například po 41 hodech už byste vyhráli 2^{40} dolarů, což je přibližně bilion dolarů (tisíc miliard dolarů). Po dalších deseti hodech byste vyhráli tisíckrát více peněz.

Nekonečně mnoho dolarů vám samozřejmě nikdo na vstupném nedá. Nicméně paradox lze částečně předvést i s konečným množstvím peněz. Pro každou celodolarovou částku totiž existuje maximální počet hodů mincí, pro kterou vyjde střední hodnota taková, jakou potřebujeme. Pokud například chceme mít vstupné tisíc dolarů, řekneme, že maximální počet hodů mincí je 2000. Pak počítáme takovouto sumu:

$$\sum_{k=1}^{2000} \frac{1}{2} = 2000 \cdot \frac{1}{2} = 1000.$$

Střední hodnota pak bude 1000 dolarů. Chceme-li mít vstupné ve výši D dolarů, pak řekneme, že maximální počet hodů mincí je $2D$.

Ale žádný rozumný člověk nezaplatí vstupné například tisíc dolarů, pokud má naprosto minimální šanci, že vyhraje více než tisíc dolarů.

SAMOSTATNÉ ÚKOLY

Ano či ne?...

1) Souhrn statistických jednotek stejného vymezení tvoří statistický soubor.
2) Diskrétní statistický znak nabývá izolovaných nečíselných kategorií.
3) Modus lze použít pouze pro kvalitativní data.
4) Medián je hodnota odpovídající prostřední jednotce v souboru jednotek uspořádaných podle ordinálního ukazatele.
5) Rozdělení četnosti představuje základní metodu analýzy statistických dat.

Doplňte...

6) Jsou-li kategorie statistického znaku uspořádány podle nějakého hlediska, jde o ________________.
7) Mají-li v souboru dvě kategorie jistého znaku stejnou četnost, jedná se o znak ________________.
8) Výchozím zdrojem dat pro statistickou analýzu je statistický soubor ve tvaru ________________.
9) Při sudém počtu statistických jednotek neexistuje žádná prostřední jednotka, prostřední jednotky jsou dvě sousední a medián se pak definuje jako hodnota ________________.
10) Modus lze stanovit pro každý kvalitativní znak, zatímco medián pouze pro znak ________________.

11) Následující soubor dat dokumentuje počet dní opoždění odhadovaného termínu ukončení 30 konstrukčních projektů stavební firmy (záporné hodnoty znamenají ukončení projektu v předstihu):

4	31	-9	14	8	36
23	16	15	7	-3	12
-6	23	-2	6	5	-8
12	6	0	21	11	6
-20	11	4	-1	7	-2

Nalezněte aritmetický průměr, medián, modus, rozpětí a směrodatnou odchylku.

12) Tabulka uvádí průměrné měsíční příjmy v některých průmyslových odvětvích, dosahované v roce 2000.

Průmysl	Příjem (Kč)
Hutnický	16 400
Elektrotechnický	14 200
Strojírenský	15 600
Chemický	14 200
Oděvní	13 400
Dřevařský	16 400
Potravinářský	13 900
Polygrafický	14 200

a. Vypočtěte výběrový průměr, medián a modus.
b. Vypočtěte výběrový rozptyl, výběrovou směrodatnou odchylku, variační koeficient a šikmost.

13) Pro jistý výběrový soubor dat platí:

$$n = 6, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 18 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 82$$

a. Vypočtěte výběrový průměr.
b. Vypočtěte výběrový rozptyl a výběrovou směrodatnou odchylku.

14) Následující tabulka obsahuje údaje o věku skupiny čtyř osob. Určete věk osoby C.

Osoba	Věk	Odchylka od $\bar{x}$
A	17	-8
B	-	+7
C	-	-
D	-	-4

15) Během 50 týdnů dosáhla firma prodávající počítače těchto výsledků:

Počet prodaných počítačů za 1 týden	Počet týdnů
0	28
1	15
2	6
3	1
více než 3	0

Vypočtěte charakteristiky polohy a variability týdenního odbytu firmy.

ODPOVĚDI

Ano či ne?...

1) Ano
2) Ne

3) Ne
4) Ano
5) Ano

Doplňte ...

6) Ordinální znak
7) Bimodální
8) Datové matice
9) Menší z nich
10) Ordinální

11) $\mu = 7{,}57$; $\tilde{x} = 6$; $\hat{x} = 6$; $R = 56$; $\sigma = 11{,}79$
12) **a.** $\bar{x} = 14788$; $\hat{x} = \tilde{x} = 14200$
b. $s^2 = 1372678{,}6$;$s = 1171{,}6$; $v = 7{,}92\%$; $s_k = 1{,}5$
13) **a.** $\bar{x} = 3$
b. $s^2 = 5{,}6$**;** $s = 2{,}37$
14) věk C = 30
15) μ = 0,6; $\tilde{x}$= 0; $\hat{x}$= 0; σ^2= 0,6; σ = 0,77

SHRNUTÍ KAPITOLY

Popisná statistika je v ekonomii důležitým nástrojem pro sběr, organizaci, shrnutí a interpretaci dat. Tato statistická metoda umožňuje ekonomům analyzovat a porozumět chování ekonomiky, trhů a jednotlivých ekonomických proměnných.

Nejpoužívanějšími charakteristikami polohy jsou modus, medián a průměry. Nejběžnější z průměrů je aritmetický průměr. Medián je jednoduchou a srozumitelnou mírou, na rozdíl od průměru není ovlivněn extrémními hodnotami. Hodí se pro charakterizaci nesymetricky rozdělených dat. Modus může být poněkud zkreslující charakteristikou polohy zejména v případech nesymetrického rozdělení dat. Často jej například používají prodejci při objednávání zboží k maloobchodnímu prodeji. U spojitého kvantitativního znaku je vhodnější používat modální třídy, což je nejčetnější třída v daném rozdělení četnosti.

Mezi charakteristiky polohy patří také kvantily. *P*-% kvantil je taková hodnota, která rozděluje (uspořádaný) soubor hodnot určitého znaku na dvě specifikované části. Kromě charakteristiky polohy je často zapotřebí charakterizovat také proměnlivost – variabilitu hodnot statistického znaku. Při hodnocení variability poskytuje rozpětí R jednoduchou charakteristiku, jeho nevýhodou je, že uvažuje jen dvě krajní hodnoty, a proto může být nereprezentativní. Rozptyl σ^2, resp. s^2 a směrodatná odchylka σ, resp. s, využívají všech hodnot, i když vyžadují náročnější výpočet i interpretaci. Ke srovnávání variability dvou či více souborů dat je nejvhodnější variační koeficient V, resp. v. Koeficient šikmosti je mírou symetrie dat.

Celkově lze říci, že popisná statistika je nedílnou součástí ekonomické analýzy a výzkumu. Pomáhá ekonomům a analytikům získat přehled o ekonomických proměnných, identifikovat vzory a trendy v datech a poskytuje základ pro další kvantitativní analýzy a modelování.

6 DISKRÉTNÍ A SPOJITÉ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

V této kapitole se nejprve seznámíme se spojitou a diskrétní náhodnou veličinou. V dalším textu se pak budeme věnovat diskrétnímu rozdělení pravděpodobnosti (stejnoměrné, binomické, Poissonovo). V ekonomické oblasti je to především tam, kde hledáme odpověď na otázky spojené s množstvím, resp. kvalitou výroby a služeb, nabídkou a poptávkou, počtem zákazníků (klientů, pacientů) aj. O který typ se v určité situaci jedná, víme obvykle ze zkušenosti, v konkrétním případě je však obvykle zapotřebí stanovit předem neznámé parametry těchto rozdělení. Dále se seznámíme se spojitým rozdělením pravděpodobnosti (stejnoměrným, normálním, exponenciálním).

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- určit, zda se jedná o předpis diskrétní náhodné veličiny,
- vypočítat pravděpodobnost pro diskrétní pravděpodobnostní modely,
- vypočítat pravděpodobnost pro spojité pravděpodobnostní modely,
- uvést konkrétní příklady pravděpodobnostních modelů.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 120 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, Binomické rozdělení, Poissonovo rozdělení, spojité rozdělení pravděpodobnosti, exponenciální rozdělení, normální rozdělení.

6.1 Diskrétní a spojitá náhodná veličina

Diskrétní náhodnou veličinou nazýváme takovou veličinu, jež může nabývat omezeně nebo neomezeně mnoha hodnot, jimž lze přidělit celočíselné kódy. **Spojitou náhodnou veličinou** nazveme pak takovou náhodnou veličinu, jejímiž možnými hodnotami jsou všechna reálná čísla z daného intervalu (omezeného nebo neomezeného). I zde je zřejmá analogie s diskrétními a spojitými statistickými znaky. Náhodná veličina je tedy matematickým modelem (matematickým zobecněním) statistického znaku.

Pravidlo (předpis), které každé číselné hodnotě nebo intervalu hodnot přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty nebo hodnoty z tohoto intervalu, se nazývá **rozdělením náhodné veličiny**. Rozdělení náhodné veličiny budeme vyjadřovat dvěma způsoby, z nichž každý má své přednosti a nedostatky.

Prvním z prostředků popisu rozdělení náhodné veličiny je **distribuční funkce,** která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší nebo rovno, než toto číslo. Distribuční funkci náhodné veličiny X označíme F, je to tedy funkce definovaná pro všechna reálná čísla s hodnotami v intervalu [0,1], což zapisujeme takto: $F : \mathbf{R} \to [0,1]$. Podle výše uvedené definice platí:

$$F(x) = P(X \leq x), \tag{6.1}$$

kde výraz na pravé straně (5.1) označuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovné číslu x.
Distribuční funkce má tyto vlastnosti:

1. Hodnoty distribuční funkce leží mezi 0 a 1, neboť jsou to jisté pravděpodobnosti a pro ty platí stejné omezení.

2. Distribuční funkce je funkcí neklesající, tj. pro všechna $x_1 > x_2$ platí:

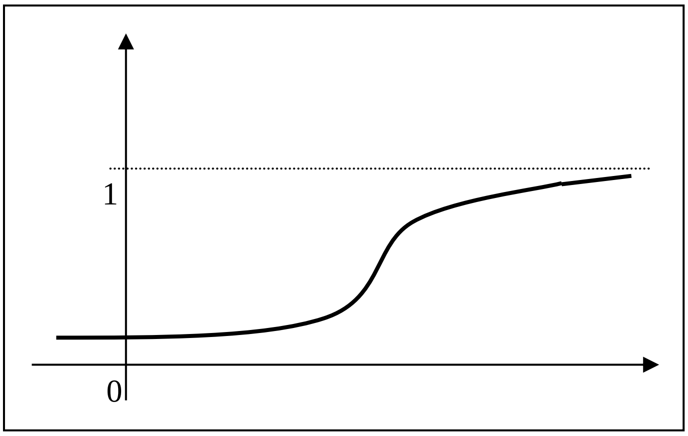
$$F(x_2) \geq F(x_1)\ .$$

Tato vlastnost vyplývá z definice (6.1), neboť pravděpodobnost, že hodnota padne do větší množiny, musí být rovněž větší.

3. Pro krajní hodnoty distribuční funkce platí:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Uvedené vlastnosti jsou znázorněny na Obr.16, kde je uveden typický tvar distribuční funkce spojité náhodné veličiny.



Obrázek 16: Distribuční funkce

Pomocí distribuční funkce můžeme udávat jak rozdělení diskrétní, tak i rozdělení spojitých náhodných veličin. Rozdělení diskrétní náhodné veličiny X lze specifikovat také tzv. **pravděpodobnostní funkcí** $p(x)$, která každému x přiřazuje odpovídající pravděpodobnost: $p(x) = P(X = x)$. (6.2)

Pravděpodobnostní funkce $f(x)$ splňuje vztah:

$$\sum_{x \in X} p(x) = 1, \tag{6.3}$$

neboť náhodná veličina nabude jistě některé z hodnot x, dále platí:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} p(x) , \tag{6.4}$$

tedy pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu [a,b], je rovna součtu pravděpodobností hodnot z tohoto intervalu.

Pravděpodobnostní funkci $f(x)$ vyjadřujeme nejčastěji v matematické formě, tabulkou hodnot, nebo sloupcovým grafem, kde na vodorovné ose jsou hodnoty náhodné veličiny X a na svislé ose pravděpodobnosti $f(x)$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Zákazník potřebuje nakoupit zboží ve 4 odděleních obchodního domu. V každém z oddělení je pravděpodobnost toho, že bude ihned obsloužen bez čekání, rovna 0,5. Náhodná veličina X bude označovat počet oddělení, v nichž bude zákazník ihned obsloužen až do prvního oddělení, kde se bude muset postavit do fronty. Stanovte pravděpodobnostní funkci $p(x)$ a vyjádřete ji tabulkou.

Řešení.

Náhodná veličina X může nabývat hodnoty 0,1,2,3,4.

Pro $x = 0$ (žádné oddělení s obsluhou bez čekání, již v prvním oddělení bude zákazník čekat ve frontě) je příslušná pravděpodobnost $p(0) = 0{,}5$.

Pro $x = 1$ (jedno oddělené absolvuje zákazník bez čekání, ve druhém musí čekat) je pravděpodobnost rovna součinu pravděpodobností jednotlivých jevů, neboť se jedná o jevy nezávislé, tedy $p(1) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

Pro $x = 2,3,4$ vypočteme pravděpodobnosti analogicky:

$p(2) = 0{,}5^2 \cdot 0{,}5 = 0.125,$

$p(3) = 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}0625,$

$p(4) = 0{,}5^4 = 0{,}0625.$

Matematickým předpisem můžeme pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X zapsat takto: $p(x) = 0{,}5 \cdot 0{,}5^x$ pro $x = 0,1,2,3,$

$p(x) = 0{,}5^4$ pro $x = 4$.

Tabulkou lze hodnoty pravděpodobnostní funkce zadat takto:

x	0	1	2	3	4
p(x)	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

Obraťme se nyní ke spojité náhodné veličině. Vedle dříve uvedeného způsobu pomocí distribuční funkce může být rozdělení spojité náhodné veličiny dáno tzv. **hustotou pravděpodobnosti** $f(x)$, což je nezáporná funkce splňující podmínku:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

Mezi hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí platí následující vzájemné vztahy: hustota je derivací distribuční funkce:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad . \tag{6.5}$$

Tato rovnost platí pro všechna x, kde má distribuční funkce derivaci. Naopak, ze vztahu (6.5) plyne, že distribuční funkce náhodné veličiny je neurčitým integrálem (primitivní funkcí) k funkci hustoty, tj.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

6.2 Diskrétní pravděpodobnostní modely

Diskrétní náhodná veličina je taková množina, kde jednotlivé prvky lze očíslovat přirozenými čísly, přičemž každému prvku je navíc přiřazena určitá pravděpodobnost. Klasickým příkladem diskrétní náhodné veličiny je známá hrací kostka.

6.2.1 Stejnoměrné rozdělení

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X, která nabývá právě k různých hodnot: 1, 2, ..., k

se stejnou pravděpodobností $P(x) = \frac{1}{k}$ pro $x = 1, ..., k$.

Říkáme, že náhodná veličina X má **stejnoměrné rozdělení pravděpodobnosti**.

Snadno lze odvodit, že střední hodnota je $E(X) = \frac{k+1}{2}$,

a pro rozptyl dostáváme $Var(X) = \frac{k^2-1}{12}$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Hod kostkou se šesti oky je populárním modelem náhodné veličiny X která nabývá 6 různých hodnot 1,...,6 se stejnou pravděpodobností 1/6 . Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny.

Řešení.

Střední hodnota $E(X) = (6+1)/2 = 3{,}5$, rozptyl $Var(X) = (6^2 - 1)/12 = 2{,}92$.
Stejnoměrné rozdělení pravděpodobnosti má samo o sobě malý praktický význam, slouží jako model stejně pravděpodobných jevů. Svojí jednoduchostí se hodí dobře jako východisko ke složitějším modelům.

6.2.2 BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ

Mnoho procesů poskytuje výstupy, které můžeme zařadit do dvou kategorií. Například výrobky procházející výstupní kontrolou se klasifikují jako "dobré" a "zmetky", pracovníky firmy jistého dne klasifikujeme jako "přítomen" a "nepřítomen", uchazeče v konkurzu označíme "přijat", "nepřijat", apod. Náhodný pokus tohoto typu, tj. se dvěma alternativními navzájem se vylučujícími výsledky, nazýváme **Bernoulliův proces**, někdy také **alternativní rozdělení**.

Binomické rozdělení pravděpodobnosti $P(x|n,p)$ vyjadřuje pravdě-podobnost, že při n-krát opakovaném Bernoulliově procesu nastane x krát úspěch a n-x krát neúspěch:

$$P(x \mid n, p) = \frac{n!}{(n-x)!x!}\, p^x (1-p)^{n-x} \;,$$

kde n a p jsou parametry binomického rozdělení.

Střední hodnotu náhodné veličiny X, která má binomické rozdělení s parametry n a p, lze vypočíst podle vztahu: $E(X) = n{\cdot}p$.

