



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:
KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:
Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

12. PŘEDNÁŠKA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

Témata přednášky:

- a) regresní analýza,*
- b) lineární regrese,*
- c) metoda nejmenších čtverců,*
- d) koeficient determinace,*
- e) korelační analýza.*



Jaké a k čemu jsou metody stanovení závislosti



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

- závislosti 1. **kvantitativního** znaku na 2. **kvantitativním** znaku (nebo více kvantitativních znacích) - **regresní a korelační analýza**
- závislost dvou znaků - **jednoduchá regresní analýza (jednoduchá korelační analýza)**

Jaké a k čemu jsou metody stanovení závislosti



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

- závislost znaku na více znacích - **vícenásobná regresní analýza**
- znalost závislostí umožňuje:
předvídat chování (prognózovat, predikovat)
závislé veličiny

Příklad – Zisk z reklamy



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

nezávislá - závislá veličina (proměnná)

Firma č.	Výdaje na reklamu (tis. Kč)	Zisk z prodeje (10 tis. Kč)
1	6	5
2	8	8
3	9	9
4	9	12
5	12	21
6	15	25
7	16	32
8	20	36
9	22	51
10	23	59

Jednoduché regresní modely



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$y = f(x) + \varepsilon$$

závisle proměnná → y
regresní funkce → $f(x)$
nezávisle proměnná → x
reziduum → ε

Lineární regresní funkce:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Jednoduché regresní modely



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Parabolická regresní funkce :

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

Exponenciální regresní funkce :

$$f(x) = \beta_0 \beta_1^x$$

Logaritmická regresní funkce:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 \log x$$

Jednoduchá lineární regrese



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

- výběr párových hodnot:

$$(y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3), \dots, (y_n, x_n)$$

- 2 způsoby získání dat:

(A) hodnoty nezávisle proměnné x_i se předem pevně zvolí a k nim se „změří“ příslušné hodnoty y_i

(B) hodnoty (y_i, x_i) se „změří“ na n náhodně zvolených jednotkách základního souboru



Jednoduchá lineární regrese

Soubor párových hodnot se geometricky znázorní v rovině **bodovým grafem**:

reziduum

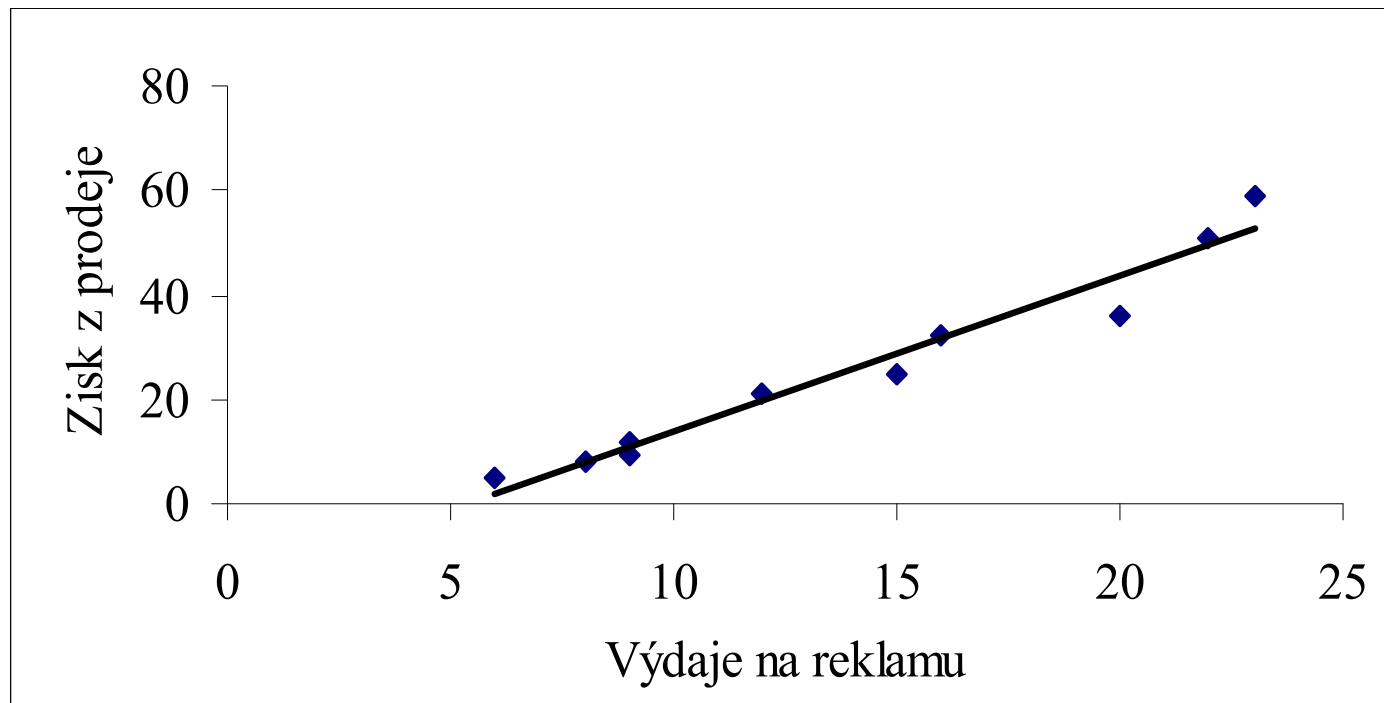
JLR model: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

