

# ÚPLNÉ FAKTOROVÉ PLÁNY

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

# Plánování experimentů

- Výroba, průmysl
- Experiment:
  - změna obvyklých pracovních podmínek s cílem nalézt nejlepší pracovní postupy
  - získat hlubší poznatky o vlastnostech výrobku a výrobního procesu, které s těmito pracovními postupy souvisejí.

# Nejlepší pracovní postupy

- Pro sledovaný ukazatel kvality  $Y$  výrobku identifikujeme faktory  $A, B \dots$ , které jej ovlivňují.
- Předpokládáme, že faktory se mohou pohybovat na různých úrovních,
- Cílem plánování experimentů je rozhodnout, které z faktorů významně ovlivňují ukazatele kvality
- Cílem je také určit optimální úrovně významných faktorů.
- Cílem je tedy optimalizovat vstupy tak, aby byl optimalizován výstup.

# Faktor

- **Faktor** neboli parametr je nezávislá volená proměnná ovlivňující charakteristiku jakosti, která nás zajímá.
- Symbolicky označujeme faktory velkými tiskacími písmeny, tj. A, B, ...C, atd. a jejich úrovně pro experiment označujeme jako  $A_1$  (faktor A na první úrovni),  $A_2$  (faktor A na druhé úrovni), atd.

# Rozdělení faktorů

Rozlišujeme dva základní druhy faktorů:

- **regulovaný faktor** – je volená proměnná, o které si myslíme, že ovlivňuje odezvu a je přitom začleněna do experimentu. Hodnotu proměnné můžeme a zároveň chceme nastavit a udržovat.
- **šumový faktor** – je faktor, který negativně ovlivňuje odezvu. Takový faktor nemůžeme nebo nechceme při vlastní aplikaci nastavit a udržovat na požadované hodnotě, ale můžeme to provádět během experimentu.
- **Interakce faktorů:** kombinovaný účinek dvou faktorů
  - účinek jednoho faktoru je závislý na hodnotě nastavení druhého faktoru.
  - Interakci dvou faktorů  $A$  a  $B$  zapisujeme symbolicky jako  $AB$ .

# Využití experimentů

- analytická simulace
- návrh a vývoj výrobku
- návrh a vývoj procesu
- zlepšování procesu
- testování a validace
- řešení problémů s jakostí ve výrobě
- analýza a zlepšování systému měření

# Experimentální procedura

- Krok 1: plánování experimentu (např. pomocí techniky brainstorming)
- Krok 2: návrh experimentu
- Krok 3: provedení experimentu
- Krok 4: analýza experimentu.

# Plánování experimentu

- Prvním krokem při *plánování experimentů* je ustanovení experimentálního týmu:
  - do týmu by měli být zahrnuti zástupci všech oddělení, která ovlivňují produkt nebo proces.
  - Velikost týmu by však neměla přesahovat rozumnou míru a měla by se pohybovat v rozmezí 2 – 15 lidí.
  - Brainstormingová sezení jsou věnována velkému množství otázek a na každou z nich musí experimentální tým nalézt správnou odpověď (určení cíle experimentu, definování charakteristiky jakosti a výběr faktorů a jejich úrovní pro realizaci experimentu).
- Výsledkem plánování experimentů je definovaný cíl, kterého chceme dosáhnout, a charakteristika jakosti, která je měřítkem pro posouzení, zda cíle bylo dosaženo. Kromě toho známe potenciální faktory, které nepravděpodobněji ovlivňují danou charakteristiku jakosti, a jejich úrovně.



# Návrh experimentu

- Informace z plánování experimentu se následně využijí k návrhu experimentu.
- Výsledkem návrhu je experimentální plán, který představuje tabulkou vyjádřený rozpis jednotlivých experimentů – např. rozpis toho, na jaké úrovni budou nastaveny při tomto experimentu uvažované faktory.
- Každý řádek v tomto plánu reprezentuje konkrétní experimentální pokus, který bude realizován. (Postup na příkladu).