Rozptyl náhodné veličiny X, která má binomické rozdělení s parametry n a p, je dán vztahem: $Var(X) = np(1 - p)$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Jistá mezinárodní marketingová laboratoř odhaduje, že pouze 50 procent výrobků daného podniku je schopno konkurovat zahraniční produkci. Jaká je pravděpodobnost, že právě 4 ze 6 výrobků této firmy jsou úspěšné.

Řešení.

Ze zadání dostáváme $n = 6$, $p = 0,5$, $x = 4$, podle (6.3) $P(4|\ 6,\ 0,5) = 0,234$. Vypočítáme $E(X) = 6 \cdot 0,5 = 3$, $Var(X) = 3 \cdot 0,5 = 1,5$.

6.2.3 POISSONOVO ROZDĚLENÍ

Uvažujme jevy, které nastávají v průběhu časového intervalu, například

- požadavky na telefonní spojení přicházející na ústřednu,
- zákazníci přicházející do prodejny,
- automobily zastavující u benzínového čerpadla.

Označme X náhodnou veličinu, která představuje počet výskytu takového jevu v daném časovém intervalu délky t, např. za jednu minutu, jednu hodinu apod.

U výše jmenovaných jevů můžeme předpokládat splnění následujících 3 vlastností:

1. Počet výskytu jevu v daném intervalu je nezávislý na počtu výskytu tohoto jevu v jiném intervalu.
2. Střední hodnota počtu výskytů jevu v daném intervalu je přímo úměrná délce zvoleného intervalu.
3. Ve velmi malém časovém intervalu může nastat nejvýše jeden výskyt daného jevu.

Náhodný pokus splňující tyto tři podmínky nazýváme **Poissonův proces**. Náhodná veličina X představující počet výskytů jevu Poissonova procesu má **Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti** definované předpisem pro pravděpodobnostní funkci:

$$P(x|\lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!},$$

pro $x = 0,1,2, \dots$. Ve vzorci představují λ, t *parametry* Poissonova rozdělení, λ (lambda) má význam *intenzity* Poissonova procesu, t představuje délku časového intervalu.

Střední hodnota náhodné veličiny X mající Poissonovo rozdělení s parametry λ, t má tvar $E(X) = \lambda\ t$, a pro rozptyl platí $Var(X) = \lambda\ t$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Zákazníci přicházejí náhodně do opravny obuvi s průměrnou intenzitou 4 za hodinu. Zjistěte pravděpodobnost, že do opravny přijdou za hodinu právě 2 zákazníci, vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Řešení.

Podle vzorce dostáváme $P(2|4\ ,1) = \frac{(4)^2 e^{-4}}{2!} = 0{,}146$.

Střední hodnota $E(X) = 4$, rozptyl $Var(X) = 4$, směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{4} = 2$.

6.3 Spojité pravděpodobnostní modely

Spojitou náhodnou veličinou nazveme takovou náhodnou veličinu, jejímiž možnými hodnotami jsou všechna reálná čísla z daného intervalu (omezeného nebo neomezeného). Jsou to například výsledky různých testů, rozměry součástí vyráběných v hromadném výrobním procesu, čekací doby ve frontách, chyby měření a jiné.

6.3.1 Stejnoměrné rozdělení

Mějme spojitou náhodnou veličinu X, která nabývá libovolných reálných číselných hodnot z intervalu $[a,b]$. Funkce $f(x)$, které říkáme hustota pravděpodobnosti této náhodné veličiny, je dána předpisem:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{pro} \quad x \in [a,b],$$
$$= 0 \qquad \text{jinde.}$$

Střední hodnotu, resp. rozptyl dává vzorec: $E(X) = \frac{a+b}{2}$, resp. $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Mějme nyní interval $[c,d]$, který je částí intervalu $[a,b]$, tj. $a \le c < d \le b$. U náhodné veličiny X se stejnoměrným rozdělením pravděpodobnosti je pravděpodobnost jevu spočívajícího v tom, že X nabývá hodnoty z intervalu $[c,d]$, dána vztahem $P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$

.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Autobusy odjíždějí z určité zastávky během dne pravidelně každých 15 minut. V náhodnou dobu přijdete na zastávku.

a) Jaká je pravděpodobnost, že budete na autobus čekat dobu mezi 5 až 10 minutami?

b) Jaká je pravděpodobnost, že budete čekat alespoň 12 minut?

c) Stanovte střední hodnotu a směrodatnou odchylku doby čekání.

Řešení.

Nechť X je spojitá náhodná veličina s následující hustotou:

$$f(x) = \frac{1}{15} \quad \text{pro} \quad 0 \le x \le 15,$$
$$= 0 \quad \text{jinde.}$$

a) S využitím vzorce vypočítáme snadno $P(5 \le X \le 10) = \frac{10-5}{15-0} = \frac{1}{3}$.

b) Analogicky obdržíme $P(X \geq 12) = P(12 \leq X \leq 15) = \dfrac{15-12}{15-0} = \dfrac{1}{5}$.

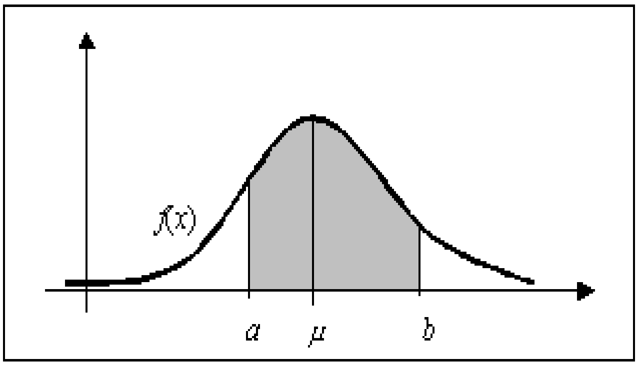
c) $E(X) = \frac{0+15}{2} = 7{,}5$ $\quad Var(X) = \frac{(15-0)^2}{12} = 18{,}75$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$.

Střední čekací doba je 7,5 minut, směrodatná odchylka je 4,33 minut.

6.3.2 Normální rozdělení

Zcela výjimečnou pozici mezi pravděpodobnostními rozděleními spojité náhodné veličiny má **normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti**. Mnoho reálných skutečností v běžném životě se řídí tímto pravděpodobnostním rozdělením. Jsou to například výsledky různých testů, rozměry a hmotnosti součástí vyráběných v hromadném výrobním procesu, tělesné rozměry lidských jedinců, ostatních živočichů, chyby měření a jiné. Dají se jím aproximovat i některá rozdělení diskrétní. Obecně lze říci, že toto rozdělení je použitelné, způsobuje-li kolísání hodnot náhodné veličiny velký počet nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů. Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je dána funkcí:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$



Obrázek 17: Pravděpodobnost a hustota normálního rozdělení

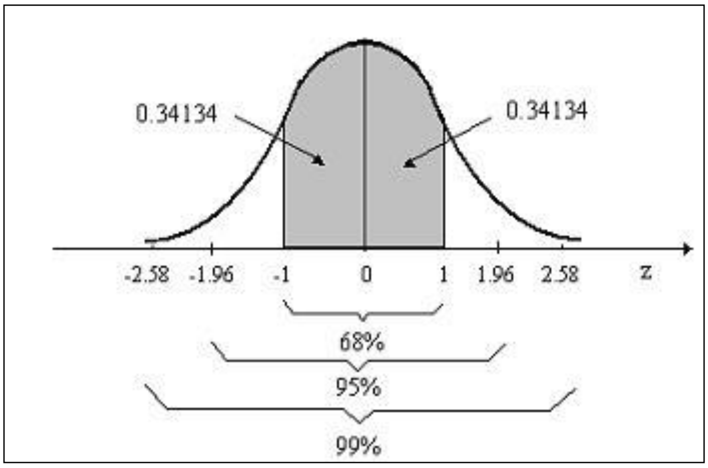
Z praktického hlediska je výhodné vyšetřovat tzv. **normované normální rozdělení**, což je speciální případ normálního rozdělení s hodnotami parametrů $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Tuto náhodnou veličinu, s normovaným normálním rozdělením označujeme symbolem $N(0,1)$.

Hustota normovaného rozdělení $N(0,1)$ pak má tvar: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

Budeme-li uvažovat namísto náhodné veličiny X, mající normální rozdělení s parametry μ a σ, transformovanou veličinu Z takto $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$,

Transformaci nazýváme **standardizace**.

Ještě předtím, než se začnete věnovat výpočtu pravděpodobností u normálně rozdělených veličin, si všimnete významných pravděpodobnostních charakteristik normovaného normálního rozdělení charakterizovaného hustotou, viz Obr. 18.



Obrázek 18: Pravděpodobnosti v normovaném normálním rozdělení

Jak je z obrázku vidět, plocha pod grafem hustoty mezi hodnotami -1 a 1 je rovna 0,683, tedy zaujímá více než 68 % z celkové plochy. Jinak řečeno, v intervalu od mínus do plus jedné směrodatné odchylky od průměru leží 68% procent všech hodnot. V řeči pravděpodobnosti to znamená, že pravděpodobnost, že náhodná veličina *Z* nabude nějakou konkrétní hodnotu z intervalu [-1; 1], je 0,68. Analogicky z obrázku vyplývá, že v intervalu [-1,96 ; 1,96] leží 95% všech hodnot, neboli, pravděpodobnost, že veličina *Z* nabude některou hodnotu z tohoto intervalu, je 0,95. Taktéž lze říci, že v intervalu plus-mínus dvě směrodatné odchylky od průměru leží více než 95% hodnot. Konečně v intervalu [-2,58; 2,58] leží 99% všech hodnot.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Výrobce limonády v plechovkách zjistil, že průměrná hmotnost plechovky limonády je 330 g se směrodatnou odchylkou 10 g.

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná plechovka bude mít hmotnost mezi 325 až 340 gramy?

b) Jaká je pravděpodobnost že hmotnost bude větší než 338 g?

Řešení.

Nejprve budeme počítat pravděpodobnost $P(325 \le X \le 340)$. Užijeme transformaci a vypočítáme nové integrační meze

$$z_1 = \frac{325-330}{10} = -0{,}5\ , \quad z_2 = \frac{340-330}{10} = 1.$$

Z Tabulky 1 (v Příloze) hodnot normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$, nalezнете plochu pod grafem hustoty mezi 0 a 0,5, tj. F(0,5) = 0,191 a protože F(1,0) = 0,341 ze symetrie grafu hustoty N(0,1) platí F(0,5) = F(-0,5). Celkovou pravděpodobnost zjistíme jako součet nalezených pravděpodobností, tedy $P(325 \le X \le 340)$ = 0,532. Odpověď na uvedený problém můžete z řeči pravděpodobnosti převést do popisné statistiky takto: V dostatečně velkém souboru plechovek bude mít 53,2 % z nich hmotnost v rozmezí 325 až 340 gramů.

Dále vypočítáte počítat pravděpodobnost $P(X>338)$, opět užitím známé transformace obdržíte $z_1 = \frac{338-330}{10} = 0{,}8$, $z_2 = +\infty$.

Z Tabulky 1 zjistíte, že hodnotě Z = 0,8 odpovídá hodnota v tabulce 0,288, takže pro hledanou pravděpodobnost bude platit $P(X \geq 338) = 0{,}5 - 0{,}288 = 0{,}212$.

6.3.3 EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{1}{\delta}x}$ pro $x \geq 0$,

nazýváme **exponenciálním rozdělením**. Náhodnou veličinou bývá obvykle čas, v němž nastane sledovaný jev.

Distribuční funkce je dána vztahem $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\delta}x}$ pro $x \geq 0$.
Charakteristiky tohoto rozdělení jsou $E(X) = \delta, Var(X) = \delta^2$.

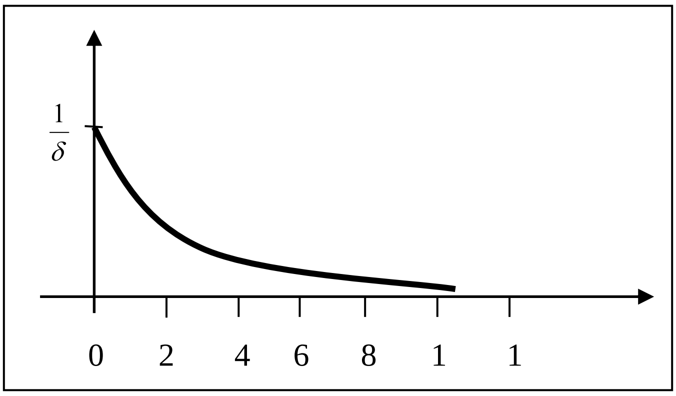
Exponenciální rozdělení slouží jako vhodný model pro výpočet pravděpodobnosti životnosti výrobků, čekacích dob ve frontách na obsluhu apod.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Střední doba obsluhy zákazníka v určité prodejně je 50 sekund, doba čekání se řídí exponenciálním rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude obsloužen v době kratší než 30 sekund?

Řešení.

Hledaná pravděpodobnost $P(X \leq 30) = F(30)$, kde $F(x)$ je distribuční funkce. Přitom je $F(30) = 1 - e^{-\frac{1}{50}30} = 1 - e^{0{,}6} = 0{,}451$.



Obrázek 19: Hustota exponenciálního rozdělení

SAMOSTATNÉ ÚKOLY

1) Rozhodněte, které z následujících předpisů představují diskrétní rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny *X*.

a.

X	*p*(*x*)
0	0,2
1	0,9
2	-0,1

b.

X	*p*(*x*)
-2	0,3
-1	0,3
1	0,3
2	0,3

c.

X	*p*(*x*)
-1	0,25
0	0,65
1	0,10

2) Majitel restaurace zjistil dlouhodobým pozorováním, že 30% účtů je placeno kreditní kartou. Náhodně byly vybrány tři účty. Označme *X* počet z nich placených kreditní kartou. S jakou pravděpodobností jsou alespoň dva účty placeny kreditní kartou?

3)Pozorováním trvajícím mnoho desetiletí se zjistilo, že na každých 1 000 novorozenců připadá průměrně 515 chlapců a 485 děvčat. Uvažujme rodinu se čtyřmi dětmi.

a. S jakou pravděpodobností jsou alespoň dvě z nich děvčata?

b. Jaká je pravděpodobnost, že má rodina čtyři chlapce?

4) Počet nákladních automobilů zastavujících u čerpací stanice za hodinu se řídí ________________ rozdělením pravděpodobnosti.

a. Doplňte chybějící termín.

b. Vypočtěte pravděpodobnost pro $x = 12$ nákladních automobilů.

c. S jakou pravděpodobností zastaví u čerpací stanice během jedné hodiny alespoň 10 nákladních automobilů?

5) Pojišťovací společnost zjistila, že za půl hodiny obdrží v průměru tři oznámení o nehodě pojištěného motorového vozidla.

a. Jaká je pravděpodobnost, že během následujících 20 minut obdrží 4 až 5 oznámení?

b. S jakou pravděpodobností obdrží během následující hodiny alespoň 1 oznámení?

6) Náhodná veličina *X* má normální rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 5. Vypočtěte:

a. $P(X < 92)$.

b. $P(X \le 108)$.

c. $P(X \ge 100)$.

d. $P(X < 120)$.

e. $P(90 \le X \le 110)$.

f. $P(99 \le X \le 101)$.

g. $P(99 < X < 101)$.

h. $P(X = 105)$.

7) Testy nového typu radiálních pneumatik ukazují, že jejich průměrná životnost je 40 000 km, směrodatná odchylka životnosti 3 000 km. Předpokládejme, že životnost pneumatik má přibližně normální rozdělení pravděpodobnosti. Jakou délku záruční doby musí výrobce volit, aby podíl reklamovaných výrobků nepřekročil 1% celkové produkce?

8) Výrobce televizních obrazovek uvádí délku průměrné životnosti jednoho typu 15 let. Za předpokladu, že se životnost obrazovky řídí exponenciálním rozdělením, stanovte:

a. dobu *t* tak, aby obrazovka pracovala bezchybně dobu delší než *t* s pravděpodobností 0,2.

b. maximální životnost, kterou obrazovka dosáhne se stejnou pravděpodobností jako v **a.**

c. pravděpodobnost, že životnost obrazovky překročí délku 20 let.

ODPOVĚDI

1) a. NE, b. NE, c. ANO
2) 0,216
3) **a**. 0,66 **b**. 0,07
4) **a**. Poissonovým **b**. 0,11 **c**. 0,76
5) **a**. 0,13 **b**. 0,99
6) **a**. 0,055 **b**. 0,95 **c**. 0,5 **d**. 1 **e**. 0,95 **f**. 0,16 **g**. 0,16 **h**. 0
7) $\leq$ 33 tis. km
8) **a**. 24,15 let **b**. 3,35 let **c**. 0,26

SHRNUTÍ KAPITOLY

V této kapitole jsme se zabývali některými nejznámějšími pravděpodobnostními modely diskrétní náhodné veličiny. S těmito modely se je možné setkat v běžném životě i při práci v ekonomické, sociální a technické oblasti.

Mezi nejjednodušší modely patří model stejnoměrného rozdělení pravděpodobnosti a alternativní rozdělení pravděpodobnosti neboli Bernoulliův proces. U prvního z nich se všechny diskrétní veličiny nabývají se stejnou pravděpodobností, u druhého vystupují pouze dvě veličiny (alternativní), každá z nich se nabývá obecně s jinou pravděpodobností, jejich součet však je roven jedné.

Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti modelujeme počty výskytů určitého jevu za určitý časový interval, např. počet příchozích zákazníků do prodejny za hodinu, počet požadavků na spojení v telefonní ústředně za minutu, počet projíždějících automobilů určitým místem na dálnici během dopravní špičky apod. Veličiny s Poissonovým rozdělením patří mezi nejčastější modely diskrétní náhodné veličiny. Od binomického rozdělení se zásadně odlišuje tím, že počet výskytu jevu za časovou jednotku není apriori omezen.

Spojitá náhodná veličina nabývá libovolných reálných číselných hodnot z intervalu $[a,b]$. Jestliže hustota takové náhodné veličiny je konstantní funkcí, hovoříme o stejnoměrném rozdělení pravděpodobnosti.

Zcela výjimečnou pozici mezi pravděpodobnostními rozděleními spojité náhodné veličiny má normální rozdělení. Mnoho reálných skutečností v běžném životě se řídí tímto pravděpodobnostním rozdělením. Jsou to například výsledky různých testů, rozměry součástí vyráběných v hromadném výrobním procesu, tělesné rozměry, chyby měření a jiné. Další v praxi se často vyskytující rozdělení je exponenciální rozdělení. Exponenciální rozdělení slouží jako vhodný model pro výpočet pravděpodobnosti životnosti výrobků, čekacích dob ve frontách na obsluhu apod.

7 TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ – PARAMETRICKÉ A NEPARAMETRICKÉ TESTY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Parametrické hypotézy se vztahují na jeden nebo několik parametrů daného pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny (neboli znaku populace). Neparametrické hypotézy se netýkají parametrů rozdělení náhodné veličiny, nýbrž jiných statistických vlastností, např. tvaru rozdělení (příklad: normální rozdělení). V každém testu hypotézy vystupují proti sobě dvě hypotézy: testovaná hypotéza, kterou nazýváme nulová hypotéza a tzv. alternativní hypotéza. Při testování parametrické hypotézy máme k dispozici výsledky náhodného výběru a na jejich základě se rozhodujeme testovanou hypotézu buď přijmout, nebo zamítnout. Za tím účelem rozdělíme výběrový prostor na dvě části: kritický obor a obor přijetí. Padne-li hodnota statistiky pro získaný vzorek do kritického oboru, potom ji zamítáme. Naopak, padne-li hodnota statistiky pro získaný vzorek do oboru přijetí, pak nulovou hypotézu nezamítáme (neboli přijímáme).

Testem hypotézy (neparametrickým) lze pak přijmout nebo zamítnout neparametrické nulové hypotézy. Nulová hypotéza se zde odlišuje od nulové parametrické hypotézy v tom, že se zde nejedná ani o střední hodnotu, ani rozptyl. Zajímáme se o medián, typ rozdělení pravděpodobnosti, nebo nezávislost statistických znaků v kontingenční tabulce.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- základní pojmy z testování hypotéz,
- testovat parametrické hypotézy (test střední hodnoty),
- mediánový test,
- test dobré shody (Chi-kvadrát test),
- test nezávislosti v kontingenční tabulce.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 120 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Testování hypotéz, kritický obor, obor přijetí, hladina významnosti, mediánový test, test dobré shody, test nezávislosti.

7.1 Základní pojmy z testování hypotéz

Statistika se zabývá ověřováním pouze tzv. statistických hypotéz, které tvoří jen určitou podtřídu vědeckých hypotéz. **Statistické hypotézy** jsou tvrzení o hodnotách parametrů náhodných veličin, tj. znaků populačních souborů nebo tvrzení o tvaru pravděpodobnostních rozdělení náhodných veličin.

Obvykle se předpokládá normální nebo alternativní pravděpodobnostní rozdělení hodnot zkoumaného znaku, s nimiž jsou spojeny parametry střední hodnoty μ, rozptylu σ^2 nebo podílu p. Tomu pak odpovídají testy hypotéz

- o střední hodnotě μ,
- o rozptylu σ^2, nebo
- o podílu p.

Úlohy, které se v té souvislosti řeší, jsou úlohy o testování parametru znaku jednoho populačního souboru (tj. náhodné veličiny), nebo úlohy o parametrech znaků dvou a více souborů. Úlohy o parametrech dvou (a více) souborech lze obvykle převést na úlohy o parametrech jednoho souboru. Proto se budeme v následujících odstavcích věnovat pouze této úloze.

Statistické hypotézy rozdělujeme do dvou velkých tříd na parametrické hypotézy a neparametrické hypotézy. **Parametrické hypotézy**, kterými se budeme zabývat nejdříve, se vztahují na jeden nebo několik parametrů daného rozdělení náhodné veličiny. **Neparametrické hypotézy** se netýkají parametrů rozdělení náhodné veličiny, nýbrž jiných statistických vlastností, např. tvaru rozdělení (normální, exponenciální, apod.).

Z jiného pohledu dělíme hypotézy na jednoduché a složené. **Jednoduchá hypotéza** o parametru rozdělení specifikuje tento parametr jednoznačně jako jedinou hodnotu. **Složená hypotéza** vymezuje interval nebo jinou množinu hodnot, v němž má hodnota parametru ležet.

V praktických úlohách vystupují proti sobě dvě hypotézy: testovaná hypotéza, kterou nazýváme **nulová hypotéza** a označujeme ji obvykle H_0 a **alternativní hypotéza**, která se označuje H_1. Formulace alternativní hypotézy je naprosto nezbytná, jinak by ověřování nulové hypotézy nemělo smysl.

V následujícím výkladu se budeme zabývat testováním jednoduché parametrické hypotézy. Půjde o případ, kdy se kromě parametru, kterého se týká hypotéza, neuvažuje žádný jiný parametr. Testovanou hypotézu pak můžeme stručně zapsat:

$$H_0 : \Theta = \Theta_0 \ , \tag{7.1}$$

kde Θ_0 je konkrétní hodnota parametru. Jako konkrétní parametr Θ si představte například střední hodnotu μ.

Alternativní hypotézu volíme podle toho, jaký závěr učiníme, jestliže nulovou hypotézu zamítneme. Uvažujeme tyto možnosti:

$$H_1 : \Theta = \Theta_1 , \tag{7.2}$$

jedná se o **jednoduchou alternativní hypotézu**, jestliže se rozhodujeme mezi dvěma hodnotami parametru Θ_0 a Θ_1 ;

$$H_1 : \Theta < \Theta_0 , \tag{7.3}$$

jde o **levostrannou složenou alternativní hypotézu**, učiníme-li závěr pouze tehdy, ukáže-li se hodnota parametru Θ menší, než předpokládá nulová hypotéza;

$$H_1 : \Theta > \Theta_0 , \tag{7.4}$$

jedná se o **pravostrannou složenou alternativní hypotézu**, učiníme-li závěr pouze tehdy, prokáže-li se hodnota parametru Θ větší, než předpokládá H_0;

$$H_1 : \Theta \neq \Theta_0 , \tag{7.5}$$

jedná se o **dvoustrannou složenou alternativní hypotézu**, jde-li o prokázání různosti parametru od hodnoty předpokládané v H_0.

Při testování parametrických hypotéz máme k dispozici výsledky náhodného výběru zobrazené **testovacím kritériem** označovaným symbolem *T*, (například hodnotu aritmetického průměru $\bar{x}$ pro test hypotézy o střední hodnotě μ). Chceme se rozhodnout: testovanou hypotézu buď **přijmout**, nebo ji **zamítnout**. Za tím účelem rozdělíme výběrový prostor na dvě části: **kritický obor** *C* a **obor přijetí** *A*. Tedy pozor, testem statistické hypotézy nemůžeme dokázat její pravdivost nebo nepravdivost, čí správnost nebo nesprávnost! Jestliže hypotézu zamítneme, neznamená to ještě, že není správná.

Hodnoty náhodného výběru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ představují souřadnice bodu v prostoru, který nazýváme **výběrový prostor**. Hodnotu testového kritéria *T* v tomto bodě označíme $T(\mathbf{x})$, například opět pro test hypotézy o střední hodnotě μ je to hodnota aritmetického průměru, tedy $T(\mathbf{x}) = \bar{x}$.

Platí-li $T(\mathbf{x}) \in C$, potom H_0 zamítáme. Naopak, platí-li $T(\mathbf{x}) \in A$, pak H_0 přijímáme, přesněji H_0 nezamítáme. Vhodnou volbou testovacího kritéria, kterým je obvykle odpovídající statistika, jejíž rozdělení pravděpodobnosti při platnosti testované hypotézy známe, určíme kritický obor *C* takovým způsobem, že platí

$$P(T(\mathbf{x}) \in C \mid H_0) = \alpha , \tag{7.6}$$

kde α je předem zvolené číslo, které nazýváme **hladina významnosti**. Jinými slovy, za podmínky platnosti nulové hypotézy je pravděpodobnost, že hodnota testového kritéria pro získaný vzorek (například aritmetický průměr) padne do kritického oboru, je rovna hladině významnosti α.

7.2 Postup při testování hypotézy – parametrický test

Při praktickém testování parametrických hypotéz se doporučuje postupovat v následujících čtyřech krocích:

I. **Vybrat vhodný test**, přitom se řídíme zásadou, že nulovou hypotézu chceme zamítnout a hypotézu, u které chceme mít pod kontrolou riziko mylného přijetí, formulujeme jako alternativní. Zvolit hladinu významnosti α, obvykle se volí $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$, nebo $\alpha = 0{,}10$.

Existuje tu přirozená paralela testování hypotéz se soudním řízením: nulovou hypotézu představuje hypotéza o nevině obžalovaného (známá jako „presumpce neviny“) a soudní řízení, konkrétně žalující strana, má přinést důkazy pro její zamítnutí, tedy dokázání viny obžalovaného. Všimněte si, že pokud se v soudním řízení (testu hypotézy) nepodaří předložit dostatečné důkazy o vině, obžalovaný je osvobozen, tj. přijímá se nulová hypotéza. To však vůbec nemusí znamenat, že je obžalovaný nevinen! Jinak řečeno, neznamená to, že nulová hypotéza platí! Pouze ji nelze za stávajících důkazů (tj. na základě vzorku) zamítnout.

II. **Vymezit kritický obor**, tj. obor hodnot testové statistiky, kterým může zejména být:

a) interval všech čísel menších než 100α%-ní kvantil uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení – tzv. levostranný kritický obor.
b) interval všech čísel větších než $100(1-\alpha)$%-ní kvantil uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení – tzv. pravostranný kritický obor.
c) Sjednocení levého a pravého intervalu, přesněji řečeno, intervalu všech čísel menších než $100\frac{\alpha}{2}$ %-ní kvantil a intervalu všech čísel větších než od $100\frac{1-\alpha}{2}$%-ní kvantil. Číslo α - hladina významnosti, se zde rozdělí na dvě poloviny $\frac{\alpha}{2}$, aby celková pravděpodobnost, že hodnota testového kritéria pro získaný vzorek padne do kritického oboru, byla stejně jako v předchozích případech rovna α.

III. **Vypočítat hodnotu testového kritéria**, stanovit hodnoty příslušných statistik a dosadit do „vzorce“ testového kritéria. Testovým kritériem je obvykle statistika – funkce náhodného výběru v závislosti na druhu testu.

IV. **Učinit příslušný závěr**. Patří-li zjištěná hodnota testového kritéria do kritického oboru, hypotézu H_0 zamítáme a alternativní hypotézu H_1 přijímáme na hladině významnosti α. Patří-li zjištěná hodnota do oboru přijetí, hypotézu H_0 přijímáme, o H_1 se zdržíme úsudku.

Provádíte-li test hypotézy pomocí počítače vybaveného statistickým softwarem, případně v MS Excelu na PC, potom nemusíte předem zadávat hladinu významnosti α, počítač jako řešení testu hypotézy nabídne číslo z intervalu [0,1], které se nazývá p-hodnota (anglicky p-value). Toto číslo představuje vlastně nejmenší možnou hladinu významnosti, na níž by se mohla nulová hypotéza ještě zamítnout. Jestliže je potom například p-hodnota menší než 0,01, pak byste mohli příslušnou nulovou hypotézu zamítnout na každé obvyklé (tj. výše uvedené) hladině významnosti. V takovém případě se hypotéza nazývá *statistický významnou*. Na druhou stranu pokud je p-hodnota blízká k číslu 1, například větší než 0,1, potom se hypotéza nemůže zamítnout na běžných hladinách významnosti (0,1; 0,05 nebo 0,01) a říkáme, že hypotéza je *statisticky nevýznamná*.

V následující tabulce uvádíme přehled jednoduchých standardních parametrických testů pro ověření dvoustranné hypotézy $H_0: \Theta = \Theta_0$. Za **velké vzorky** přitom obvykle považujeme ty, jež mají více než 30 jednotek.

Číslo testu	Předpokládané rozdělení znaku X	Podmínky použití testu	Dvoustr. nulová hypotéza	Testové kritérium	Obor přijetí
(1)	normální rozdělení parametry μ, σ^2	σ^2 známo	$\mu = \mu_0$	$u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$[-u_{\alpha/2}\ ;\ u_{\alpha/2}]$
(2)	normální rozdělení parametry μ, σ^2	σ^2 neznámo	$\mu = \mu_0$	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$[-t_{\alpha/2}^{n-1}\ ;\ t_{\alpha/2}^{n-1}]$
(3)	libovolné rozdělení	n velké, σ^2 známo	$\mu = \mu_0$	$u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$[-u_{\alpha/2}\ ;\ u_{\alpha/2}]$
(4)	libovolné rozdělení	n velké σ^2 neznámo	$\mu = \mu_0$	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$[-t_{\alpha/2}^{n-1}\ ;\ t_{\alpha/2}^{n-1}]$
(5)	normální rozdělení parametry μ, σ^2		$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$w = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$[\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\ ;\ \chi_{\alpha/2}^2(n-1)]$
(6)	exponenciální rozdělení, par. δ		$\delta = \delta_0$	$y = \dfrac{2n\bar{x}}{\delta_0}$	$[\chi_{1-\alpha/2}^2(2n)\ ;\ \chi_{\alpha/2}^2(2n)$
(7)	binomické		$p = p_0$	$p = \dfrac{\frac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$[-u_{\alpha/2}\ ;\ u_{\alpha/2}]$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Hamburgery se připravují z masových karbanátků, které mají mít hmotnost 100 gramů se směrodatnou odchylkou 5 g. K ověření této kvality bylo náhodně vybráno 25 kusů, které byly převáženy a vypočítána průměrná hmotnost jednoho karbanátku $\bar{x} = 97{,}5$ g. Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ ověřte hypotézu, že střední hodnota hmotnosti je 100 g (a že tedy uvedená odchylka je "v normě" a nejde o šizení zákazníků).

Řešení.

Budeme ověřovat nulovou hypotézu H_0: μ = 100 proti složené oboustranné hypotéze H_1: $\mu \neq$ 100. Použijeme test č. 1, z předcházejícího seznamu, neboť znáte $\sigma = \sqrt{Var(X)} =$ 5 , n = 25.

Nejprve stanovíme kritický obor, resp. obor přijetí hypotézy pro hladinu významnosti α = 0,05. Stanovíme obor přijetí nulové hypotézy A jako interval:

$$A = [-u_{\alpha/2} \ ; \ u_{\alpha/2}]. \tag{7.7}$$

Nalezením příslušné kritické hodnoty z Tabulky 1 v Příloze: $u_{0,025} = 1{,}96$, pak snadno vypočítáme: A = [-1,96 ; 1,96].

Kritický obor je potom doplňkem k oboru přijetí, tedy $C = (-\infty , -1{,}96 \ ) \cup (1{,}96 , +\infty)$.

Nyní podle řádku (1) tabulce vypočítáme hodnotu testového kritéria $u = \frac{97{,}5-100}{\frac{5}{\sqrt{25}}} = -2{,}5$.

Tato hodnota padne do kritického oboru C, tj. $u \in C$, proto se nulová hypotéza *zamítá*. Jinými slovy na zvolené hladině významnosti nelze hypotézu H_0 na základě výběrového vzorku přijmout. Prakticky lze tento výsledek interpretovat jako fakt, že dochází k nenáhodné (systematické) odchylce v hmotnosti karbanátků směrem dolů (tedy k poškozování zákazníků).

7.2.1 CHYBY PŘI TESTOVÁNÍ

Při testování hypotéz se vyskytují tyto chyby:

- chyba z nevhodně zvolené dvojice nulové a alternativní hypotézy,
- chybně stanovený obor přijetí, resp. kritický obor,
- chybně stanované testové kritérium,
- chybné zamítnutí, resp. přijetí nulové hypotézy.

První tři uvedené chyby je možné redukovat správnou přípravou testu hypotézy. Rozhodnutí o zamítnutí nebo přijetí hypotézy nemusí vždy vést ke správným rozhodnutím, neboť jde o náhodný proces využívající omezené informace náhodného výběru. Statistikové se snaží najít takové testy, které by minimalizovaly výskyt chybných rozhodnutí.