regresní koeficienty a jejich odhady b_0, b_1

Příklad: Zisk z reklamy (grafické znázornění)



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA



Příklad: Výdaje na reklamu

JRA



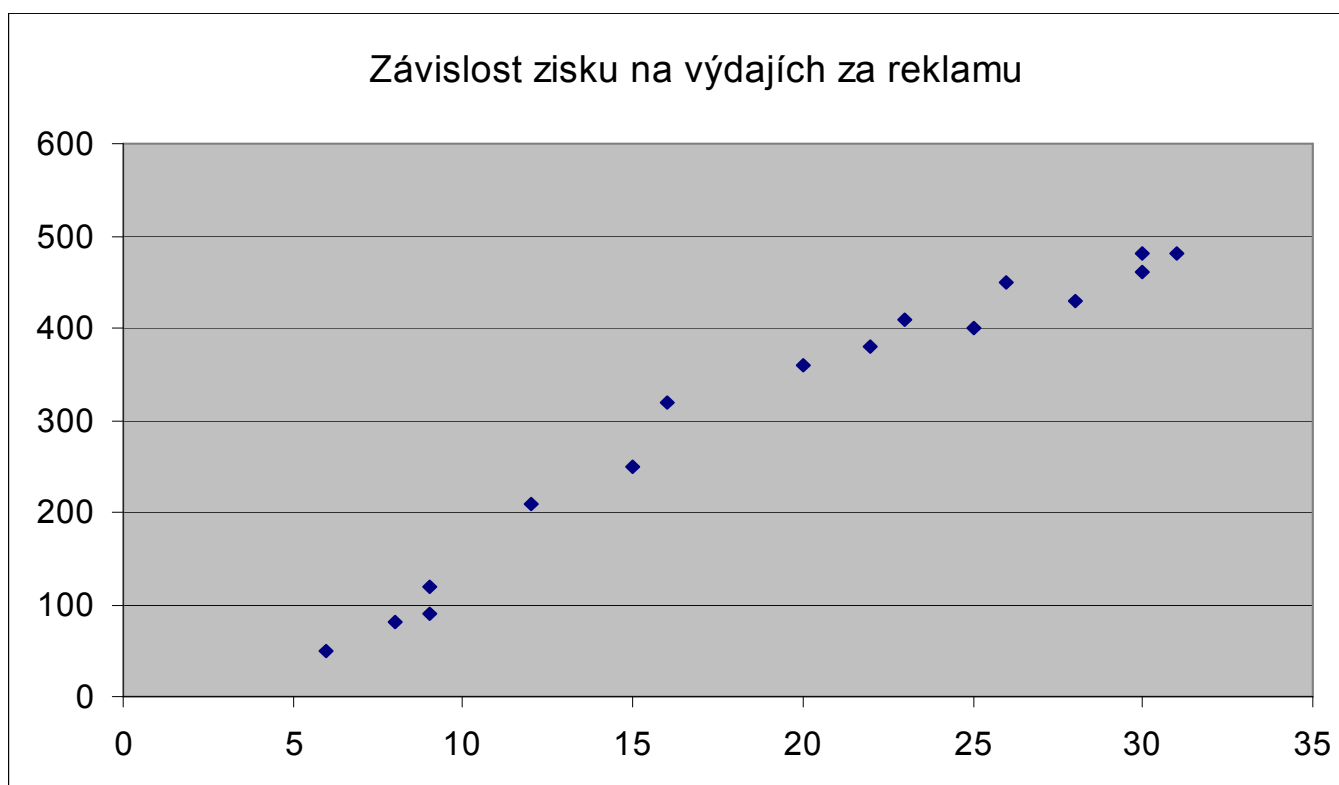
SILESIA
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