# Provedení experimentu

- Experimenty můžeme provádět buďto v laboratorních nebo přímo v provozních podmínkách.
- Při experimentování ve výrobě můžeme narazit na „střety zájmů“ mezi potřebným množstvím produkce na jedné straně a mezi potřebným časem na experimenty, který snižuje vlastní produktivní čas výroby, na straně druhé.
- V praxi je obvyklé řešit tento problém tak, že se experimenty provádějí mimo pracovní dobu, např. na zvláštních nočních směnách, o sobotách a nedělích, apod.
- Kdykoli je to možné, měli bychom také experimenty provádět v náhodném pořadí.

# Analýza výsledků experimentu

- Analýza výsledků experimentů spočívá především v nalezení kombinace faktorů, která dává nejlepší výsledek z hlediska sledovaného znaku jakosti a dále v určení relativního podílu jednotlivých faktorů na jakosti výstupu.
- Na závěr provádíme verifikaci výsledků ověřovacími experimenty.

# Příklad

- Sleduje se, kolik stlačení (znak  $Y$ ) vydrží pružina až do svého zničení v závislosti na těchto faktorech:
  - $L$  = délka pružiny,
  - $G$  = tloušťka drátu pružiny,
  - $T$  = typ materiálu pružiny.
- Má se zjistit, které faktory jsou rozhodující pro životnost pružiny.
- Sestavme tabulku faktorů s jejich uvažovanými úrovněmi: pro každý faktor uvažujeme právě dvě úrovně, a proto se také v této souvislosti hovoří o dvouúrovňových plánech (existují také tříúrovňové plány, ale jsou méně typické):

<b>faktor</b>	<b>označení</b>	<b>dolní úroveň</b>	<b>horní úroveň</b>
		-	+
délka pružiny	$L$	10 cm	15 cm
tloušťka drátu	$G$	5 mm	7 mm
materiál	$T$	$A$	$B$

# Úplný faktorový plán

- Existuje více způsobů jak sestavit plán, podle kterého se budou provádět jednotlivé pokusy. Mezi nejpoužívanější plány patří tzv. **úplný faktorový plán**. O úplném plánu se hovoří z toho důvodu, že v tabulce jsou obsaženy všechny možné kombinace úrovní všech uvažovaných faktorů. Symbol  $Y$  představuje výsledek pokusu:

<b>pokus</b>	<b><math>L</math></b>	<b><math>G</math></b>	<b><math>T</math></b>	<b><math>Y</math></b>
1	10	5	A	
2	15	5	A	
3	10	7	A	
4	15	7	A	
5	10	5	B	
6	15	5	B	
7	10	7	B	
8	15	7	B	

# Kódování

Uvedený plán experimentu je nicméně výhodnější psát pomocí následující symboliky:

- Je-li každý z faktorů uvažován na dvou úrovních, je jeho dolní úroveň značena -1 (nebo jen „-„) a horní úroveň +1 („+“).
- Víme, že počet pokusů, ze kterých je sestaven úplný experiment, se vypočítá při  $k$  faktorech pomocí vztahu:  $n=2^k$ .  
*Tedy v tomto případě 8 pokusů)*

<b>pokus</b>	<b><i>L</i></b>	<b><i>G</i></b>	<b><i>T</i></b>	<b><i>Y</i></b>
1	-1	-1	-1	
2	+1	-1	-1	
3	-1	+1	-1	
4	+1	+1	-1	
5	-1	-1	+1	
6	+1	-1	+1	
7	-1	+1	+1	
8	+1	+1	+1	

# Výsledky experimentu

- Po stanovení plánu je možné provést celý experiment a zaznamenat hodnoty sledovaného ukazatele  $Y$ .
- V našem případě byl každý pokus opakován právě dvakrát.
- Sestavením celé tabulky skončily přípravné a experimentální práce. Dále následují výpočty, jejichž cílem bude stanovit, které z faktorů ovlivňují významným způsobem životnost pružiny  $Y$ .

<b>pokus</b>	<b>faktor</b>	<b>faktor</b>	<b>faktor</b>	<b>výsledek</b>	<b>výsledek</b>	<b>průměr</b>
	$L$	$G$	$T$	$Y_1$	$Y_2$	$\bar{Y}$
1	-	-	-	77	81	79
2	+	-	-	98	96	97
3	-	+	-	76	74	75
4	+	+	-	90	94	92
5	-	-	+	63	65	64
6	+	-	+	82	86	84
7	-	+	+	72	74	73
8	+	+	+	92	88	90

# Interakce faktorů

- Vzhledem k tomu, že pro určení optimální úrovně faktorů a pro sestavení modelu je důležité také vědět, které dvojice faktorů mají vzájemně významnou interakci, počítá se rovněž i vliv interakcí na  $Y$ .
- Může jít přitom nejen o dvoučlenné interakce, ale v případě celkem tří faktorů také o trojčlennou interakci:  $LG$ ,  $LT$ ,  $GT$ ,  $LGT$ .
- Interakce se doplňují do tabulky, tj. původní tabulka se rozšíří o nové sloupce, a znaménka v těchto nových sloupcích se získají jako součin znamének ze stejného řádku a ze sloupců, z „jejichž záhlaví je interakce sestavena“.



# Tabulka interakcí

<b>pokus</b>	<b><i>L</i></b>	<b><i>G</i></b>	<b><i>T</i></b>	<b><i>LG</i></b>	<b><i>LT</i></b>	<b><i>GT</i></b>	<b><i>LGT</i></b>
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

# Efekty faktorů

- *Efekt*em faktoru se rozumí změna ukazatele kvality  $Y$ , kterou způsobí přechod tohoto faktoru z dolní úrovně (-) na horní úroveň (+).
- Princip *znaménkové metody*, kterou budeme používat při výpočtu efektu faktoru, spočívá v tom, že se sečtou hodnoty ve sloupci  $Y$  (*průměr*), avšak každá původní hodnota v tomto sloupci je před součtem „obohacena“ o znaménko, odpovídající znaménku u příslušného faktoru v odpovídajícím řádku. Takový součet se pak vydělí číslem  $n/2$ , kde  $n$  je celkový počet experimentálních pokusů.

$$\text{efekt}_L = \frac{-79 + 97 - 75 + 92 - 64 + 84 - 73 + 90}{4} = 18$$

$$\text{efekt}_{LG} = \frac{79 - 97 - 75 + 92 + 64 - 84 - 73 + 90}{4} = -1$$

# Tabulka s efekty faktorů

číslo	<i>L</i>	<i>G</i>	<i>T</i>	<i>LG</i>	<i>LT</i>	<i>GT</i>	<i>LGT</i>	$\bar{Y}$
1	-	-	-	+	+	+	-	79
2	+	-	-	-	-	+	+	97
3	-	+	-	-	+	-	+	75
4	+	+	-	+	-	-	-	92
5	-	-	+	+	-	-	+	64
6	+	-	+	-	+	-	-	84
7	-	+	+	-	-	+	-	73
8	+	+	+	+	+	+	+	90
<b>efekt</b>	<b>18</b>	<b>1,5</b>	<b>-1</b>	<b>-8</b>	<b>0,5</b>	<b>6</b>	<b>-0,5</b>	

# Rozptyl efektu faktorů

- Rozptyl efektu faktoru , který je stejný pro všechny faktory, má tvar:

$$\sigma_e^2 = \frac{4\sigma^2}{N}$$

- kde  $N$  je celkový počet pokusů (včetně opakování, pokud se pokusy opakují), v našem případě  $N=16$ .
- V případě opakovaných pokusů se  $\sigma^2$  odhadne pomocí veličiny  $s^2$ , která se vypočítá dle vztahu (8.3):

$$s^2 = \frac{v_1 s_1^2 + \dots + v_k s_k^2}{v_1 + \dots + v_k}$$

- kde  $v_i = n_i - 1$  je počet opakování (měření) při  $i$ -tém pokusu.
- $s_i^2$  je rozptyl měření  $Y$  z  $i$ -tého pokusu.
- Obdržíme tak odhad rozptylu (vztah 8.4):

$$s_e^2 = \frac{4s^2}{N}$$

# Odhad rozptylu efektu faktorů

Hodnotu veličiny  $s^2$  vypočteme ze vztahu 8-3:

$$s^2 = \frac{8 + 2 + 2 + 8 + 2 + 8 + 2 + 8}{8} = 5$$

a výsledek dosadíme do vztahu 8-4. Dostáváme:

$$s_e^2 = \frac{4s^2}{N} = \frac{4 \cdot 5}{16} = 1,25, \text{ tj. } s_e = 1,12.$$

# Statistický test významnosti efektu faktoru

- **1.** Nulová hypotéza **H<sub>0</sub>**: Efekt faktoru je nevýznamný, alternativní hypotéza **H<sub>1</sub>**: Efekt faktoru je významný.

- **2.** Testové kritérium:

$$t = \frac{\text{efekt}}{s_e}$$

- **3.** Kritická hodnota

$K = t_{n_1+n_2+\dots+n_k-n}(\alpha)$ , kde  $n_1, \dots, n_k$  jsou počty opakování pokusů:

- $n$  je počet pokusů bez opakování (počet řádků experimentálního plánu).

- **4.** Závěr testu: pro

$$|t| \geq t_{n_1+n_2+\dots+n_k-n}(\alpha)$$

- se zamítá nulová hypotéza, což znamená, že efekt a tedy příslušný faktor je významný. V opačném případě je nevýznamný.

# Statistický test - příklad

- Kritická hodnota:  $t_{16-8}(0,05) = 2,306$

<b>efekt</b>	<b><i>t</i></b>
L = 18	<b>16,07</b>
G = 1,5	<b>1,34</b>
LG = -1,0	<b>-0,89</b>
T = -8,0	<b>-7,14</b>
LT = 0,5	<b>0,45</b>
GT = 6,0	<b>5,36</b>
LGT = -0,5	<b>-0,45</b>

- Kritickou hodnotu  $K = \text{TINV}(0,05,8) = 2,306$  převyšuje v absolutní hodnotě testové kritérium faktorů  $L$ ,  $T$  a interakce  $GT$ .
- To jsou tedy významné faktory a interakce, ostatní faktory vliv na životnost pružiny nemají.

# Grafické hodnocení efektu faktoru

- Pokud máme jen jeden pokus, nelze spočítat rozptyl ( $s$ ) a použije se následující grafická metoda.
- V grafu se na vodorovnou osu vynáší efekt a na svislou osu hodnota  $P$ :

$$P_i = \frac{100(i - 0,5)}{m} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

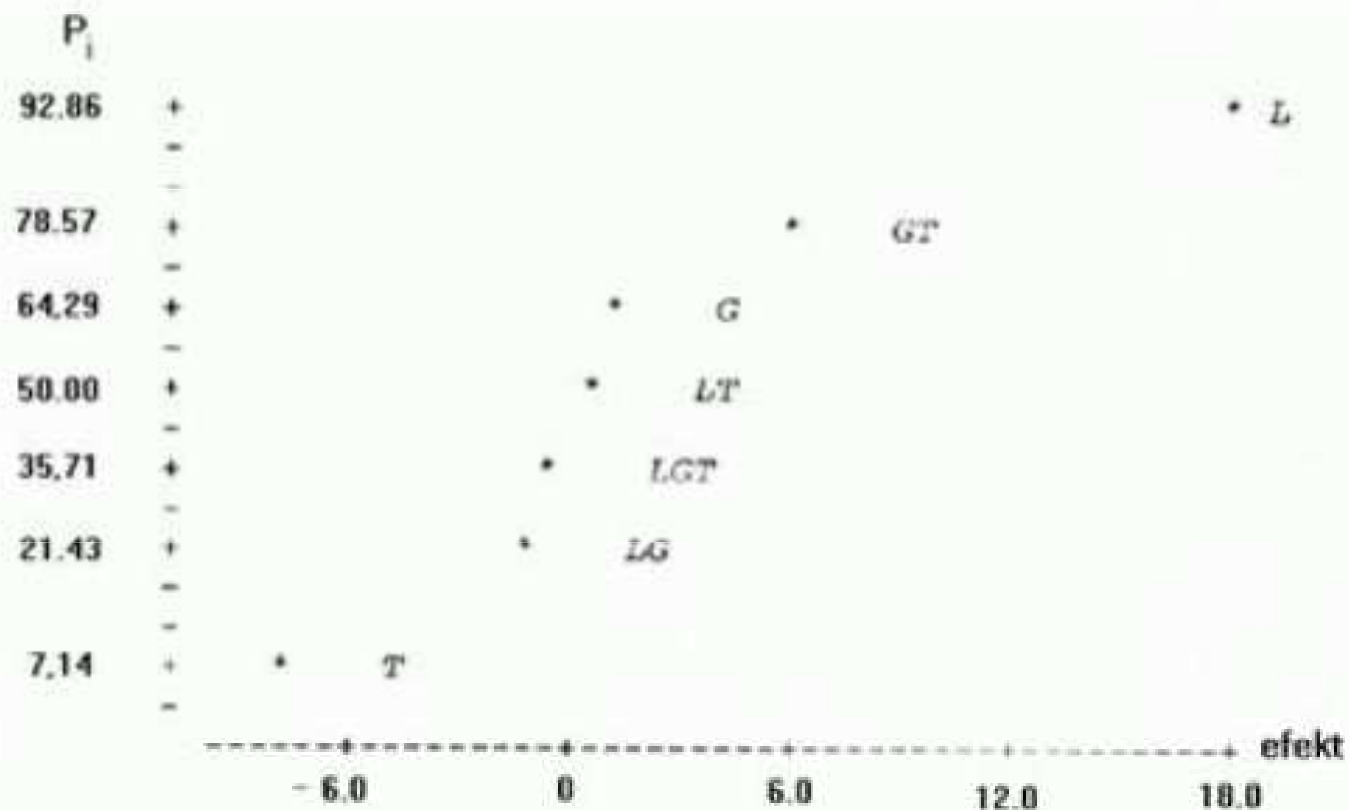
- kde  $m$  je počet faktorů a interakcí. (zde  $m = 7$ ) a  $i$  je níže v tabulce uvedeno jako „číslo“. Faktory jsou seřazeny od nejmenšího efektu (č.1) po největší (č. 7)
- Významné budou faktory, které se nacházejí výrazně **mimo hlavní linii (přímku)**. Při použití grafické metody je užitečné sestavit následující tabulku:

<b>Číslo</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Efekt</b>	-8,0	-1,0	-0,5	0,5	1,5	6,0	18
<b>Faktor</b>	T	LG	LGT	LT	G	GT	L
$P_i$	7,14	21,42	35,71	50	64,29	78,57	92,86



# Graf bodů pro vyhodnocení významnosti efektů faktorů

- V grafu je vidět, že mimo hlavní linii jsou ty faktory, u nichž testovací kritérium překročilo kritickou hodnotu. Jsou to faktory  $L$  (nejvýrazněji),  $T$  a interakce  $GT$ :



# Grafy interakcí

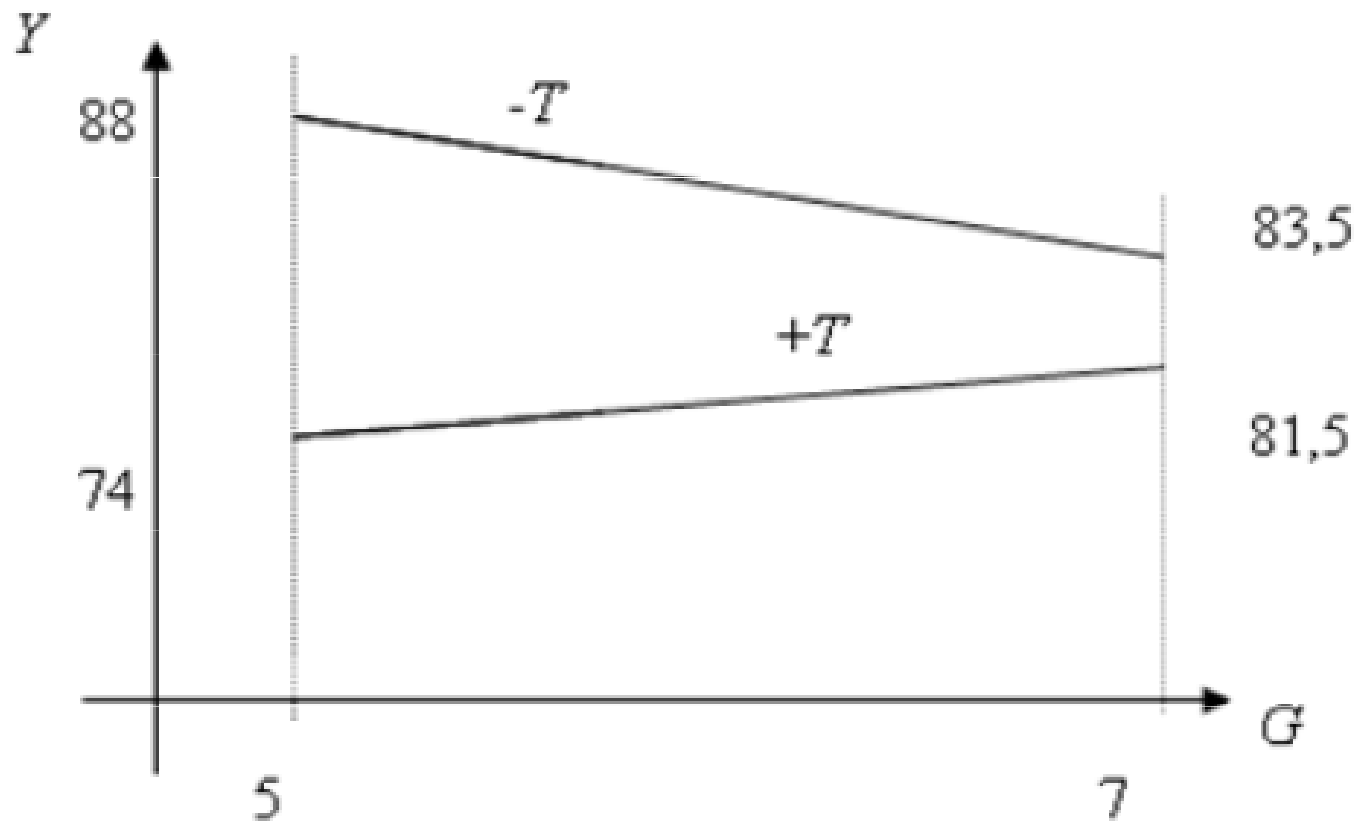
- Pro významné interakce se sestrojí grafy umožňující diskuzi o optimální úrovni jednotlivých faktorů, jež v této interakci vystupují.
- Tak například pro interakci  $GT$  můžeme sestrojit graf vlivu  $G$  na ukazatel kvality  $Y$  v závislosti na úrovni faktoru  $T$ .
- Z tabulky úplného plánu vybereme údaje, které odpovídají příslušným úrovním faktorů  $G$  a  $T$ :

$G$	$T$	Odezva 1	Odezva 2	Průměr $Y$
-	-	79	97	88
+	-	75	92	83,5

$G$	$T$	Odezva 1	Odezva 2	Průměr $Y$
-	+	64	84	74
+	+	73	90	81,5

# Příklad: Graf interakce GT

- Z obrázku je vidět, že např. pro maximalizaci  $Y$  je nejlepší  $T$  na dolní úrovni ( $-T$ ). Je také vidět, že interakce má jistý vliv na  $Y$ , jelikož průběh vlivu  $G$  se mění se změnou úrovně  $T$ .



# Model experimentu $2^3$

- Jakmile je stanoven efekt faktorů a jejich interakcí, je možné sestavit regresní model experimentu vyjadřující závislost sledovaného znaku  $Y$  na faktorech a jejich interakcích. Neúplný kvadratický model experimentu  $2^3$  s faktory  $A, B, C$  má tvar:

$$\hat{y} = b_0 + b_1A + b_2B + b_3C + b_{12}AB + b_{13}AC + b_{23}BC + b_{123}ABC$$

- Jde o regresi, v níž vystupují jako vysvětlující proměnné všechny hlavní faktory a všechny jejich interakce, avšak nikoliv druhé mocniny hlavních faktorů.
- Koeficienty se vypočítají jako polovina efektu příslušného faktoru, u něhož se nacházejí.
- Absolutní člen  $b_0 = \bar{Y}$ .
- Tyto odhady odpovídají metodě nejmenších čtverců aplikované na speciální matici regresorů  $X$ .

# Příklad: Model experimentu

- V našem příkladu s pružinou dostáváme například regresní vztah:

$$\hat{y} = 81,75 + 9L - 4T + 3GT.$$

- Model experimentu má mnohostranné použití. Mezi nejvýznamnější patří:
  - **1.** určení lokálně optimálních hodnot faktorů,
  - **2.** stanovení směru tzv. dynamického plánování experimentů,
  - **3.** lokální predikce ukazatele kvality  $\hat{y}$ .

Děkuji za pozornost