Prakticky vzato, nulovou hypotézu buď přijímáme, nebo zamítáme. Zamítnutí správné hypotézy nazýváme **chybou I. druhu** a její pravděpodobnost označujeme podle (7.6) totožná s hladinou významnosti α. Přijetí nesprávné hypotézy definujeme jako **chybu II. druhu** a její pravděpodobnost označujeme jako β. Číslo 1-β vyjadřující pravděpodobnost zamítnutí nesprávné hypotézy nazýváme **síla testu**.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Uvažujte populaci zákazníků, přičemž X je náhodná veličina představující velikosti prodejů jednotlivým zákazníkům v jistém typu prodejen, viz též příklad v úvodu kapitoly. Náhodná veličina má normální rozdělení se střední hodnotou μ = 120 a rozptylem σ^2 = 100. Bylo náhodně vybráno 50 zákazníků, z jejichž nákupů byl vypočítán výběrový průměr $\bar{x} = 115$. Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu $H_0 : \mu \ = 120$ proti alter-nativní hypotéze $H_1 : \mu \ \neq 120$.

Řešení.
Protože $n = 50 > 30$, testové kritérium u z (3) v tabulce má přibližně normální rozdělení, přičemž $E(\overline{X}) = 120$, $Var(\overline{X}) = 100/25 = 4$. Za obor přijetí A vezměte interval (7.7), tj.$[-u_{\alpha/2}\, ;\ u_{\alpha/2}]$, což po dosazení a nalezení příslušné kritické hodnoty v Tabulce 1, tj. $u_{0{,}05} = 1{,}96$, dává kritický obor $C = (-\infty\ ;\ -1{,}96) \cup (1{,}96\ ;\ +\infty)$, jakožto doplněk oboru přijetí (7.7). Vzhledem k tomu, že pro testové kritérium $u = \frac{115-120}{\frac{4}{\sqrt{50}}} = -\ 8{,}84$, což znamená $u \in C$, zamítá se nulová hypotéza.
Na základě statistického testu jste zamítli hypotézu, která byla správná ($E(\bar{X}) = 120$), dopustili jste se tedy chyby I. druhu, pravděpodobnost této chyby je $\alpha = 0{,}05$.

7.3 Neparametrické testy hypotéz

Neparametrické testy hypotéz, podobně jako parametrické testy hypotéz, jsou testy statistických hypotéz, které se však netýkají parametrů rozdělení pravděpodobnosti. Budeme se zabývat dvěma skupinami testů:
U jednoduchých neparametrických testů vycházíme z jednoho náhodného výběru (vzorku) a klademe si tyto otázky (hypotézy):

- má medián populace s neznámým rozdělením pravděpodobnosti předpokládanou hodnotu?
- pochází výběr z populace s předpokládaným (eventuálně předem známým) rozdělením pravděpodobnosti?

Obě otázky jsou typem neparametrické hypotézy a odpovídáme na ně pomocí neparametrických testů. V prvním případě se jedná o mediánový test, ve druhém o chi-kvadrát test (také známý pod jménem test dobré shody). Prvním z nich se budeme zabývat v následující subkapitole, ostatními testy pak v dalších subkapitolách.

7.3.1 Mediánový test

Mediánový test odpovídá na otázku, zda má medián populace předpokládanou hodnotu. Medián není typickým parametrem, jako například μ v normálním rozdělení, proto se test hypotézy o hodnotě mediánu v populaci s neznámým rozdělením pravděpodobnosti považuje za neparametrický test.

Mediánový test najde uplatnění u populací, u nichž nemáme důvod předpokládat, že mají normální rozdělení pravděpodobnosti. Jinak totiž je lepší použít parametrický test o středí hodnotě μ, s nímž jste se seznámili v předešlé kapitole.

Předpokládáme hodnotu mediánu $\tilde{\mu}_0$ populace X a testujeme dvoustrannou nulovou hypotézu: H_0: $Med(X) = \tilde{\mu}_0$, proti alternativní hypotéze: H_1: $Med(X) \neq \tilde{\mu}_0$.

K testu se používá testové kritérium $u = \frac{|2m-n|}{\sqrt{n}}$, (7.8)

kde n je rozsah testového vzorku, m je počet případů ve vzorku s hodnotou menší než $\tilde{\mu}_0$. Při zadané hladině významnosti α porovnáme hodnotu kritéria (7.8) s kritickou hodnotou normovaného normálního rozdělení $u_{\alpha/2}$. Pokud je hodnota testového kritéria větší než příslušná kritická hodnota, tj. platí-li $u > u_{\alpha/2}$, potom nulovou hypotézu H_0 zamítáme, jinak ji nezamítáme.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Náhodně vybraný vzorek 19 zaměstnanců v okrese Karviná poskytl následující údaje o jejich ročních výdajích na sportovní aktivity (v tis. Kč):

10,0	12,3	12,6	12,6	13,0	13,2	13,3	13,3	13,4	13,8
14,1	14,3	14,6	15,1	15,2	15,4	16,5	18,2	20,5	-------

Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu, že mediánový roční výdaj na sportovní aktivity v České republice je 15 tis. Kč.

Řešení.

Uvažujeme mediánový test hypotézy H_0: $Med(X) = 15$ proti alternativní hypotéze H_1: $Med(X) \neq 15$. V tomto testu je $n = 19$, medián $m = 13$. Podle vztahu (7.8) snadno vypočítáte $u = 1{,}61$. Z Tabulky 1 hodnot normovaného normálního rozdělení zjistíte, že $u_{0{,}025} = 1{,}96$. Protože hodnota statistiky u pro vzorek nepřevýšila hodnotu příslušného kvantilu, neboť $1{,}61 < 1{,}96$, nulovou hypotézu H_0 nezamítáte (přijímáte). Jinými slovy, na zvolené hladině významnosti vzorek neodporuje hypotéze o výši mediánových ročních výdajů na sportovní aktivity v ČR. Vybraný vzorek je v souladu s celostátní populací.

7.3.2 TEST DOBRÉ SHODY

Společným rysem situací, při nichž se uplatní (Pearsonův) **Chi-kvadrát test**, nebo též **test dobré shody**, je to, že všechny výsledky v náhodném výběru lze roztřídit do určitého počtu vzájemně se nepřekrývajících tříd. Testovaná hypotéza pak spočívá v předpokladu určitého typu (modelu) pravděpodobnostního rozdělení, z čehož vyplývá zařazení výsledků do jednotlivých tříd. Vynásobíme-li tyto pravděpodobnosti rozsahem výběru, dostáváme teoretické četnosti při platnosti nulové hypotézy. Test dobré shody pak spočívá v porovnání těchto teoretických četností s empirickými četnostmi ve výběrovém souboru. Jsou-li rozdíly mezi nimi příliš velké, potom zřejmě model rozdělení vyjádřený testovanou hypotézou není vhodný, a tedy nulovou hypotézu zamítáme. Potom považujeme model za nevhodný na zvolené hladině významnosti.

Za testové kritérium k ověření vhodnosti modelu volíme statistiku *G*, která je součtem čtverců rozdílů mezi teoretickými a empirickými četnostmi vztažených relativně k příslušné teoretické četnosti, a to pro všechny třídy:

$$G = \sum_{j=1}^{J} \frac{(n_j - \psi_j)^2}{\psi_j}, \tag{7.9}$$

kde J představuje počet tříd výběrového souboru, n_j empirickou četnost v j-té třídě, ψ_j teoretickou četnost v j-té třídě, je rozsah výběrového souboru.

Je-li rozsah výběru n dost velký a jsou-li všechny empirické četnosti rovněž dost velké, tj**. alespoň 80% četností je větších než 5**, má toto testové kritérium G při platnosti nulové hypotézy přibližně rozdělení Chi-kvadrát s $df = J - 1$ stupni volnosti. Přitom je teoretická četnost $\psi_j = n.p_j$, kde p_j je příslušná pravděpodobnost. Závěr testu pak spočívá v porovnání hodnoty testového kritéria vypočteného pro náhodný výběr se 100α%-ní kritickou hodnotou rozdělení $\chi^2_\alpha(J-1)$. Kritické hodnoty tohoto rozdělení bývají často tabelovány, tak je tomu také v Tabulce 3 z Přílohy tohoto textu.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Automobil Škoda - Favorit se prodává ve čtyřech barvách. Prodejna rozčlenila tyto barvy podle poptávky o konkrétní barvy takto:

40% zákazníků požaduje zelenou barvu automobilu,
25% červenou barvu,
25% modrou barvu a
10% bílou barvu.

Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ ověřte hypotézu, že uvedené pravděpodobnostní odhady jsou správné. K ověření správnosti učiněného předpokladu o struktuře poptávky podle barev použijte záznamy o nákupech v dané prodejně v jistém měsíci.

Řešení.

Vstupní i vypočtené údaje obsahuje následující tabulka:

j	Barva	$p_{0,j}$	n_j	ψ_j	$\frac{(n_j-\psi_j)^2}{\psi_j}$	$\frac{n_j}{n}$
1	zelená	0,40	201	192	0,42	0,42
2	červená	0,25	105	120	1,88	0,22
3	modrá	0,25	144	120	4,80	0,30
4	bílá	0,10	30	48	6,75	0,06

součet	1,00	480	480	13,85	1,00

Testovaná hypotéza je následující:

$$H_0: \quad p_{0,1} = 0{,}4,\ p_{0,2} = p_{0,3} = 0{,}2,\ p_{0,4} = 0{,}1,$$

zatímco alternativní hypotéza H_1 je negací nulové hypotézy. Rozsah výběrového souboru je značný, a protože pro všechna j je $\psi_j > 5$, jsou podmínky pro použití testu dobré shody splněny.

Stanovíme kritický obor C jako pravostranný interval, jehož levý krajní bod představuje 100(1 - α)%-ní kvantil funkce Chi-kvadrát $\chi^2_{0.95}(3) = 7{,}81$, neboť stupeň volnosti $df = 4 - 1 = 3$. Hodnotu příslušného kvantilu lze nalézt v běžných tabulkách rozdělení Chi-kvadrát, např. v Tabulce 3 z Přílohy. Tedy $C = [\chi^2_{0.95}(3)\ ;\ +\infty) = [7{,}81\ ;\ +\infty)$.

Hodnotu testového kritéria G obsahuje výše uvedená tabulka v posledním řádku vpravo: $G = 13{,}85$. Jelikož tato hodnota padne do kritického oboru, *zamítáme* nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$. Praktický dopad takového testu by měl mít za následek korekci představ o pravděpodobnostním rozložení poptávky po jednotlivých barvách automobilů. To by pak mělo přimět vedení prodejny ke změně objednávek u výrobce. Nové pravděpodobnosti $p_{1,j}$ jednotlivých barev bychom mohli z uvedeného výběrového souboru stanovit jako relativní četnosti $p_{1,j} = n_j / n$, viz poslední sloupec ve výše uvedené tabulce.

7.3.3 TEST NEZÁVISLOSTI KVALITATIVNÍCH ZNAKŮ

Typickou úlohou, k jejímuž řešení se často používá test dobré shody, je **ověření nezávislosti dvou (nebo více) kvalitativních znaků**. Jejich hodnoty byly zjištěny u n náhodně vybraných prvků základního souboru, nebo, obecněji řečeno, jde o výsledky n nezávislých náhodných pokusů. Výsledky jsou pak zpracování uspořádány v tzv. **kontingenční tabulce**.

V jednom experimentu můžeme současně sledovat dvě nebo i více odpovědí - hodnoty kvalitativních znaků. Tak například při kontrole jakosti výrobku můžeme sledovat přítomnost nebo nepřítomnost vady A (znak A), nebo přítomnost nebo nepřítomnost vady B (znak B). Oba znaky A i B nabývají pouze dvě alternativní hodnoty - kategorie: např. **Ano, Ne (Přítomnost, Nepřítomnost**, apod.).

Při psychologické zkoušce způsobilosti osoby k výkonu určité činnosti může testovaná osoba dostat dva úkoly, jejichž výsledek může být hodnocen jako "vynikající", "průměrný" a "podprůměrný". Zde jde o sledování dvou kvalitativních znaků se třemi kategoriemi odpovědí.

Představte si nyní n nezávislých opakování experimentu se dvěma kvalitativními znaky A a B. Znak A má r možných kategorií hodnot, značených $A_1, A_2, \ldots, A_r$, znak B má s možných kategorií hodnot $B_1, B_2, \ldots, B_s$. Výsledek celého složeného experimentu lze shrnout do *kontingenční tabulky*:

Kategorie znaku *A / B*	B_1	B_2	B_3	....	B_s	Součet
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	....	n_{1s}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	....	n_{2s}	$n_{2.}$
A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	....	n_{3s}	$n_{3.}$
....	.....	....	....	....	....	....
A_r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	....	n_{rs}	$n_{r.}$
Součet	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	....	$n_{.s}$	n

V tabulce značí n_{ij} počet experimentů, při kterých znak *A* nabývá hodnoty (kategorie) A_i a znak *B* hodnoty B_j. Symbolem $p_{i.} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}$značíme celkový počet opakování, při kterých se vyskytla *i*-tá kategorie znaku *A*, symbolem $n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$ značíme celkový počet opakování, při kterých se vyskytla *j*-tá kategorie znaku *B*.

Cílem statistické analýzy je zjištění, zda příslušné dva znaky jsou závislé či nikoliv. Výskyt *i*-té kategorie (hodnoty) znaku *A* a *j*-té kategorie znaku *B* při jedné realizaci příslušného experimentu je náhodný jev, který je průnikem dvou jevů, označme pravděpodobnost tohoto průniku p_{ij}. Každá četnost n_{ij} ve výše uvedené kontingenční tabulce je vlastně realizací náhodné veličiny s binomickým rozdělením pravděpodobnosti s parametry *n* a p_{ij}. Četnosti $n_{i.}$ výskytu jevu A_i a četnosti $n_{.j}$ výskytů jevů B_j jsou realizacemi náhodných veličin s binomickým rozdělením s parametry n, $p_{i.}$, resp. parametry n, $p_{.j}$. Zde jsme označili $p_{.j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$ a $p_{i.} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}$. V souladu s definicí nezávislosti jevů řekneme, že znaky *A* a *B* jsou nezávislé, jestliže platí pravidlo o násobení pravděpodobností nezávislých jevů, tj.

$$p_{ij} = p_{i.}p_{.j},\ i=1,2,...,r,\ j=1,2,...,s\ , \tag{7.10}$$

Položíme-li nulovou hypotézu H_0 o nezávislosti znaků *A* a *B* jako předpoklad (7.10), pak lze ukázat, že statistika

$$G = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}} = n\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}} - 1\right) \tag{7.11}$$

má Chi-kvadrát rozdělení s $df=(r-1)(s-1)$ stupni volnosti.

Hypotézu H_0 o nezávislosti znaků *A* a *B* zamítáme na hladině významnosti α, když hodnota statistiky (7.11) padne do kritického oboru

$$C = [\chi^2_{1-\alpha}(df)\ ;\ +\infty). \tag{7.12}$$

Speciálním případem kontingenční tabulky je tzv. **čtyřpolní tabulka**, kdy každý znak nabývá pouze dvou (alternativních) hodnot. Zde uvažujeme se dvěma kvalitativními znaky Z_1 a Z_2, každý z nich nabývá dvou možných kategorií, které označíme h_1, h_2. Ze základního souboru provedeme náhodný výběr, jehož výsledky uspořádáme do následující tabulky:

Znak Z_1 / Znak Z_2	h_1	h_2	**Součet**
h_1	A	B	$A+B$
h_2	C	D	$C+D$
Součet	$A+C$	$B+D$	n

Zde *A* představuje četnost současného výskytu hodnoty h_1 u znaků Z_1 i Z_2. Obdobný význam mají hodnoty *B, C* a *D.*

Hypotézu o nezávislosti obou alternativních znaků můžeme zformulovat jako (7.10). Testové kritérium (7.11) lze v tomto speciálním případě vyjádřit:

$$G = \frac{n(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}. \qquad (7.13)$$

Počet stupňů volnosti je v tomto jednoduchém případě *df* = (2-1)(2-1) = 1.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Pro *n* = 320 výrobků se zjišťovala hmotnost a vnější vzhled, přičemž pro oba tyto znaky se každý výrobek označil buď jako dobrý, nebo nevyhovující. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce, která je konkretizací tabulky předchozí. Testujte hypotézu o nezávislosti znaků "Vzhled" a "Hmotnost" na hladině významnosti $\alpha = 0{,}1$.

Vzhled / Hmotnost	Dobrý	Nevyhovující	Součet
Dobrá	239	60	299
Nevyhovující	14	7	21
Součet	253	67	320

Řešení.

1. Použijeme nejprve přímou metodu s pomocí vzorce (10.5), do něhož dosadíte hodnoty z předchozí tabulky:

$$G = 320\left(\frac{239^2}{253.299} + \frac{60^2}{67.299} + \frac{14^2}{253.21} + \frac{7^2}{67.21} - 1\right) = 2{,}086.$$

Protože $2{,}086 < \chi^2_{0,1}(1) = 2{,}7$, tj. hodnota kritéria nepadne do kritického oboru (7.12), hypotézu o nezávislosti daných znaků *přijímáme*.