č. firmy	Výdaje na reklamu	Výdaje na reklamu	Zisk
1	malé	6	50
2	malé	8	80
3	malé	9	90
4	malé	9	120
5	středně velké	12	210
6	středně velké	15	250
7	středně velké	16	320
8	středně velké	20	360
9	středně velké	22	380
10	středně velké	23	410
11	velké	25	400
12	velké	26	450
13	velké	28	430
14	velké	30	460
15	velké	30	480
16	velké	31	480

Příklad: grafické znázornění



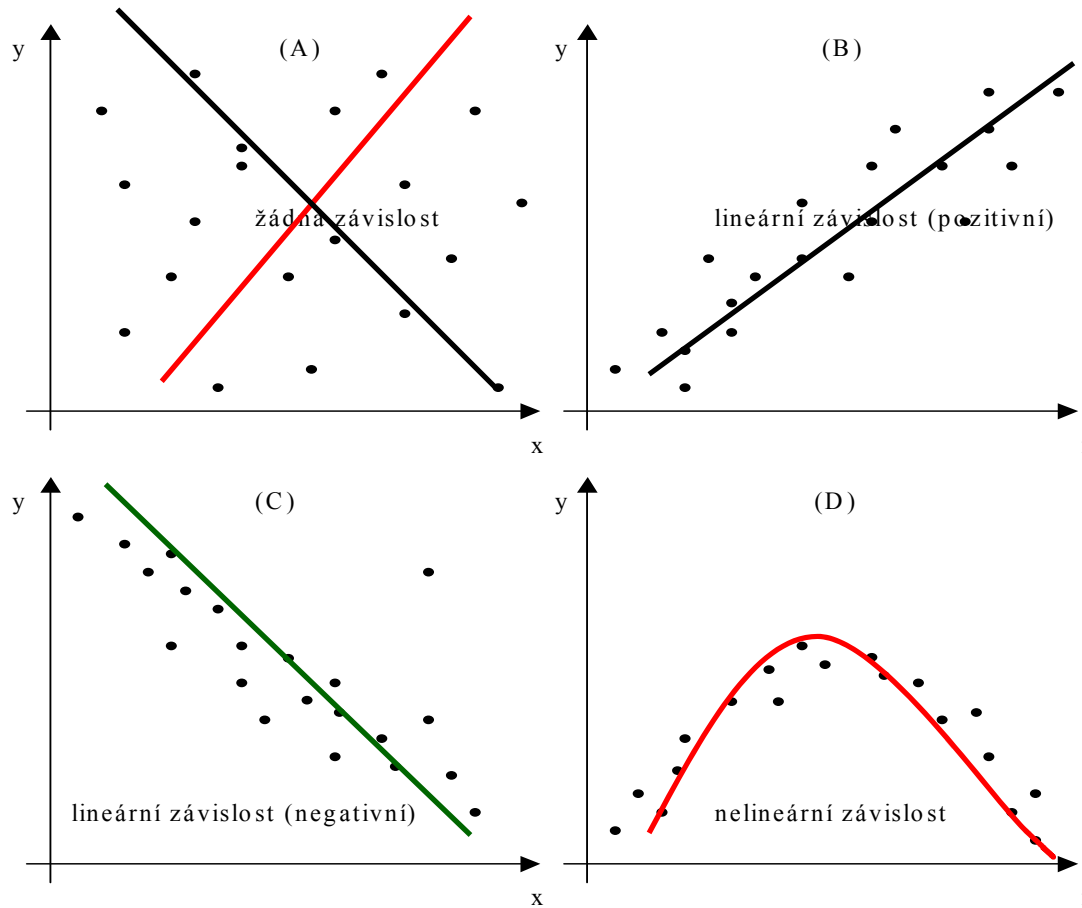
**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA



Bodový diagram (Scatter diagram)



