

## CVIČENÍ č. 8: Derivace funkce

1. Je dána funkce  $y = x^2$ . Vypočtěte podíl  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  pro  $\Delta x = 0,1$  v bodě  $x = 1$ . Jaká je limita tohoto

podílu pro  $\Delta x$  jdoucí k nule? Jaký je geometrický význam derivace?

2. Derivujte (použijte Tabulku 1):

a)  $y = 5 + x^1 + x^2 + x^3 - x^4$

b)  $y = 24x^5 - 3x^2 + 8x - 4$

c)  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

d)  $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

e)  $y = 2 \ln x + 5 \sin x - \cos x + e^x$

f)  $y = 3^x + 2 \log x + \sqrt[3]{x^2}$

g)  $y = 4 \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x$

h)  $y = 2 \operatorname{arctg} x + 5 \operatorname{arc} \sin x$

3. Vypočtěte derivaci funkce v daném bodě:

a)  $f(x) = x^2, f'(4) = ?$

b)  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, f'(3) = ?$

c)  $f(x) = 3x^3 - 2x + 4, f'(1) = ?$

d)  $f(x) = \frac{3}{x}, f'(-2) = ?$

e)  $f(x) = 3 \ln x + 1, f'(1) = ?$

4. Vypočtěte rovnici tečny ke grafu dané funkce v daném bodě:

a)  $f(x) = x^2, x = 2$

b)  $f(x) = \frac{3}{x}, x = 1$

c)  $f(x) = x^2 - 2x, x = -1$

5. Jaká je souvislost mezi derivací funkce a monotónností funkce v daném bodě (viz cvičení 4)?

6. Pomocí derivace určete přírůstek funkce  $y = x^3 - 2x$  v bodě  $x = 2$  pro  $\Delta x = 0,1$  a  $\Delta x = 0,2$ .

Porovnejte tento přírůstek s přírůstkem vypočteným přímo z předpisu funkce.

7. Derivujte součin funkcí:

a)  $y = x \cdot e^x$

b)  $y = (x^2 + 1) \cdot e^x$

c)  $y = x^3 \cdot \ln x$

d)  $y = (x^2 + 4) \cdot \sin x$

e)  $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$

8. Derivujte podíl funkcí:

a)  $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

b)  $y = \frac{x}{\ln x}$

c)  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

d)  $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

e)  $y = \frac{e^x + 3}{e^x}$

9. Derivujte složené funkce:

a)  $y = (x^2 + 2)^6$

b)  $y = \ln(4x + 1)$

c)  $y = 3 \sin(x^2 + 3)$

d)  $y = e^{1 - \sin x}$

e)  $y = \sqrt{x^2 + 4x}$

f)  $y = \frac{5}{(2x + 4)^3}$

g)  $y = \operatorname{tg}^3 4x$

h)  $y = \ln^n x^2$

10. Derivujte funkce ve tvaru  $f(x)^{g(x)}$ :

a)  $y = x^x$

b)  $y = x^{\ln x}$

11. Vypočtěte první, druhou a třetí derivaci funkce:

a)  $y = x^4 - 5x^3 + 2x + 1$

b)  $y = \ln x$

c)  $y = \cos x$

d)  $y = 2\sqrt{x}$

**Tabulka 1.** Přehled derivací elementárních funkcí.

$f(x)$	$f'(x)$
konstanta	0
$x$	1
$x^n$	$nx^{n-1}$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

---

### Samostatné cvičení

1. Derivujte:

a)  $y = 7x^3 + 2x + 3$ ,   b)  $y = 12 \sin x + x$ ,   c)  $y = 4 \ln x + 5^x$    d)  $y = \frac{6}{x^4}$    e)  $y = \sqrt[5]{x^4}$ .

2. Derivujte:

a)  $y = x^3 \cdot \sin x$ ,   b)  $y = \sin x \cdot \cos x$ ,   c)  $y = \frac{x^2}{\sin x}$ ,   d)  $y = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ ,   e)  $y = (x^3 + 3)^4$ ,

f)  $y = \ln(x^4 + 6)$ .

**Výsledky:**

1. a)  $y' = 21x^2 + 2$ , b)  $y = 12 \cos x + 1$ , c)  $y = \frac{4}{x} + 5^x \cdot 5$ , d)  $y = -\frac{24}{x^5}$ , e)  $y = \frac{4}{5} x^{\frac{1}{5}}$ .

2. a)  $y' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$ , b)  $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$ , c)  $y' = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{(\sin x)^2}$ , d)

$y' = \frac{2xe^x - (x^2 + 1)e^x}{(e^x)^2}$ , e)  $y' = 12x^2(x^3 + 3)^3$ , f)  $y' = \frac{4x^3}{x^4 + 6}$ .