2. V řešení 1. jsme použili vzorce, který je obecný v tom smyslu, že může být použit pro kontingenční tabulku o rozměrech *r*×*s*, tj. v případech, kdy první znak má *r* hodnot a druhý má *s* hodnot. V konkrétním příkladu je *r* = *s* = 2, a proto můžeme aplikovat vzorec (7.13) pro čtyřpolní tabulku. Po dosazení příslušných hodnot do (7.13) obdržíme: G = 2,086.

Docházíme přirozeně ke stejnému výsledku, a proto též závěr o přijetí hypotézy o nezávislosti znaků "Hmotnost" a "Vzhled" je stejný.

SAMOSTATNÉ ÚKOLY

Ano či ne?...

1) Zamítnutí správné hypotézy označujeme jako chybu II. druhu.
2) Pokud test zamítne nulovou hypotézu H_0, je tato hypotéza nepravdivá.
3) Jestliže je nulová hypotéza přijata na hladině významnosti 0,05, pak musí být přijata i na hladině významnosti 0,01.
4) Přijmeme-li nulovou hypotézu, nemůžeme se dopustit chyby I. druhu.
5) Alternativní hypotézu přijmeme, pokud hodnota testového kritéria leží v kritickém oboru.

Doplňte...

6) Nulovou hypotézu nezamítáme neboli ________________.
7) Hypotéza $H_1 : \Theta > \Theta_0$ se nazývá ________________.
8) Číslo $1-\beta$, kde β znamená ________________, označujeme jako ________________.
9) Chybou I. druhu se rozumí ________________ a její pravděpodobnost se označuje ________________.
10) Nulovou hypotézu zamítáme, pokud hodnota testového kritéria náleží ________________.

11) Letecká společnost provedla při jednom letu kontrolu u 25 pasažérů, na kolik se váha zavazadel liší od povolených 20 kg. Byly zjištěny tyto údaje: $\bar{x} = 21{,}1$ kg; $s = 2{,}7$ kg. Je možno na hladině významnosti 10% usoudit, že průměrná váha zavazadel nepřevýší 20 kg?

12) Tabulka dokumentuje procentuální zastoupení různých věkových kategorií 1 000 účastníků korespondenčního kurzu *Business English*.

Věk	Podíl účastníků [%]
15 - 24	0,118
25 - 34	0,139
35 - 44	0,175
45 - 54	0,207
55 - 64	0,192
65 a více	0,169

Testujte hypotézu o stejném zastoupení uvedených věkových kategorií účastníků v korespondenčním kurzu na hladině významnosti 5%.

13) Management zdravotní pojišťovny zjišťuje, zda její podíl na krytí nákladů spojených s hospitalizací pacientů je závislý na délce hospitalizace. Náhodný vzorek pacientů poskytl následující výsledky:

Krytí nákladů	Délka hospitalizace			
	do 5 dní	6 - 10 dní	11 - 15 dní	nad 15 dní
méně než 25%	26	30	6	5
25 - 50%	21	30	11	7
51 - 75%	25	25	45	9
nad 75%	11	32	17	11

Je možno potvrdit závislost procentuálního podílu krytí nákladů na délce hospitalizace? Uvažujte hladinu významnosti 1%.

14) Manželská poradna provedla šetření závislosti rozvodovosti věkové kategorie 35 až 40 let na pohlaví partnerů. Tabulka shrnuje výsledky u náhodného výběru 100 klientů zmíněné věkové kategorie.

Rodinný stav	Pohlaví	
	muž	žena
rozvedený(á)	15	20
jiný	30	35

Na hladině významnosti 0,1 ověřte hypotézu o nezávislosti rozvodovosti na pohlaví partnerů.

ODPOVĚDI

Ano či ne?...

1) Ne
2) Ne
3) Ano
4) Ano
5) Ano

Doplňte ...

6) Přijímáme
7) Pravostranná složená alternativní hypotéza
8) Pravděpodobnost chyby II. druhu, síla testu
9) Zamítnutí platné hypotézy, alfa
10) Kritickému oboru
11) Nikoliv, hypotéza se zamítá.
12) Hypotéza se zamítá.
13) Hypotéza se přijímá. (Hypotéza o nezávislosti se zamítá).
14) Hypotéza se přijímá.

Σ SHRNUTÍ KAPITOLY

Statistické hypotézy, tj. hypotézy, jež se týkají náhodných veličin, rozdělujeme do dvou velkých tříd na parametrické hypotézy a neparametrické hypotézy. Parametrické hypotézy se vztahují na jeden nebo několik parametrů daného pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny (znaku populace). Neparametrické hypotézy se netýkají parametrů rozdělení náhodné veličiny, nýbrž jiných statistických vlastností, např. tvaru rozdělení (normální, exponenciální, apod.). Neparametrické testy hypotéz (mediánový test, Chi-kvadrát test, test nezávislosti) se většinou používají tam, kde nemáte důvod předpokládat, že populační soubor má normální rozdělení pravděpodobnosti.

8 JEDNODUCHÁ REGRESNÍ ANALÝZA

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Analýzu rozptylu z první kapitoly je možné chápat jako analýzu závislosti kvantitativního znaku (proměnné) na kvalitativním znaku (proměnné). Naproti tomu závislostí kvantitativního znaku na kvantitativním znaku (nebo více kvantitativních znacích) se zabývá *regresní analýza*. V případě závislosti dvou znaků mluvíme o *jednorozměrné regresi* (případně *jednoduché regresi*), u znaku závislém na více kvantitativních veličinách hovoříme o *vícerozměrné regresi* (*vícenásobné regresi*).

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- vypočítat regresní koeficienty a vysvětlit metodu nejmenších čtverců,
- vypočítat koeficient determinace a koeficient korelace,
- vyjmenovat podmínky klasického lineárního regresního modelu.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Regresní přímka, metoda nejmenších čtverců, koeficient determinace, koeficient korelace.

8.1 Regresní analýza

V regresní analýze studujeme vztah mezi jedinou proměnnou (hodnotami statistického znaku) nazývanou *závisle proměnnou* (někdy *vysvětlovanou proměnnou*), označujeme ji Y, a obecně několika proměnnými (hodnotami statistických znaků), které nazýváme *nezávisle proměnné* (někdy *vysvětlující proměnné*), a označujeme je symboly X_1, X_2, ... Pokud se zabýváme jedinou nezávisle proměnnou X, hovoříme o *jednoduché regresi*, pokud je nezávisle proměnných více než jedna, mluvíme o *vícroznĕrnéné (vícenásobné) regresi* (někdy též mnohonásobné regresi). V této a následující kapitole se věnujeme jednoduché regresi.

Závisí-li veličina Y na veličině X, pak to matematicky vyjadřujeme zápisem

$$Y = f(X). \tag{8.1}$$

V našem případě jsou Y a X *statistické znaky* (náhodné veličiny), pak hovoříme o *statistické závislosti*, funkční vztah (3.1) přejde v *regresní vztah* (*regresní model*)

$$y = f(x) + \varepsilon, \tag{8.2}$$

kde y, resp. x, představují hodnoty znaku Y, resp. X, ε je *náhodná složka,* funkci f nazýváme *regresní funkce*.

Jestliže je regresní funkce f lineární, což značí, že má tvar regresní přímky

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x, \tag{8.3}$$

potom hovoříme o *jednoduché lineární regresi*, nemá-li regresní funkce lineární tvar, hovoříme o *jednoduché nelineární regresi*. Ve vzorci (3.3) jsou β_0, β_1 *parametry* regresní funkce neboli *regresní koeficienty*.

Mezi nejpoužívanější nelineární regresní funkce patří:

regresní parabola:	$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x^2,$	(8.4)
regresní hyperbola:	$f(x) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x},$	(8.5)
regresní logaritmická funkce:	$f(x) = \beta_0 + \beta_1 \log x.$	(8.6)
regresní mocninná funkce:	$f(x) = \beta_0 x^{\beta_1},$	(8.7)
regresní exponenciální funkce:	$f(x) = \beta_0 \beta_1^x.$	(8.8)

Výše uvedené nelineární regresní funkce lze převést na lineární vhodnou transformaci, jak uvidíme v následující kapitole.

Kromě výše uvedených příkladů nelineárních regresních funkcí existuje celá řada dalších významných nelineárních funkcí, např. Törnquistovy funkce, které nelze na lineární funkci jednoduše převést.

8.2 Jednoduchá regresní analýza

Představte si výběr párových hodnot (y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3), ..., (y_n, x_n), získaných (např. změřených) na statistických jednotkách základního souboru. Zde jsou y_i hodnotami závisle proměnné Y a x_i jsou hodnotami nezávisle proměnné X. Zmíněné párové hodnoty můžeme získat zejména dvojím způsobem:

(A) Hodnoty nezávisle proměnné x_i jsme předem pevně zvolili a k nim jsme „změřili“ příslušné hodnoty y_i. V této situaci jsou hodnoty znaku X pevné (nenáhodné), zatímco hodnoty znaku Y považujeme za náhodné veličiny.

(B) Párové hodnoty (y_i, x_i) „změříme“ na n náhodně zvolených jednotkách základního souboru. V této situaci jak hodnoty znaku X, tak hodnoty znaku Y považujeme za náhodné veličiny.

Výše uvedený datový soubor párových hodnot můžeme geometricky znázornit v rovině *bodovým grafem*, kde na vodorovnou osu „x“ nanášíme hodnoty nezávisle proměnné a na svislou osu „y“ příslušné hodnoty závisle proměnné. Výsledkem je geometrické znázornění n bodů v rovině, z jejichž vzájemné polohy můžeme soudit na regresní závislost znaku Y na X. Úkolem jednoduché lineární regrese je „proložit“ danými body přímku (tj. nalézt lineární regresní funkci), která nejlépe charakterizuje polohu daných n bodů. Z předchozího odstavce víme, že tato regresní funkce má tvar $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$, kde β_0, β_1 jsou zatím neznámé hodnoty parametrů regresní přímky. Regresní model (3.2) má nyní tvar

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \, , \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.9}$$

Odhady b_0, b_1 těchto neznámých parametrů – *regresní koeficienty* získáme *metodou nejmenších čtverců*. Této metodě, která patří mezi nejdůležitější metody používané ve statistice, bude věnován následující odstavec.

8.3 Metoda nejmenších čtverců

Uvažujte data ve formě párových hodnot – bodů: (y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3), ..., (y_n, x_n). Úkolem jednoduché regrese je najít regresní funkci, která „nejlépe charakterizuje polohu“ daných n bodů. Nejprve budeme uvažovat obecný tvar regresní funkce $f(x\,;\beta_0, \beta_1)$ se dvěma parametry β_0, β_1 (nemusí to být nutně regresní přímka). Speciálními případy této regresní funkce je lineární funkce (8.3) a také nelineární funkce (8.4) – (8.8). Postup metody nejmenších čtverců bude vždy stejný, tj. nezávislý na konkrétním tvaru regresní funkce. Odhady b_0, b_1 neznámých parametrů β_0, β_1 získáme tak, že nalezneme hodnoty b_0, b_1, pro něž nabývá své minimální hodnoty *reziduální součet čtverců* odchylek hodnot závisle proměnné y_i od teoretické hodnoty $Y_i = f(x_i\,; b_0, b_1)$, tj.

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - Y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i, b_0, b_1)\right)^2 . \tag{8.10}$$

Jak je známo z matematické analýzy, své minimum funkce S_R (zde je to funkce proměnných b_0, b_1) vždy nabývá pro ty hodnoty b_0, b_1, pro něž se anulují její parciální derivace:

$$\frac{\partial S_R}{\partial b_0} = 0, \qquad \frac{\partial S_R}{\partial b_1} = 0. \tag{8.11}$$

Vztahy (8.11) představují soustavu 2 rovnic o 2 neznámých b_0, b_1, která se nazývá *soustava normálních rovnic.* Jejím řešením získáme hledané odhady regresních parametrů zvolené regresní funkce.

Vyřešíme nyní soustavu (8.11) pro speciální případ, který nás zejména zajímá, totiž pro lineární regresní funkci $f(x; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 x$. Dosadíme-li tuto funkci do vztahu (8.10), vypočteme příslušné parciální derivace, které položíme rovny 0, získáme konkrétní soustavu normálních rovnic

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i &= b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Z těchto rovnic již snadno vypočteme hledané odhady b_0, b_1 takto:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \tag{8.13}$$

Z analytické geometrie si připomeňte, že regresní koeficient b_0 představuje průsečík regresní přímky s osou „y“, tedy hodnotu Y_0 pro $x = 0$, tento regresní koeficient se někdy nazývá *úrovňová konstanta*. Regresní koeficient b_1 vyjadřuje směrnici přímky, tedy sklon přímky k ose „x“, tj. změnu funkční hodnoty Y při změně nezávisle proměnné x o jednotku.

Pro jiné, než lineární tvary regresní funkce je postup metody nejmenších čtverců obdobný. Výsledkem je rovněž soustava 2 normálních rovnic, tyto rovnice však již nemusí být lineární, a proto soustavu již obvykle nelze snadno vyřešit. K řešení pak používáme *iterační numerické metody*, které zde nejsou předmětem našeho zájmu. V řešených úlohách jsou uvedeny způsoby nalezení odhadů regresních koeficientů metodou linearizace exponenciální a mocninné regresní funkce pomocí logaritmické transformace.

Na tomto místě bychom chtěli zvýraznit jeden důležitý fakt, který budeme v následujícím výkladu neustále využívat. Data pro regresní analýzu jsou výsledkem náhodného výběru, ať již jsme použili při jejich získání postup (A), nebo (B). Proto také výsledek jednoduché lineární regresní analýzy – odhady neznámých parametrů β_0, β_1, tj. regresní koeficienty b_0, b_1, budou náhodné veličiny. Při každém dalším náhodném výběru dat bude výsledek, tj. odhad b_0, b_1, obecně jiný! Má proto význam hovořit dále o statistických charakteristikách těchto odhadnutých parametrů, jako např. střední hodnota, rozptyl.

8.4 Míra variability, koeficient determinace

Metoda nejmenších čtverců nás nyní přivedla k postupu, který jsme již použili v předchozí kapitole při analýze rozptylu. V ANOVA se jednalo o rozklad celkové variability znaku Y, vyjádřené jako celkový součet čtverců, na meziskupinový a vnitroskupinový (reziduální) součet čtverců. V analýze rozptylu jsme pracovali se znakem X, který měl kvalitativní povahu, a proto nebylo možné vyjádřit závislost regresním modelem. V regresní analýze má znak X – nezávisle proměnná – kvantitativní povahu, a proto je regresní model závislosti Y na X možný. Použijeme analogii s ANOVA v tom, že znak X zde bude nabývat hodnot x_1, x_2, ..., x_n a i-tá skupina bude nyní charakterizována teoretickou hodnotou $Y_i = f(x_i\,; b_0, b_1)$, namísto skupinového průměru $\bar{y}_i$ v ANOVA. Potom celkovou variabilitu vysvětlované proměnné charakterizuje *celkový součet čtverců:*

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \,. \tag{8.14}$$

Část celkové variability vysvětlenou regresním modelem charakterizuje *teoretický součet čtverců:*

$$S_T = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{y})^2 \,, \tag{8.15}$$

nevysvětlenou část celkové variability představuje *reziduální součet čtverců* (8.10):

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 \,, \tag{8.16}$$

kde $e_i = y_i - Y_i$ nazýváme *reziduum*.

Lze dokázat, že mezi jednotlivými součty čtverců platí základní vztah:

$$S_y = S_T + S_R. \tag{8.17}$$

Obdobně jako v analýze rozptylu jsme zavedli k vyjádření těsnosti vztahu Y a X poměr determinace, nyní zavedeme analogický pojem charakterizující přiléhavost dat k regresnímu modelu. Tímto pojmem je *koeficient determinace*, který definujeme vztahem

$$R^2 = 1 - \frac{S_R}{S_y} \,. \tag{8.18}$$

Ze vztahu (8.17) vyplývá, že koeficient determinace nabývá hodnoty z intervalu [0,1] a určuje tu část celkové variability pozorovaných hodnot S_y, kterou lze vysvětlit daným regresním modelem. Jinak řečeno, po vynásobení koeficientu determinace hodnotou 100 obdržíme, kolik procent celkové variability je vysvětlitelných regresním modelem. Koeficient determinace je proto důležitou charakteristikou vhodnosti zvoleného regresního modelu.

Vztah (8.18) vzniká podílem náhodných veličin, a proto jakožto náhodná veličina je odhadem koeficientu determinace R^2. Pro malé rozsahy výběru n je odhad (8.18) *vychýlený*, viz Ramík (2003), tj. nadhodnocuje přiléhavost k regresnímu modelu. Proto se používá *nevychýlený odhad* koeficientu determinace R^2_{adj} (z angl. *adj*usted), který *nazýváme korigovaný (upravený) koeficient determinace*:

$$R^2_{adj} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-2}\,. \tag{8.19}$$

Pro velké hodnoty n je však zlomek ve vzorci (3.19) blízký k jedné a korigovaný koeficient se blíží k „nekorigovanému".