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA





Metoda nejmenších čtverců

Idea MNČ: minimalizovat reziduální součet čtverců:

$$S_R = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (b_0 + b_1 x_i))^2$$

Příklad: Zisk z reklamy

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{462,1 - 14 \cdot 25,8}{230 - 14^2} = \frac{100,9}{34} = 2,97$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 25,8 - 2,97 \cdot 14 = -15,78$$

Regresní funkce: $Y = -15,78 + 2,97x$

Příklad: Zisk z reklamy – ruční výpočty



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	Y_i	$(Y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	6	5	36	30	2,04	565,21	432,64
2	8	8	64	64	7,98	318,22	316,84
3	9	9	81	81	10,95	221,15	282,24
4	9	12	81	108	10,95	221,15	190,44
5	12	21	144	252	19,86	35,62	23,04
6	15	25	225	375	28,77	8,61	0,64
7	16	32	256	512	31,74	34,84	38,44
8	20	36	400	720	43,62	315,88	104,04
9	22	51	484	1122	49,56	562,08	635,04
10	23	59	529	1357	52,53	711,60	1102,24
Součet	140	258	2300	4621	258	2994,3	3125,6
Průměr	14	25,8	230	462,1			

Předpoklady lineárního modelu



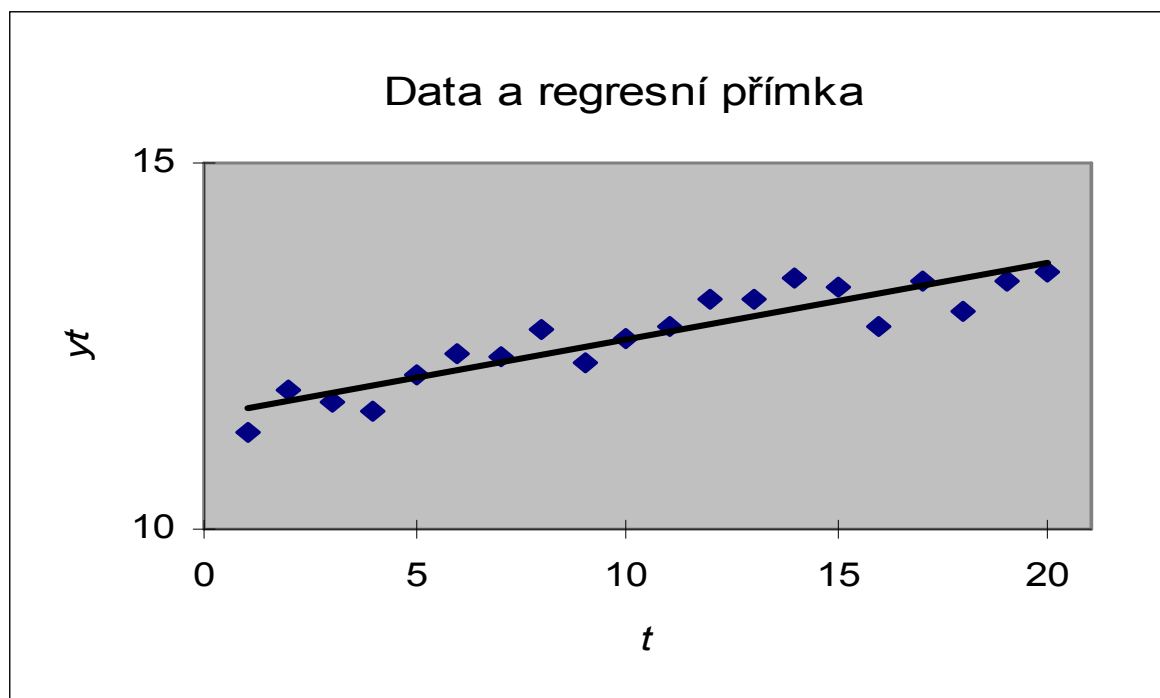
SILESIA
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

1. Hodnoty vysvětlující proměnné x_i se volí předem, **nejsou** to tedy náhodné veličiny.
2. Náhodné složky (rezidua) ε_i mají **normální rozdělení** pravděpodobnosti se střední hodnotou 0 a (neznámým) konstantním rozptylem σ^2 -
tzv. **homoskedasticita**
3. Náhodné složky jsou **nekorelované**, tj.
 $\rho(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pro každé $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.
(ρ - **korelační koeficient**)