8.5 Klasický lineární model

Klasickým jednoduchým lineárním regresním modelem se nazývá regresní model (8.9):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\,, i = 1,2,...,n,$$

splňující následující podmínky:

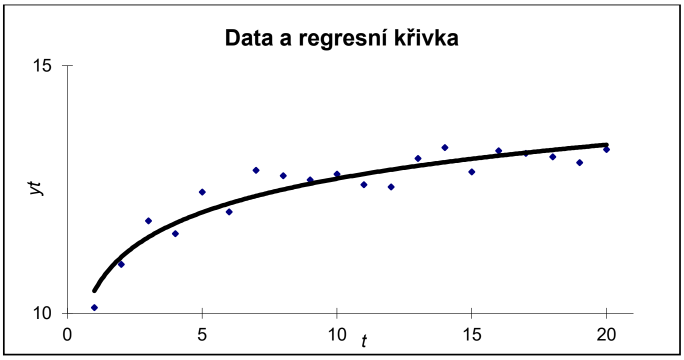
(1) Hodnoty vysvětlující proměnné x_i se volí předem, viz (A) odstavec 8.2, nejsou to tedy náhodné veličiny.

(2) Náhodné složky ε_i v modelu (8.9) mají *normální rozdělení* pravděpodobnosti se střední hodnotou 0 a (neznámým) rozptylem σ^2. Konstantnost rozptylu nazýváme *homoskedasticita*.

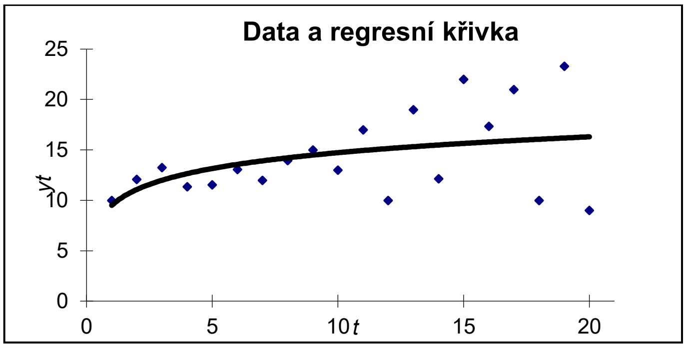
(3) Náhodné složky nejsou *korelované*, tj.$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pro každé $i \neq j$, $i, j = 1,2, ..., n$.

Podmínky (1) až (3) požadujeme tehdy, chceme-li zajistit splnění některých dalších vlastností: např. zjistit intervaly spolehlivosti koeficientů regresní funkce, interval spolehlivosti hodnoty regresní funkce, eventuálně chceme-li provádět testy hypotéz o některých prvcích regresního modelu. Těmito tématy se budeme zabývat v následujících odstavcích. Pokud totiž tyto podmínky splněny nejsou, nelze zajistit „spolehlivé předpovědi".

V praxi jsou podmínky klasického modelu často splněny, nejsme-li si však jejich platností jisti, můžeme provést testy hypotéz jak o normalitě rozdělení náhodné složky (např. test dobré shody, viz např. Ramík (2003)), tak i testy o nekorelovanosti náhodných složek (např. t-test). Další testy uvedeme později v souvislosti s časovými řadami. Na Obrázku 20 je znázorněna situace, kdy podmínky klasického lineárního modelu jsou splněny, na Obrázku 21 je zachycena situace, kdy není splněna ani podmínka normality náhodných složek (na obrázku jsou všechny ε_i téměř stejné), ani podmínka nekorelovanosti (hodnoty y_i se nacházejí vedle sebe po jedné straně grafu regresní funkce).



Obrázek 20: Podmínky klasického modelu jsou splněny



Obrázek 21: Podmínky klasického modelu nejsou splněny

8.6 Diagnostická kontrola modelu

Kvalita každého sestaveného modelu se posuzuje pomocí diagnostických testů, kde jsou ověřovány vlastnosti náhodné složky, a to jsou heteroskedasticita, autokorelace a normalita reziduí. Pokud je model zvolen správně, pak má nesystematická (reziduální) složka modelu vlastnosti procesu bílého šumu.

8.6.1 Heteroskedasticita

Požadavkem na nesystematickou složku je její homoskedasticita čili konstantnost rozptylu. K posouzení homoskedasticity se využívá graf reziduí, v praxi pak také tzv. $ARCH(q)$ (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) test, kde

H_0: reziduální složka vykazuje podmíněnou homoskedasticitu,
H_1: reziduální složka vykazuje podmíněnou heteroskedasticitu.

Pro posouzení efektu $ARCH$ (1) je konstruována tzv. umělá regrese, která je uvedena v rovnici (8.20), jak uvádí Arlt a Arltová (2007). Vysvětlovanou proměnnou je kvadrát reziduí a vysvětlující proměnnou kvadrát reziduí v prvním zpoždění.

$$\hat{a}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{a}_{t-1}^2 + u_t \qquad (8.20)$$

Metodou nejmenších čtverců jsou odhadnuty parametry a za předpokladu platnosti nulové hypotézy má statistika TR^2 rozdělení $\chi^2(1)$, T je počet měření, R^2 je index determinace. V případě vysokých hodnot statistiky TR^2 nulovou hypotézu zamítáme, a potvrzuje se, že nesystematická složka vykazuje podmíněnou heteroskedasticitu. Pro posouzení efektu $ARCH(q)$ je konstruována rovnice (3.21). V tomto případě za předpokladu platnosti nulové hypotézy má testové kritérium TR^2 rozdělení $\chi^2(q)$.

$$\hat{a}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{a}_{t-1}^2 + \cdots \alpha_q \hat{a}_{t-q}^2 + u_t \qquad (8.21)$$

Heteroskedasticita může být způsobena i přítomností odlehlých pozorování, a řešením může být jejich vypuštění z modelu. Heteroskedasticita je nežádoucí, protože způsobuje chybné testování parametrů v modelu.

8.6.2 Autokorelace

Přítomnost autokorelace v modelu může znamenat, že nebyla odfiltrována veškerá systematická složka. V případě jednorozměrného procesu je pro zkoumání autokorelace používá výběrová autokorelační funkce (ACF) $\hat{r}_k = \frac{\sum_t \hat{a}_t \hat{a}_{t-k}}{\sum_t \hat{a}_t}$. V případě nekorelovanosti nesystematické složky leží hodnoty výběrové ACF uvnitř intervalu $\left(-2\sqrt{T},\ 2\sqrt{T}\right)$. Přítomnost autokorelace je ověřována na základě Portmanteau testu, kde

$$H_0\colon \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_K = 0$$
H_1: neplatí H_0.

Je-li model správně konstruován, pak má statistika $Q = T\sum_{k=1}^{K} \hat{\rho}_k^2$ pro vysoká T a K přibližně rozdělení $\chi^2(K-p-q)$. Pro malé výběry se používá statistika označována jako modifikovaná Portmanteau statistika (Arlt a Arltová, 2007).

8.6.3 Normalita

Normalitu lze sledovat pomocí χ^2 testu dobré shody, nejčastěji je však využíván Jarque-Bera test, který je založený na testování šikmosti a špičatosti rozdělení. Hypotézy jsou

H_0: normální rozdělení,
H_1: jiné než normální rozdělení.

Testové kritérium $JB = SK^2 + K^2$, kde SK je šikmost rozdělení a K je špičatost rozdělení, má za předpokladu platnosti nulové hypotézy rozdělení $\chi^2(2)$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Společnost na výrobu bytového textilu zkoumala, jak souvisí zisk z prodeje s výdaji na reklamu. Tabulka 1 uvádí údaje obdržené v deseti náhodně vybraných firmách. Načrtněte bodový graf a určete typ regresní funkce popisující danou závislost. Stanovte koeficienty regresní funkce. Vypočítejte koeficient determinace a zhodnoťte těsnost závislosti vyjádřenou regresním modelem.

Tabulka 1: Zisk z prodeje a výdaje na reklamu

Pozorování	Výdaje na reklamu (tis. Kč)	Zisk z prodeje (10 tis. Kč)
1	6	5
2	8	8
3	9	9
4	9	12
5	12	21
6	15	25
7	16	32
8	20	36
9	22	51
10	23	59

Řešení („ruční“ výpočet):
Z grafu vidíte, že jde o přímou závislost, kterou je možné popsat regresní přímkou

$Y = \beta_0 + \beta_1 x$.

Máte za úkol stanovit hodnoty koeficientů b_0, b_1, neboli na základě dat odhadnout hodnoty parametrů β_1, β_2. Využijeme výsledků metody nejmenších čtverců, nebudete však dosazovat přímo do soustavy rovnic (3.12), ale použijete vztahy pro b_0, b_1, tj. (3.13), které je možné z dané soustavy vyjádřit, a to v numericky výhodném a snadno zapamatovatelném tvaru:

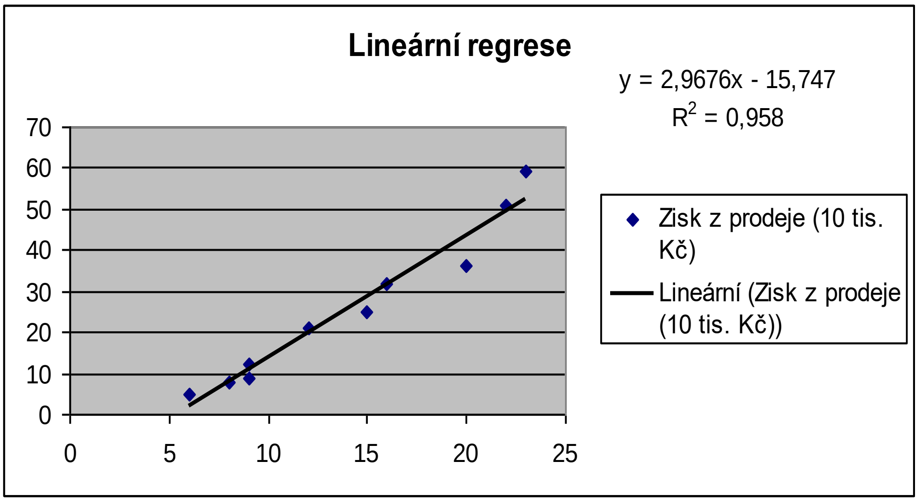
$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{462{,}1 - 14 \cdot 25{,}8}{230 - 14^2} = \frac{100{,}9}{34} = 2{,}97$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 25{,}8 - 2{,}97 \cdot 14 = -15{,}75 .$$

Výpočty potřebných hodnot pomocí kalkulačky jsou uvedeny v Tabulce 2.

Tabulka 2: Výpočty

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	Y_i	$(Y_i-\bar{y})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	6	5	36	0	2,04	565,21	432,64
2	8	8	64	64	7,98	318,22	316,84
3	9	9	81	81	10,95	221,15	282,24
4	9	12	81	108	10,95	221,15	190,44
5	12	21	144	252	19,86	35,62	23,04
6	15	25	225	375	28,77	8,61	0,64
7	16	32	256	512	31,74	34,84	38,44
8	20	36	400	720	43,62	315,88	104,04
9	22	51	484	1122	49,56	562,08	635,04
10	23	59	529	1357	52,53	711,60	1102,24
Součet	140	258	2300	4621	258	2994,3	3125,6
Průměr	14	25,8	230	462,1			



Obrázek 22: Graf regresní přímky

Hledaná regresní přímka má tvar: $Y = -15{,}75 + 2{,}97x$.

a. K tomu, abychom vypočítali determinační koeficient, musíme znát hodnotu součtu S_T a součtu S_y. Tyto součty vypočítáme podle vztahů (3.14), (3.15). Pro výpočet teoretického součtu musíme pro každé x_i, $i = 1, \ldots, 10$, znát teoretickou hodnotu Y_i.

$$Y_1 = -15{,}75 + 2{,}97 \cdot x_1 = -15{,}78 + 2{,}97 \cdot 6 = 2{,}04.$$

Tato hodnota udává, jaký by měl být zisk při výdajích $x = 6$. Protože však jde o stochastickou závislost mezi společenskými veličinami, může se tato hodnota lišit od skutečně zjištěné hodnoty $y = 5$. Všechny teoretické hodnoty Y_i i hodnoty součtů S_y a S_T jsou uvedeny v Tabulce 8. Koeficient determinace vypočítáme dosazením součtů S_y, S_T do vztahu (3.18).

$$R^2 = \frac{S_T}{S_y} = \frac{2994{,}3}{3125{,}6} = 0{,}958.$$

Tato hodnota znamená, že pomocí regresní přímky $Y = -15{,}78 + 2{,}97x$ je vysvětleno 95,8 % chování proměnné Y.

Řešení (výpočet v Excelu):

V Excelu využijeme graf funkce s funkcí Přidat spojnici trendu. Po volbě položky Vložit graf → XY bodový..., se otevře zadávací okno, kde zadáte:

Oblast dat: $A$1:$B$11

Sloupce: √ (zakliknout)

Potvrdíte OK

Obdržíte bodový graf, viz Obrázek 14 (ještě bez regresní přímky). Poklepem pravým tlačítkem myši na některý z bodů grafu obdržíte nabídku menu, kde zvolíte: Přidat spojnici trendu, Typ trendu regrese: zvolíte Lineární

Dále otevřete záložku *Možnosti*, kde zakliknete:

Zobrazit rovnici regrese (rovnice regresní přímky) a

Zobrazit hodnotu spolehlivosti R (hodnotu koeficientu determinace R^2).

Potvrdíte OK.

Obdržíte výsledek téměř takový, jaký je na Obrázku 14. K původním bodům se zobrazí regresní přímka, dále rovnice regresní přímky a hodnotu koeficientu determinace R^2.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Společnost Air-Ostrava, zajišťující lety na trase Ostrava-Praha, sleduje při plánování letů také na hmotnost užitečného zatížení letadla, jehož významnou část tvoří pasažéři a jejich zavazadla. Zjistilo se, že hmotnost zavazadel cestujících souvisí s dobou, na kterou odcestovali. Výsledky průzkumu zachycuje Tabulka 3.

a. Najděte rovnici regresní přímky popisující danou závislost.

b. S jakou hmotností zavazadel lze počítat, bude-li na palubě 15 cestujících vracejících se za 2 dny, 7 cestujících vracejících se za 5 dnů, 5 cestujících vracejících se za 6 dnů a 1 cestující vracející se za 14 dní.

Tabulka 3: Výsledky průzkumu

Pozorování	Dny	Hmotnost
1	13	46
2	12	43
3	9	29
4	16	52
5	10	31
6	5	18
7	2	11
8	3	12
9	8	25
10	2	10
11	14	48
12	19	60
13	3	15
14	5	20
15	2	12

Řešení:
Prezentujeme zde pouze „ruční" výpočet řešení (s kalkulačkou), řešení pomocí Excelu s využitím funkce Přidat spojnici trendu v bodovém grafu ponecháváme na čtenáři.

a. K výpočtu regresních koeficientů b_0, b_1 použijeme opět vztahů (3.13):

$$b_1 = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{324{,}4 - 8{,}2 \cdot 28{,}8}{96{,}73 - 8{,}2^2} = 2{,}99, \qquad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 28{,}8 - 2{,}99 \cdot 8{,}2 = 4{,}27$$

Regresní přímka má tedy tvar $Y = 4{,}27 + 2{,}99x$.

Tabulka 4: Výpočty

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	13	46	598	169
2	12	43	516	144
3	9	29	261	81
4	16	52	832	256
5	10	31	310	100
6	5	18	90	25
7	2	11	22	4
8	3	12	36	9
9	8	25	200	64
10	2	10	20	4
11	14	48	672	196
12	19	60	1140	361
13	3	15	45	9
14	5	20	100	25
15	2	12	24	4
Součet	123	432	4866	1451
Průměr	8,2	28,8	324,4	96,73

b. Vypočítáme hodnotu Y pro x = 2: $Y(2) = 4{,}27 + 2{,}99 \cdot 2 = 10{,}25$,

x = 5: $Y(5) = 4{,}27 + 2{,}99 \cdot 5 = 19{,}22$,

x = 6: $Y(6) = 4{,}27 + 2{,}99 \cdot 6 = 22{,}21$,

x =14: $Y(14) = 4{,}27 + 2{,}99 \cdot 14 = 46{,}13$.

Potom hmotnost zavazadel m, se kterou lze počítat, snadno zjistíte, uvážíte-li počty příslušných cestujících:

$m = 15 \cdot Y(2) + 7 \cdot Y(5) + 5 \cdot Y(6) + 1 \cdot Y(14) = 153{,}75 + 134{,}54 + 111{,}05 + 46{,}13 = 445{,}47$ kg.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3 – SPOTŘEBNÍ FUNKCE KEYNESIÁNSKÉHO TYPU

Tato řešená úloha prezentuje ekonometrické modelování pro jednoduchou spotřební funkci keynesiánského typu pro české domácnosti v roce 2023. Predikujte vývoj spotřeby pro domácnost s měsíčním důchodem 55tis.Kč. Tato úloha bude řešena pomocí programu GRETL.
(Keynes: Lidé jsou v průměru ochotni zvyšovat svou spotřebu při rostoucích příjmech, ale ne v takové výši, jak rostou příjmy. Jedná se o přímou závislost reálné spotřeby především na reálném důchodu, přičemž spotřeba roste pomaleji než důchod.

Vymezení ekonomického modelu:

- Stanovení předmětu zkoumání – keynesiánská jednoduchá spotřební funkce
- Klasifikace ekonomických veličin – C_i (reálná spotřeba *i*-té domácnosti), Y_i (příjem domácnosti)
- Vymezení a verbální popis vazeb a vztahů mezi veličinami (přímá závislost reálné spotřeby především na reálném důchodu)
- Formulace výchozí základní hypotézy či tvrzení o chování ekonomických veličin (spotřeba roste pomaleji než důchod)

Vymezení matematického modelu:

Jednorovnicový lineární model: $C_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot Y_i, \quad i = 1,2,\dots,n$,
Kde β_1 je regresní parametr úrovňové konstanty a β_2 je regresní parametr sklonu, který se očekává $0 < \beta_2 < 1$.

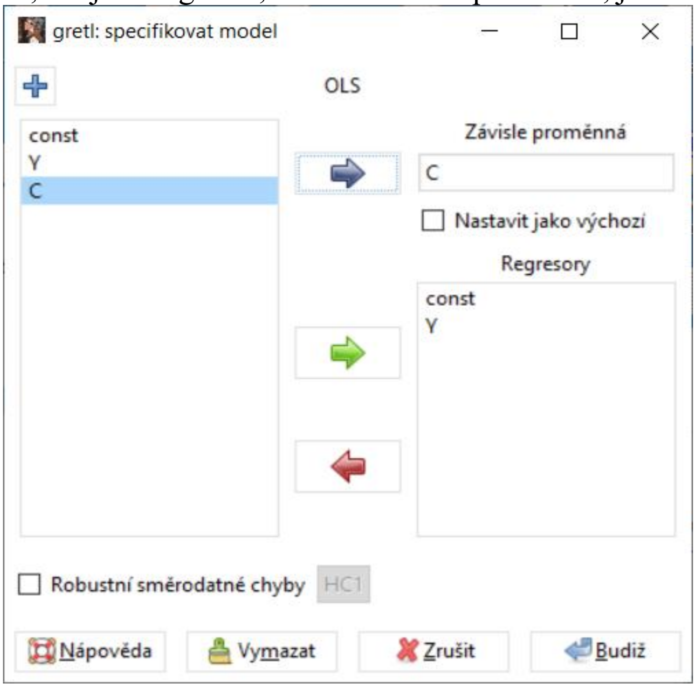
Formulace stochastického ekonometrického modelu:

Předpokládá zavedení náhodné složky u_i do rovnice: $C_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot Y_i + u_i, \quad i = 1,2,\dots,n$, přičemž se předpokládá, že náhodná složka bude mít normální rozdělení s střední hodnostou nula, konstantním rozptylem, a nebude sériově závislá na svých zpožděných hodnotách.

	Y (příjem v Kč)	*C (spotřeba v Kč)*
1	46 995	33 907
2	46 644	34 717
3	46 295	34 363
4	46 847	35 365
5	48 695	35 799
6	49 887	36 722
7	50 801	37 993
8	52 631	40 389
9	54 906	40 750
10	58 410	41 826
11	62 493	43 496
12	66 326	45 079
13	67 850	46 323
14	65 124	46 636
15	66 550	46 662

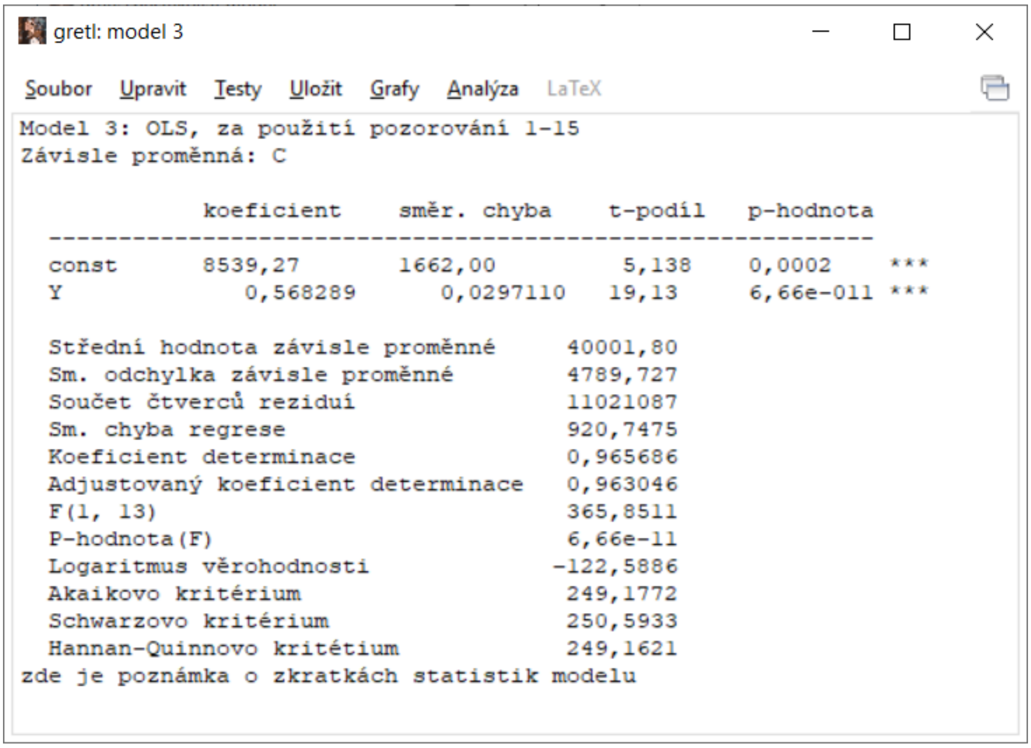
Řešení:

Prezentujeme zde řešení pomocí programu GRETL. Nejprve do programu zadáme obě proměnné (C spotřeba domácností, Y příjem domácností). V hlavním menu vybereme MODEL→Ordinary Least Squares a objeví se následující dialogové okno, kde doplníme C jako závislou proměnnou, a Y jako regresor, tzn. nezávislou proměnou, jak ukazuje Obrázek 23.



Obrázek 23: Dialogové okno – specifikace modelu

Po potvrzení dostáváme výsledek, který zachycuje Obrázek 23. Z toho vidíme, že regresní koeficient b_2 = 0,568 je statisticky významný na hladině významnosti 0,01 (p-hodnota je menší než 0,05), rovnice modelu je $C = 8539{,}27 + 0{,}568 \cdot Y$, koeficient determinace $R^2 = 0{,}96$. Predikce pro Y = 55 je C = 8539,27 + 0,568.55000 = 39 779 Kč.

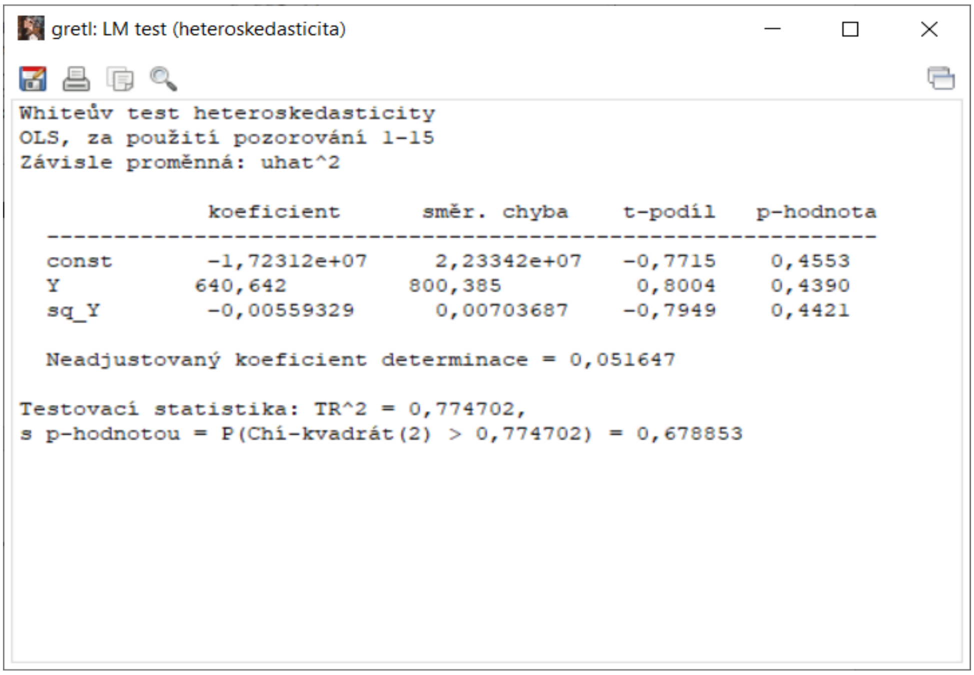


```
gretl: model 3
Soubor  Upravit  Testy  Uložit  Grafy  Analýza  LaTeX
Model 3: OLS, za použití pozorování 1-15
Závisle proměnná: C

             koeficient    směr. chyba    t-podíl   p-hodnota
  ------------------------------------------------------------
  const      8539,27       1662,00         5,138    0,0002    ***
  Y             0,568289      0,0297110   19,13     6,66e-011 ***

  Střední hodnota závisle proměnné     40001,80
  Sm. odchylka závisle proměnné        4789,727
  Součet čtverců reziduí               11021087
  Sm. chyba regrese                    920,7475
  Koeficient determinace               0,965686
  Adjustovaný koeficient determinace   0,963046
  F(1, 13)                             365,8511
  P-hodnota(F)                         6,66e-11
  Logaritmus věrohodnosti             -122,5886
  Akaikovo kritérium                   249,1772
  Schwarzovo kritérium                 250,5933
  Hannan-Quinnovo kritétium            249,1621
zde je poznámka o zkratkách statistik modelu
```

Obrázek 23: Odhad koeficientů metodou nejmenších čtverců

Dále ověříme předpoklady modelu: heteroskedasticitu, normalitu a autokorelaci reziduí.

Pro testování heteroskedasticity vybereme ve výstupu modelu záložku TESTY→Heteroskedasticita→Whiteův test. A dostaneme výsledek, který zachycuje Obrázek 24.

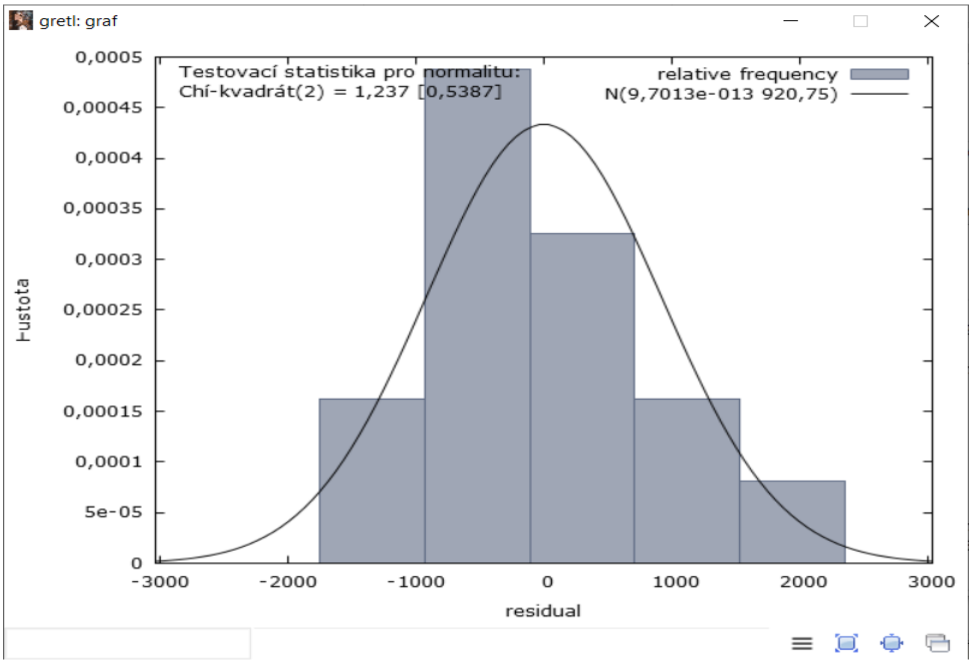


```
gretl: LM test (heteroskedasticita)
Whiteův test heteroskedasticity
OLS, za použití pozorování 1-15
Závisle proměnná: uhat^2

             koeficient      směr. chyba     t-podíl   p-hodnota
  --------------------------------------------------------------
  const      -1,72312e+07     2,23342e+07    -0,7715    0,4553
  Y          640,642        800,385           0,8004    0,4390
  sq_Y        -0,00559329     0,00703687     -0,7949    0,4421

  Neadjustovaný koeficient determinace = 0,051647

Testovací statistika: TR^2 = 0,774702,
s p-hodnotou = P(Chí-kvadrát(2) > 0,774702) = 0,678853
```

Obrázek 24: Test heteroskedasticity

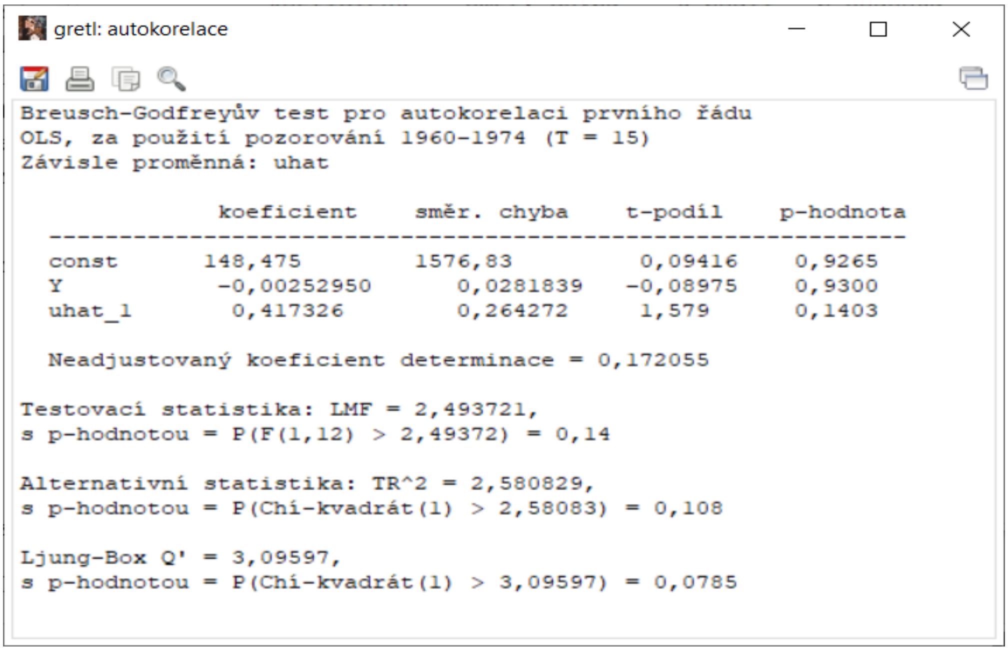
Vyhodnocení testu hetrosdedaticity provedeme na základě vypočtené *p*-hodnoty. Testuje se nulová hypotéza H_0: homoskedasticita reziduí (tj. konstantní rozptyl reziduí), opoti alternativní hypotéze H_1: heteroskedasticita reziduí. *P*-hodnota = 0,678 je větší než zvolené $\alpha = 0{,}05$; proto H_0 nelze zamítnout, nebylo tedy prokázáno, že by rezidua neměla konstantní rozptyl.

Pro testování normality vybereme ve výstupu modelu záložku TESTY→Normalita reziduí. A dostaneme výsledek, který zachycuje Obrázek 25. Vyhodnocení provedeného testu normality je pravděpodobně nejsnazší odvodit z průběhu grafu předpokládaného normálního rozdělení v porovnání se skutečným rozdělením reziduí a analýzou *p*-hodnoty Chí-kvadrát testu. Testuje se nulová hypotéza H_0: Rezidua mají normální rozdělení, oproti H_1: Rezidua nemají normální rozdělení. *P*-hodnota = 0,5387 je větší než zvolené $\alpha = 0{,}05$; proto H_0 nelze zamítnout, nebylo tedy prokázáno, že by rezidua neměla normální rozdělení.



Obrázek 25: Test normality

Pokud chceme pomocí programu GRETL testovat autokorelaci, musíme vstupní data uložit jako časovou řadu. Testuje se, zda je u_t závislé na u_{t-1}. Vybereme ve výstupu modelu záložku TESTY→Autokorelace. A dostaneme výsledek, který zachycuje Obrázek 26.



```
gretl: autokorelace

Breusch-Godfreyův test pro autokorelaci prvního řádu
OLS, za použití pozorování 1960-1974 (T = 15)
Závisle proměnná: uhat

                 koeficient    směr. chyba    t-podíl    p-hodnota
  ---------------------------------------------------------------
  const        148,475       1576,83         0,09416    0,9265
  Y             -0,00252950     0,0281839   -0,08975    0,9300
  uhat_1         0,417326       0,264272     1,579      0,1403

  Neadjustovaný koeficient determinace = 0,172055

Testovací statistika: LMF = 2,493721,
s p-hodnotou = P(F(1,12) > 2,49372) = 0,14

Alternativní statistika: TR^2 = 2,580829,
s p-hodnotou = P(Chí-kvadrát(1) > 2,58083) = 0,108

Ljung-Box Q' = 3,09597,
s p-hodnotou = P(Chí-kvadrát(1) > 3,09597) = 0,0785
```

Obrázek 26: Test autokorelace

Testuje se nulová hypotéza H0: Rezidua nejsou autokorelována, oproti H1: Rezidua jsou autokorelována. *P*-hodnota = 0,14 je větší než zvolené α = 0,05; proto H0 nelze zamítnout, nebylo tedy prokázáno, že by rezidua byla autokorelována.