Předpoklady lineárního modelu - jsou splněny



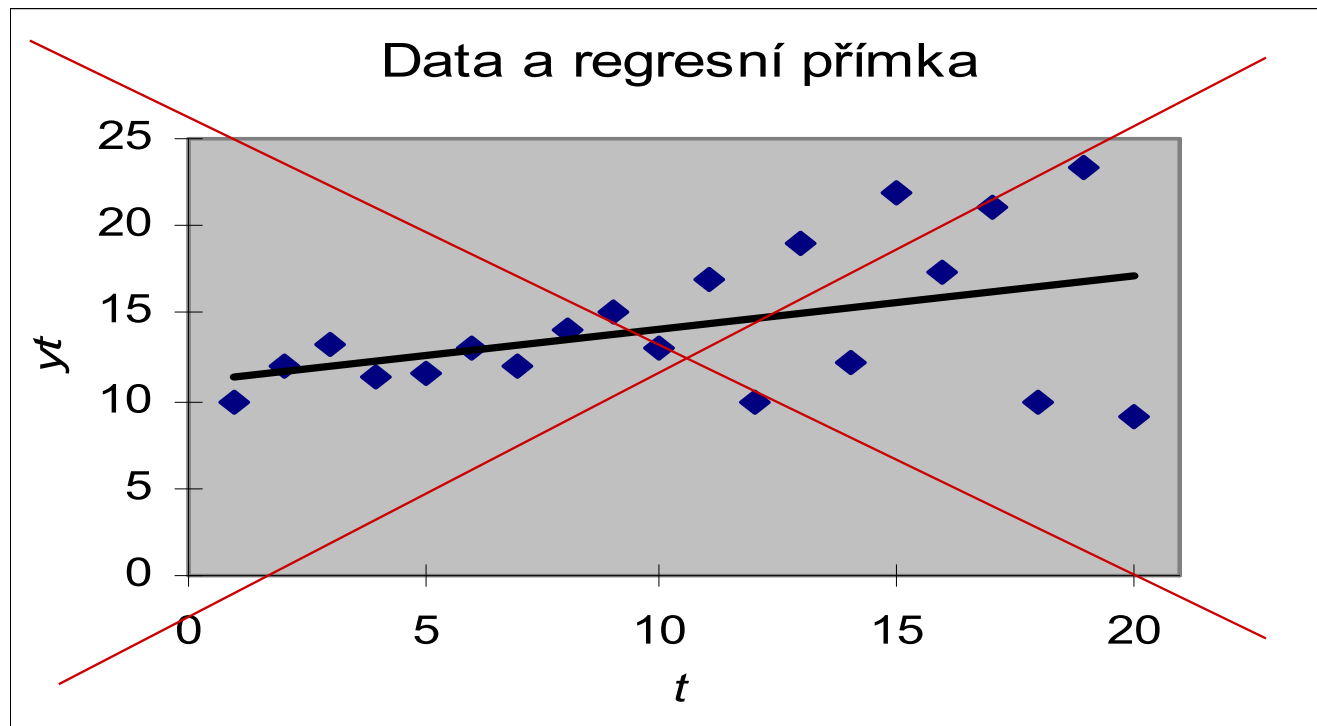
**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA



Předpoklady lineárního modelu – nejsou splněny



SILESIA
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA





Koeficient determinace R^2

Koeficient determinace charakterizuje **přiléhavost** dat k regresnímu modelu (číslo mezi 0 a 1):

$$R^2 = \frac{S_T}{S_y} = \frac{S_y - S_R}{S_y} = 1 - \frac{S_R}{S_y}$$

$$S_y = S_R + S_T$$

- teoretický součet čtverců: $S_T = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^2$
- reziduální součet čtverců $S_R = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2$

Koeficient determinace R^2 - upravený



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Pro malé soubory:
$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - 2}$$

Výpočet koeficientu determinace



SILESIA
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Závislost zisku z prodeje na velikosti nákladů na reklamu:

$$R^2 = \frac{S_T}{S_y} = \frac{2994,3}{3125,6} = 0,958 \qquad R_{adj}^2 = 0,953$$

Koeficient korelace (odmocnina koeficientu determinace)

$$R = 0,979 \qquad R_{adj} = 0,979$$



Trendová funkce v časové řadě

- Hodnotami nezávisle proměnné jsou **ekvidistantní** (tj. stejně vzdálené) **časové okamžiky** $t_i, i=1,2,\dots,n$
- Situace je častá v ekonomických aplikacích, kdy máme k dispozici tzv. **časové řady** ekonomických veličin, např. tržby v jednotlivých měsících, HDP v jednotlivých za sebou jdoucích rocích apod.

Trendová funkce v časové řadě



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

- Lineární **trendová** (regresní) **funkce**:

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

Transformace časové osy v časové řadě



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Zavedení nové časové proměnné t' následujícím způsobem:

$t' = (t - \bar{t})$ je-li počet členů časové řady n lichý

$\bar{t} = \frac{n + 1}{2}$ je-li počet členů časové řady n sudý

$$t' = 2(t - \bar{t}) \quad \sum_{t=1}^n t' = 0$$

Jednodušší odhad regresních koeficientů – MNČ:

$$b_0 = \frac{\sum y_t}{n} \quad b_1 = \frac{\sum t' y_t}{\sum (t')^2}$$

Příklad: časová řada

Výrobu horských kol typu Superba (v tis.ks) udává tabulka:

Rok	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Výroba	22,3	22,0	22,3	???	21,3	21,4	21,1

- Chybějící údaj za rok 2008 doplňte průměrem hodnot sousedních roků 2007 a 2009 a doplněnou časovou řadu schématicky načrtněte.
- Z náčrtu odhadněte správný model trendu této časové řady, pak metodou regresní analýzy vypočtete odhady neznámých regresních koeficientů.

Příklad: časová řada



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

- c) Pomocí modelu z b) prognózuje velikost výroby v roce 2012 a 2013.

- c) Vypočtete koeficient determinace a na jeho základě slovně zhodnoťte „přiléhavost“ dat k regresnímu modelu.

Příklad: časová řada - výpočty



t	y_t	t'	$(t')^2$	$t' \cdot y_t$	T_t	$(y_t - T_t)^2$	$(T_t - y)^2$	$(y_t - y)^2$
1	20,5	-3	9	-61,5	20,75	0,0607	0,6117	1,0580
2	21,1	-2	4	-42,2	21,01	0,0086	0,2719	0,1837
3	21,4	-1	1	-21,4	21,27	0,0175	0,0680	0,0165
4	21,6	0	0	0	21,53	0,0051	0,0000	0,0051
5	21,8	1	1	21,8	21,79	0,0001	0,0680	0,0737
6	22,3	2	4	44,6	22,05	0,0625	0,2719	0,5951
7	22,0	3	9	66	22,31	0,0965	0,6117	0,2222
Sumy	150,7	0	28	7,3	150,70	0,2511	1,9032	2,1543
$b_0 =$	21,53							
$b_1 =$	0,26							
$S_R =$	0,251	$T_{02} =$	22,57					
$S_T =$	1,903	$T_{03} =$	22,83					
$S_y =$	2,154							
$R^2 = S_T / S_y =$	0,88	Model vysvětluje 88 procent variability dat. Data se těsně přimykají k regresní přímce!						

Linearizované regresní funkce

Regresní exponenciální funkce

(Cobb-Douglasova produkční funkce): $f(x) = \beta_0 \beta_1^x$

Substituce: $y' = \ln y$ $x' = x$
 $\beta'_0 = \ln \beta_0$ $\beta'_1 = \ln \beta_1$

MNČ vypočteme odhady: b'_0, b'_1

Zpětná substituce: $b_0 = e^{b'_0}$ $b_1 = e^{b'_1}$ (odhady β_0, β_1)

Korelační analýza



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

V korelační analýze není předem známo, které jsou vysvětlující a které vysvětlované proměnné!

Příklad: Závislost tržeb za zboží X na tržbách zboží Y

Oboustranný vztah - 2 regresní přímky:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon_1 \qquad x = \beta_0 + \beta_1 y + \varepsilon_2$$

Korelační analýza



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Korelační koeficient: $\rho = \pm\sqrt{|\alpha_1\beta_1|}$

Odhad ρ :
$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

Příklad: Výsledky testů 10 studentů



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Počet bodů z matematiky	56	79	50	84	63	91	46	56	74	76
Počet bodů z ekonomie	82	56	46	79	74	83	51	63	75	82

$$r = \frac{10 \cdot 47823 - 675 \cdot 691}{\sqrt{(10 \cdot 47687 - 675^2)(10 \cdot 49501 - 691^2)}} = 0,6112$$

$r > 0,6$ – „vysoká“ hodnota korelace!

Závěr přednášky



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Děkuji Vám za pozornost !!!