SAMOSTATNÉ ÚKOLY

1. Personální ředitel firmy shromáždil údaje o věku (*X*) a době pracovní neschopnosti (*Y*) dvaceti náhodně vybraných stálých zaměstnanců. Zjištěné údaje jsou zaznamenány v tabulce.

X	*Y*	*X*	*Y*
20	4	58	20
35	14	46	13
35	15	43	16
34	10	33	10
32	10	29	10
28	9	36	11
25	12	48	14
46	15	55	15
38	15	36	14
50	16	19	6

Načrtněte bodový graf a najděte rovnici regresní funkce vyjadřující danou závislost. Zhodnoťte výstižnost (přiléhavost) regresní funkce vzhledem k datům.

2. Bylo sledováno, jak souvisí množství vadných výrobků (v % z vyrobených výrobků) s výkonem soustružníka (v % z předepsané normy). Bylo vybráno deset pracovníků, naměřené údaje jsou uvedeny v tabulce.

Výkon	56	68	72	85	92	102	107	111	123	142
Vadné výrobky	5,2	3,9	3,5	2,4	2,04	2	2,2	2,24	2,4	2,51

Stanovte regresní model a určete přiléhavost regresní přímky k datům.

3. Tabulka zachycuje stáří (v letech) osmi vybraných strojů v potravinářském závodě a týdenní náklady (v Kč) na provoz těchto strojů.

Stáří stroje	1	2	3	4	5	6	7	8
Náklady	44	52	61	80	94	108	111	116

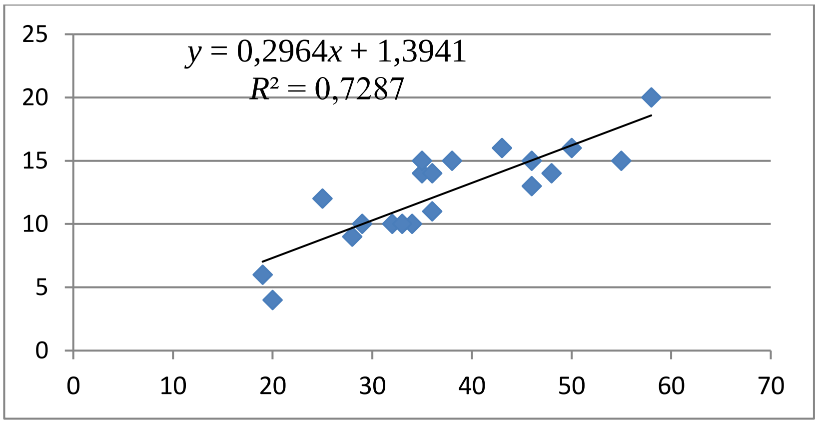
a. Odhadněte parametry lineární regresní funkce, která by měla vystihovat průběh závislosti nákladů na stáří.

b. Určete koeficient determinace R^2 a interpretujte jej.

c. Jaké týdenní náklady můžeme očekávat u stroje starého 4 roky?

ODPOVĚDI

1.



2. $Y = -0,0285x + 5,56\,; \quad R^2 = 0,53.$

3. **a)** $Y = 32,14 + 11,36x$

b) $R^2 = 0,97$ tzn. modelem je vysvětleno 97 % celkové variability.

c) $Y(4) = 32,14 + 11,36.4 = 77,58\ Kč.$

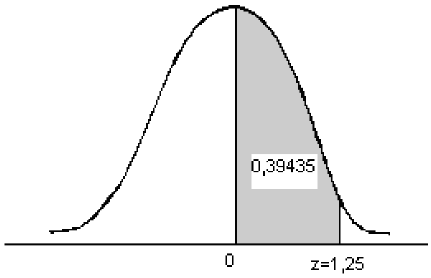
SHRNUTÍ KAPITOLY

Tato kapitola se zabývala jednoduchou regresní analýzou, byl zde formulován model jednoduché lineární regresní analýzy. Dále zde byla vysvětlena metoda nejmenších čtverců k nalezení „nejlepších" hodnot regresních koeficientů v regresním modelu. Míra přiléhavosti dat k regresní křivce byla stanovena pomocí koeficientu determinace a jeho odmocniny – koeficientu korelace. Nakonec jste se seznámili s tzv. klasickým jednoduchým regresním modelem, který stanovuje 3 základní podmínky, kterým by měl vyhovovat regresní model vzhledem k existujícím datům.

PŘÍLOHA

TABULKA 1

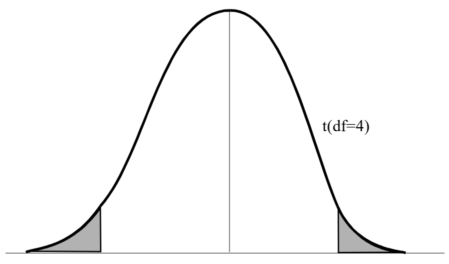
Plocha pod křivkou
normovaného normálního rozdělení *N*(0,1)



$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,10260	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,18824	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,36460	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34850	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	**0,39435**	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42786	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46928	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48573
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49532	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49897	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929

TABULKA 2

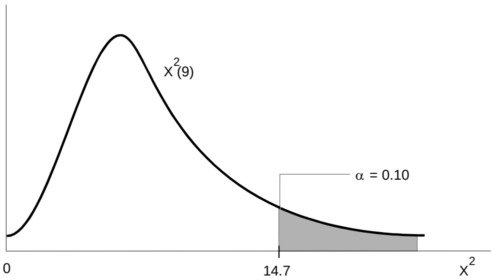
Kritické hodnoty Studentova rozdělení $t_{\alpha}(df)$



α	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	jednostranný
α df	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001	oboustranný
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941	
4	0,741	0,941	1,195	1,533	2,132	**2,776**	3,747	4,604	8,610	
5	0,727	0,925	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859	
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405	
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	
9	0,073	0,883	1,100	1,383	1,883	2,262	2,821	3,250	4,781	
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	
12	0,695	0,783	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965	
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922	
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883	
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850	
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,271	2,080	2,518	2,831	3,819	
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792	
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,140	2,069	2,500	2,807	3,767	
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745	
25	0,684	0,865	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,720	
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707	
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690	
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674	
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659	
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,666	
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551	
60	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460	
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373	
+∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291	

TABULKA 3

Kritické hodnoty rozdělení Chi-kvadrát
$\chi^2_\alpha(df)$



df \ α	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,7	3,8	5,0	6,6	7,9
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,6	6,0	7,4	9,2	10,6
3	0,07	0,12	0,22	0,35	0,58	6,3	7,8	9,4	11,3	12,8
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,8	9,5	11,1	13,3	14,9
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,2	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,74	2,09	2,70	3,33	4,17	**14,7**	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,0	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,51	10,98	12,34	14,04	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,58	32,0	35,2	38,1	41,6	42,2
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,6	38,9	41,9	45,6	48,6
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7

TABULKA 4

Kritické hodnoty Fisherova rozdělení *F*

$F_{\alpha}\ (df_1, df_2)$

Příklad: $F_{0,05}\ (5,7)=3,97$

		df₂								
df_1	α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	**0,100**	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86
	0,050	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
	0,025	647,79	799,48	864,15	899,60	921,83	937,11	948,20	956,64	963,28
	0,010	4052,1	4999,3	5403,5	5624,2	5763,9	5858,9	5928,3	5980,9	6022,4
2	**0,100**	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38
	0,050	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
	0,025	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39
	0,010	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39
3	**0,100**	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24
	0,050	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
	0,025	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47
	0,010	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34
4	**0,100**	4,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24
	0,050	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
	0,025	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90
	0,010	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	**0,100**	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32
	0,050	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
	0,025	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68
	0,010	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	**0,100**	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96
	0,050	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
	0,025	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52
	0,010	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	**0,100**	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72
	0,050	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
	0,025	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82
	0,010	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	**0,100**	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56
	0,050	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
	0,025	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36
	0,010	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91

TESTOVÉ PŘÍKLADY

1. Řešte maticovou rovnici $AX = B$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Je dána posloupnost $a_n = \frac{-3n+4}{n+5}$.

Určete $a_1 =\qquad, a_2 = \qquad, a_3 = \qquad, \quad lim\, a_n = \qquad, sup\, P = \qquad, inf\, P =$
Načrtněte graf.

3. Určete parametr $a \in R$ tak, aby byla matice *A* regulární :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2-a \\ 3+a & -2 \end{pmatrix}$$

4. Načrtněte graf funkce $y = -3x + 4$ a určete tyto limity
$\lim_{x\to\infty}(-3x+4) = \ldots.$ $\lim_{x\to 1}(-3x+4) = \ldots\ldots$

5. Vypočtěte:

a) Vypočtěte součin: $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

b) Načrtněte graf funkce $y = x^2$ a vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} x^2 =$

c) Vypočtěte inflexní body funkce $y = x^3 - 3x^2 + 6$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x-x^2} =$ $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{16-x^2} =$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{16-x^2} =$

6. Vypočtěte definiční obor funkce $f(x) = \frac{4\, arccos(x-2)}{\sqrt{9-x^2}}$

7. Pro funkci $f(x) = ln(1-x^2)$ vypočtěte $f''(0) = \ldots..$ a určete D(f) = ………..

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

8. V daném dnu bylo v prodejně elektroniky uskutečněno 30 nákupů (v Kč):

490	610	1140	1080	220	910	800	1170	1180	1170
880	1230	780	440	2040	1320	1170	780	1150	1360

a) Do následující tabulky doplňte četnosti tříd a načrtněte histogram četnosti:

Třída	Četnost
200 – 599	
600 – 999	
1000 – 1399	

b) Vypočtěte průměr, medián a směrodatnou odchylku.

9. Počet automobilů zastavujících u benzínového čerpadla za hodinu se řídí_________ rozdělením pravděpodobnosti.

a) Doplňte chybějící název.
b) Uveďte vzorec pro výpočet pravděpodobnosti zastavení alespoň *n* automobilů za hodinu, víte-li, že průměrně zastaví u čerpadla 1 automobil za 10 minut.
c) Vypočtěte pravděpodobnost podle a) pro $n = 2$ automobily.

10. V jisté oblasti bydlí voliči 3 politických stran: A, B, C, D. Průzkum volebních preferencí u 1000 respondentů ukázal následující výsledky:

Politická strana	**A**	**B**	**C**	**D**
Počet příznivců	240	252	266	242

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o stejném zastoupení příznivců všech 4 politických stran (tj. stejných volebních preferencích všech 4 stran). Použijte test Chi-kvadrát.

11. Výrobu horských kol (*y*) /v tis. ks / v závislosti na počtu odpracovaných hodin ve firmě udává následující tabulka:

x *(počet odpracovaných hodin)*	1500	1450	1600	1700	1900	2000
y *(výroba)*	22,3	22,0	23	25	26	28

a) Metodou regresní analýzy vypočtěte odhady neznámých regresních koeficientů v lineární regresní funkci.

b) Vypočtěte koeficient determinace a na jeho základě slovně zhodnoťte „přiléhavost“ dat k regresnímu modelu.

LITERATURA

ANDĚL, Jiří, 2007. *Statistické metody.* 4. upr. vyd. Praha: Marfyzpress, 299 s. ISBN 80-7378-003-8.

ANDĚL, Jiří, 2011. *Základy matematické statistiky.* Praha: Matfyzpress. ISBN 978-80-7378-162-0.

ARLT, Josef, 1999. *Moderní metody modelování ekonomických časových řad*. 1.vyd. Praha: Grada Publishing, 307 s. ISBN 80-716-9539-4.

ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ, 2007. *Ekonomické časové řady: vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*. 1. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-1319-9.

ARLTOVÁ, Markéta a kol., 2014. *Základy statistiky v příkladech.* Tribun EU s.r.o. ISBN 978-80-2630-756-3.

CIPRA, Tomáš, 1986. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. 1.vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 246 s.

GUJARATI, Damodar N, c2003. *Basic econometrics*. 4th ed. Boston: McGraw-Hill, xxix, 1002 s. ISBN 978-0-07-233542-2.

HÁTLE, Jaroslav a Jiří LIKEŠ,1974. *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 2. vyd. Praha: SNTL. 463 s.

HINDLS, Richard, SEGER, Jan, FISCHER, Jakub a Stanislava HRONOVÁ, 2007. *Statistika pro ekonomy*. 8. vyd. Praha: Professional Publishing, 418 s. ISBN 978-80-8694-643-6.

KAŇKA, Miloš, 1998. *Vybrané partie z matematiky pro ekonomy*. 1.vyd. Praha: VŠE, 231 s. ISBN 80-707-9537-9.

KAŇKA, Miloš, 2009. *Sbírka řešených příkladů z matematiky pro studenty vysokých škol.* Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-53-8.

KLŮFA, Jindřich a Jan COUFAL, 2003. *Matematika 1*. Praha: Ekopress, 224 s. ISBN 80-86119-76-9.

MAREK, Luboš a kol., 2007. *Statistika pro ekonomy: aplikace*. 2. vyd. Praha: Professional Publishing. 485 s. ISBN 978-80-86946-40-5.

MOUČKA, Jiří a Petr RÁDL, 2015. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2.vyd. Praha: Grada, 272 s. ISBN 978-80-247-5406-2.

RAMÍK, Jaroslav a Šárka ČEMERKOVÁ, 2000. *Statistika A*. Vyd. 3., rozš. a upr. V Opavě: Slezská univerzita, Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné, 162 s. ISBN 80-7248-097-9.

RAMÍK, Jaroslav a Šárka ČEMERKOVÁ, 2000. *Statistika B*. Vyd. 2., rozš. a upr. V Opavě: Slezská univerzita, Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné, 143 s. ISBN 80-724-8099-5.

RAMÍK, Jaroslav a Šárka ČEMERKOVÁ, 2003. *Kvantitativní metody B: statistika*. Vyd. 1. Karviná: Slezská univerzita v Opavě, Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné, 206 s. ISBN 80-724-8198-3.

SEGER, Jan, HRONOVÁ, Stanislava a Richard HINDLS, 1998. *Statistika v hospodář-ství*. 1.vyd. Praha: ETC Publishing, 636 s. ISBN 80-860-0656-5.

STOKLASOVÁ, Radmila, 2013. *Kvantitativní metody.* Karviná: SU OPF. ISBN 978-80-7248-848-3.

SHRNUTÍ STUDIJNÍ OPORY

Obsahově studijní opora pokrývá základy matematiky a statistiky, které jsou náplní kurzu Kvantitativní metody v ekonomické praxi. Učební text se skládá ze dvou částí: v první se autorka věnuje základním poznatkům z lineární algebry (maticový počet a determinanty) a z matematické analýzy (funkce jedné reálné proměnné), text je doplněn řešenými příklady s aplikacemi v ekonomii. Druhá část je věnována základním poznatkům z popisné a induktivní statistiky (kvalitativní a kvantitativní znaky (v této kapitole jsou uvedeny také statistické paradoxy), diskrétní a spojité pravděpodobnostní modely, parametrické a neparametrické testy hypotéz, regresní analýza). V textu je uveden výklad teoretických základů dané problematiky a součástí každé kapitoly jsou také řešené příklady. Každá kapitola obsahuje neřešené příklady, které umožňují studentům ověřit své porozumění probírané látky. V příloze jsou k dispozici tabulky kritických hodnot a testové příklady pro další procvičování. Celkově je tento materiál navržen tak, aby poskytoval studentům pevné základy v matematice a statistice s důrazem na aplikace v ekonomickém prostředí.

Tato studijní opora umožňuje studentům plnohodnotnou a současně samostatnou studijní práci.

Vysokoškolské studium tohoto předmětu, Kvantitativní metody v ekonomické praxi, vyžaduje od studentů značné úsilí věnované pravidelnosti a trpělivosti při studiu a samostudiu, schopnost soustředění na téma, aktivní přístup, který zahrnuje samostatné řešení úloh. Tato studijní opora by měla studentům pomoci v těchto oblastech. Dalšími doplňkovými zdroji pro studium mohou být tradiční učebnice, skripta a doporučená literatura.

PŘEHLED DOSTUPNÝCH IKON

Čas potřebný ke studiu	Cíle kapitoly
Klíčová slova	Nezapomeňte na odpočinek
Průvodce studiem	Průvodce textem
Rychlý náhled	Shrnutí
Tutoriály	Definice
K zapamatování	Případová studie
Řešená úloha	Věta
Kontrolní otázka	Korespondenční úkol
Odpovědi	Otázky
Samostatný úkol	Další zdroje
Pro zájemce	Úkol k zamyšlení

Název:	**Kvantitativní metody v ekonomické** praxi
Autor:	**Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.**
Vydavatel:	Slezská univerzita v Opavě
	Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné
Určeno:	studentům SU OPF Karviná
Počet stran:	15958

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou.