

# **1. Základní charakteristiky časových řad**

## **Rychlý náhled do problematiky kapitoly**

Analýza časových řad je vedena snahou po vysvětlení minulosti a předvídání budoucnosti, v ekonomické oblasti se jedná o vývojové trendy ukazatelů hospodářské činnosti. Analýza časových řad jako soubor metod a postupů nabízí širokou škálu nástrojů a technik. Ke klasickým analytickým postupům založeným na regresi a syntetickým přístupům založeným na technikách vyrovnání časových řad, přistupuje moderní, výpočetně náročnější harmonická analýza a Box-Jenkinsova metodologie využívající současného mohutného rozvoje výpočetní techniky. V této kapitole se seznámíme se základními charakteristikami časových řad.

## **Budete umět**

- vypočítat údaje očištěné časové řady
- určit elementární charakteristiky časových řad
- graficky znázornit časové řady
- základní členění ekonomických časových řad

Jedním z důležitých úkolů statistických analýz ekonomických jevů je zkoumání jejich dynamiky. Empirická pozorování v ekonomické oblasti jsou často uspořádána do časové řady. *Ekonomickou časovou řadou* se rozumí řada hodnot jistého věcně a prostorově vymezeného ukazatele, která je uspořádána v čase směrem od minulosti do přítomnosti. Takto definovanou časovou řadu budeme zapisovat jako  $y_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ .

## **Příklady časových řad**

- ◆ Ekonomické časové řady
  - mikroekonomie: tržby, počty zákazníků, zisky, skladové zásoby,...
  - makroekonomie: kurzy měny nebo akcií, vývoj HDP, inflace, nezaměstnanost, ...
  - marketing: vývoj spokojenosti zákazníků,...
- ◆ Technické časové řady
  - rozměry výrobků z výstupu linky, teplota ohřáté vody, počet zmetků,...
- ◆ Přírodovědné časové řady
  - meteorologické záznamy, záření hvězd, vývoj populací zvířat,...

## **Základní členění ekonomických časových řad**

- a) vývoz České republiky v letech 1997 až 2007
  - řada intervalového ukazatele (intervalová časová řada)
  - velikost hodnoty ukazatele závisí na délce časového intervalu sledování
  - např. objem výroby, spotřeba surovin
- b) počet zaměstnanců jisté firmy k 1.dni jednotlivých měsíců let 1991 až 2000
  - řada okamžikového ukazatele (okamžiková časová řada)
  - okamžikovým ukazatelem je ukazatel vztahující se k jistému okamžiku

- hodnota ukazatele nezávisí na délce časového intervalu sledování
- c) produktivita práce v průmyslu České republiky v letech 1997 až 2007
- řada odvozené charakteristiky
  - tento typ řady získáváme z intervalových nebo okamžikových časová řada
  - časová řada produktivity práce se odvozuje jako podíl časová řada produkce a časová řada počtu pracovníků

Další dělení na **dlouhodobé** časové řady (roční a delší časové úseky) a **krátkodobé** (časové řady čtvrtletní, měsíční, týdenní).

**Časovou řadou absolutních hodnot** se obvykle rozumí časová řada přímo zjištěných údajů (v naturálních jednotkách) očištěná od kalendářních variací. Odvozené údaje a z nich vytvořené časové řady získáme obvykle matematickými operacemi z absolutních údajů. Většinu důležitých ekonomických časových řad tvoří časové řady ukazatelů vyjádřených v peněžní formě. Vzhledem ke změnám cenové hladiny, které jsou v tržní ekonomice přirozené, však v delší časové řadě často dostáváme posloupnost údajů, které nejsou vždy zcela souměřitelné. Proto důležitým problémem v analýze časových řad je srovnatelnost údajů, konkrétně cenová srovnatelnost. Při sestavování delší časové řady je možno v zásadě postupovat dvojím způsobem: použít *běžné ceny* a vyjádřit v nich absolutní objem určitého ukazatele, resp. tempa růstu, nebo vycházet ze *stálých cen*, tj. cen fixovaných k určitému datu. Používání stálých cen v ekonomice vede ke zmírnění negativních tendencí v účinnosti základních fondů vyplývajících z vlivu technického rozvoje na výrobu, dále vede ke zrealnění výsledků hospodářského vývoje vzhledem k mezinárodnímu srovnání.

### Srovnatelnost časových řad

- u intervalových časových řad je vhodné, aby se vztahovaly ke stejně dlouhým intervalům
- problémy u krátkodobých časová řada, např. u řad měsíčních či čtvrtletních

### Grafické znázornění časových řad

spojnicový graf , plošný graf, sloupcový graf, krabičkový graf.

Údaje očištěné časové řady  $y_t^{(0)}$  dostaneme z hodnoty očišťovaného ukazatele  $y_t$  takto:

$$y_t^{(0)} = y_t \frac{\bar{k}_t}{k_t}, \quad (1.1)$$

kde  $\bar{k}_t$  je průměrný počet dnů v příslušném dílčím období,  $k_t$  je skutečný počet dnů v příslušném dílčím období  $t$ .

### **Příklad 1.**

Následující časová řada představuje výrobu autorádií (v tis. ks) v 5 po sobě jdoucích měsících:

<b>Měsíc_rok</b>	<b>t</b>	<b>Výroba (tis.ks)</b>	<b>Očištěná výroba</b>
Leden 07	1	40	
Únor 07	2	52	
Březen 07	3	54	
Duben 07	4	62	
Květen 07	5	60	

Průměrný počet dnů v měsíci je 30,42. Vypočítejte očištěné hodnoty výroby s ohledem na počet kalendářních dnů v měsíci, výsledky zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

### **Řešení:**

Použijeme vztah (1.1) a vypočteme očištěné hodnoty výroby:

$$40/31.30,42 = 39,3$$

$$52/28.30,42 = 56,5$$

$$54/31.30,42 = 52,9$$

$$62/30.30,42 = 62,9$$

$$60/31.30,42 = 58,9$$

<b>Měsíc_rok</b>	<b>t</b>	<b>Výroba (tis.ks)</b>	<b>Očištěná výroba</b>
Leden 07	1	40	39,3
Únor 07	2	52	56,5
Březen 07	3	54	52,9
Duben 07	4	62	62,9
Květen 07	5	60	58,9

## **1.1 Základní popisné charakteristiky**

Průměrná hodnota intervalové časové řada se vypočítá pomocí prostého aritmetického průměru:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t \quad (1.2)$$

Průměrná hodnota okamžikové časové řady se počítá pomocí chronologického průměru. Při stejné vzdálenosti mezi jednotlivými okamžiky sledování se používá prostý chronologický průměr, který má tvar:

$$\bar{y} = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right] = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{1}{2} y_1 + \sum_{t=2}^{n-1} y_t + \frac{1}{2} y_n \right]. \quad (1.3)$$

Při různé délce mezi jednotlivými okamžiky se používá vážený chronologický průměr:

$$\bar{y} = \frac{1}{d_2 + d_3 + \dots + d_n} \left[ \frac{y_1 + y_2}{2} d_2 + \frac{y_2 + y_3}{2} d_3 + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} d_n \right], \quad (1.4)$$

kde  $d_i$ ,  $i = 2, \dots, n$  je délka jednotlivých časových intervalů sledování okamžikového ukazatele.

### **Příklad 2.**

Vypočítejte průměrnou hodnotu roční časové řady hrubého domácího produktu České republiky (HDP ČR) v mld. Kč (srovnatelné ceny), v letech 2001 – 2007:

**Tabulka 1.1 HDP ČR v letech 2001-2007**

<b>Rok</b>	<b>HDP ČR</b>
2001	1303,6
2002	1381,1
2003	1447,7
2004	1432,8
2005	1401,3
2006	1390,6
2007	1433,8
<b>Celkem</b>	<b>9790,9</b>

### **Řešení:**

Časová řada hrubého domácího produktu České republiky v letech 2001 – 2007 je intervalovou časovou řadou, proto se její průměrná hodnota vypočítá pomocí aritmetického průměru (1.2)

$$\bar{y} = \frac{9790,9}{7} = 1398,7.$$

Průměrná hodnota časové řady v letech 2001 až 2007 je 1398,7 mld. Kč.

### **Příklad 3.**

Vypočítejte průměrný počet registrovaných uchazečů o zaměstnání v České republice v roce 2007 v tis.osob.

**Tabulka 1.2 Počet registrovaných uchazečů o zaměstnání v ČR v roce 2007 v tis. Osob**

Datum	Počet uchazečů	Délka intervalu
31.12.2006	487,6	
31.1.2007	508,5	31
29.2.2007	506,1	29
31.3.2007	493,4	31
30.4.2007	471,2	30
31.5.2007	453,8	31
30.6.2007	451,4	30
31.7.2007	469,7	31
31.8.2007	467,3	31
30.9.2007	458,3	30
31.10.2007	445,2	31
30.11.2007	442,2	30
31.12.2007	457,4	31

**Řešení:**

Počet registrovaných uchazečů o zaměstnání v České republice v jednotlivých měsících roku 2007 je okamžiková časová řada, protože rozhodným okamžikem sledování je vždy poslední den daného měsíce. Protože vzdálenost mezi jednotlivými okamžiky sledování není stejná, použijeme pro výpočet průměrné hodnoty vážený chronologický průměr (1.4).

$$\bar{y} = \frac{\frac{487,6 + 508,5}{2} \cdot 31 + \frac{508,5 + 506,1}{2} \cdot 29 + \dots + \frac{442,2 + 457,4}{2} \cdot 31}{31 + 29 + \dots + 31} = \frac{171971,6}{366} = 469,868$$

Průměrný počet registrovaných uchazečů o zaměstnání v České republice v roce 2007 byl 469,9 tis. osob.

**Míry dynamiky**

Jednoduché míry dynamiky časové řady umožňují charakterizovat základní rysy chování časové řady a formulovat kritéria pro jejich modelování.

Absolutní přírůstek (první diference) :

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, \quad t = 2, \dots, n \tag{1.5}$$

Tato charakteristika vyjadřuje přírůstek hodnoty v čase  $t$  proti času  $t-1$ .

Průměrný absolutní přírůstek:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n-1} [(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1})] = \frac{y_n - y_1}{n-1} \tag{1.6}$$

Diferencování časové řady má velký význam, používá se při modelování trendu časové řady k výběru trendové funkce. Je jednou z možností, jak upravit nestacionární časovou řadu na časovou řadu stacionární.

Relativní přírůstek:

$$\delta_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1 \quad (1.7)$$

Po vynásobení 100 nám tato míra říká o kolik procent se změnila hodnota časové řady v čase  $t$  proti času  $t-1$ .

Koeficient růstu:

$$k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}, \quad t = 2, \dots, n \quad (1.8)$$

Násobíme-li 100, dostaneme na kolik procent hodnoty v čase  $t-1$  vzrostla hodnota v čase  $t$ . (tempo růstu – řetězové indexy)

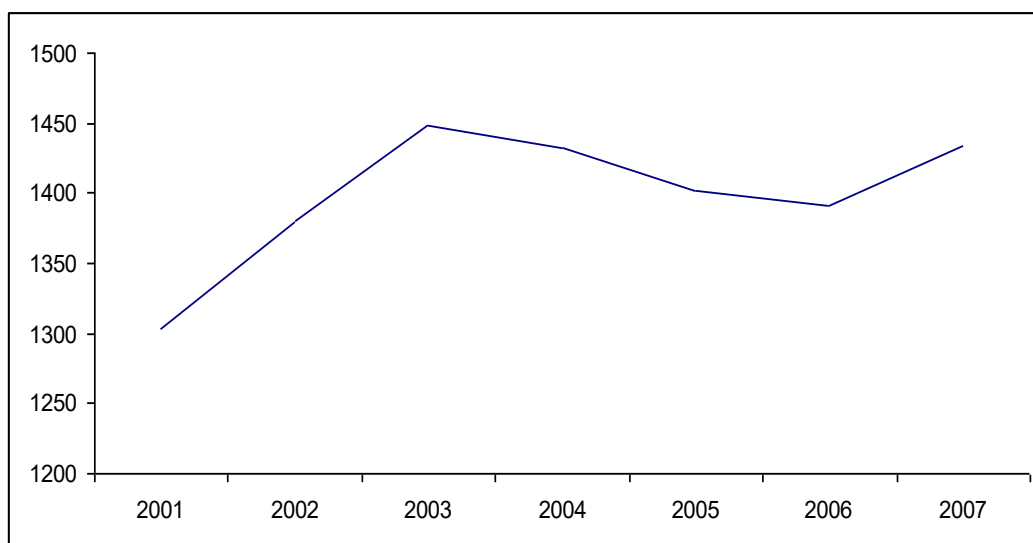
Průměrný koeficient růstu:

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{k_2 k_3 \dots k_n} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \quad (1.9)$$

Koeficienty růstu se taktéž používají k nalezení vhodné trendové funkce.

#### ***Příklad 4.***

Pro roční časovou řadu reálného hrubého domácího produktu České republiky v letech 2001 – 2007 v mld. Kč. Použijte data uvedená v příkladu 2 a vypočítejte základní míry dynamiky.



**Obr. 1.1** Časová řada hrubého domácího produktu ČR v letech 2001 - 2007 v mld. Kč

**Řešení:**

V tab. 1.3 jsou na základě vztahu (1.5) až (1.9) vypočítány absolutní přírůstky, koeficienty růstu a relativní přírůstky časové řady.

**Tabulka 1.3 Míry dynamiky časové řady hrubého domácího produktu ČR**

Rok	HDP ČR	$\Delta y_t$	$k_t$	$\delta_t$
2001	1303,6			
2002	1381,1	77,5	1,059	0,059
2003	1447,7	66,6	1,048	0,048
2004	1432,8	-14,9	0,990	-0,010
2005	1401,3	-31,5	0,978	-0,022
2006	1390,6	-10,7	0,992	-0,008
2007	1433,8	43,2	1,031	0,031

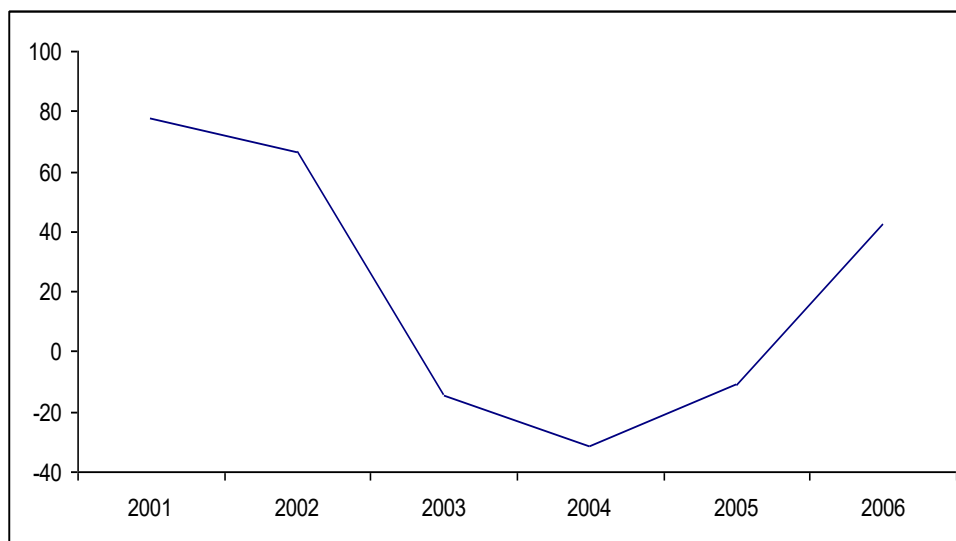
Průměrný absolutní přírůstek

$$\bar{\Delta} = \frac{1433,8 - 1303,6}{6} = 21,7 \text{ mld. Kč}$$

průměrný koeficient růstu

$$\bar{k} = \sqrt[6]{\frac{1433,8}{1303,6}} = 1,016.$$

Na obrázku 1.2 je zachycen vývoj absolutních přírůstků.

**Obr. 1.2 Absolutní přírůstky**

**Příklad 5.**

V tabulce jsou uvedeny průměrné měsíční odměny zaměstnanců ve státní správě v letech 1999-2007. Pro tuto časovou řadu vypočítejte:

- absolutní přírůstky a průměrný absolutní přírůstek
- koeficienty růstu a průměrný koeficient růstu.

<b>Roky</b>	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
<b>Odměna</b>	2980	3110	4500	5650	7460	8930	10670	12820	13250

**Řešení:**

- Absolutní přírůstky vypočítáme podle vztahu (1.5):

$$\Delta y_2 = y_2 - y_1 = 3110 - 2980 = 130, \text{ atd.}$$

Výsledek říká, že průměrná měsíční odměna stoupla v letech 1999 - 2000 o 130 Kč.

Všechny absolutní přírůstky jsou uvedeny v následující tabulce.

Průměrný absolutní přírůstek je podle (1.6):

$$\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n - 1} = \frac{13250 - 2980}{8} = 1283,75.$$

- Koeficienty růstu vypočítáme podle vztahu (1.8). Např.:

$$k_2 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{3110}{2980} = 1,0436.$$

Průměrná měsíční odměna vzrostla v letech 1999- 2000 o 4,36%.

Hodnoty ostatních koeficientů růstu jsou uvedeny v následující tabulce.

Průměrný koeficient růstu vypočítáme podle (1.9):

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[8]{\frac{13250}{2980}} = 1,205.$$

Výsledek ukazuje, že odměny rostly ročně v průměru o 20,5%.

<b>Roky</b>	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
<b>Odměna</b>	2980	3110	4500	5650	7460	8930	10670	12820	13250
$\Delta y_t$	.	130	1390	1150	1810	1470	1740	2150	430
<b>k</b>	.	1,04	1,45	1,26	1,32	1,2	1,19	1,20	1,03



## Shrnutí:

Vývoj základních ekonomických ukazatelů v České republice je možné sledovat jednak za jednotlivé roky ve *statistických ročenkách*, jednak podle jednotlivých měsíců ve *statistických přehledech a bulletinech* vydávaných Českým statistickým úřadem. Pro potřeby vrcholového řízení ve firmách a podnicích slouží především údaje o vývoji základních ukazatelů podle měsíců, neboť jde o informace s určitým vztahem k okamžité odezvě v chování ekonomických subjektů, ať už výrobců, nebo spotřebitelů. Jsou to zejména informace o inflaci (index spotřebitelských cen a indexy životních nákladů), dále informace o peněžních příjmech a výdajích obyvatelstva, o celkovém prodeji v maloobchodě, průmyslové, zemědělské a stavební výrobě a též údaje o nezaměstnanosti.

## Řešené příklady

- 1) Následující tabulka zachycuje údaje o obratu obchodní firmy ve vybraných měsících roku 2007. Očistěte tato data od kalendářních variací.

Měsíc	Obrat v Kč
Květen	211 399
Červen	205 041
Červenec	214 144
Srpen	213 215
Září	213 798
Říjen	212 004

Řešení: Průměrná délka jednoho měsíce v roce je  $\frac{365}{12} = 30,41667$ . Pro květen je třeba

provést výpočet 
$$y_1^0 = y_r \cdot \frac{\bar{d}}{d_r} = 211399 \cdot \frac{30,41667}{31} = 207421.$$

Očištěné údaje časové řady jsou uvedeny v tabulce.

Měsíc	Obrat v Kč	Očištěné údaje
Květen	211 399	207 421
Červen	205 041	207 889
Červenec	214 144	210 114
Srpen	213 215	209 203
Září	213 798	209 775
Říjen	212 004	214 945

- 2) Stav pracovníků stavebního podniku za období od 1.1. do 1.5. jsou uvedeny v prvním a druhém sloupci následující tabulky. Vypočítejte průměrný stav pracovníků za toto období.

Datum	Počet pracovníků
1.1.	178
1.2.	170
1.3.	180
1.4.	150
1.5.	162

Řešení: Vypočítáme chronologický průměr. Potřebné výpočty jsou uvedeny v tabulce.

Datum	Počet pracovníků	$\bar{y}_i$	Délka intervalu $d_i$	$\bar{y}_i d_i$
1.1.	178	$\frac{178+170}{2} = 174$	31	5 394
1.2.	170	$\frac{170+180}{2} = 175$	28	4 900
1.3.	180	$\frac{180+150}{2} = 165$	31	5 115
1.4.	150	$\frac{150+162}{2} = 156$	30	4 680
1.5.	162			
Součet		670	120	20 089

Prostý chronologický průměr je  $\bar{y} = \frac{670}{4} = 167,5$  a vážený chronologický průměr je  $\bar{y} = \frac{20089}{120} = 167,4$ . Průměrný stav za dané období je 167,5 pracovníků.

- 3) V tabulce jsou zachyceny průměrné měsíční odměny ve firmě Ploty Morava v letech 1998 – 2007. Vypočítejte a interpretujte a) absolutní přírůstky a průměrný absolutní přírůstek, b) koeficienty růstu a průměrný koeficient růstu, c) druhé diference.

Rok	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
$y_t$	2692	2757	2808	2858	2901	2944	3005	3070	3138	3247

Řešení:

Rok	$y_t$	$\Delta y_t$	$k_t$	$\Delta^{(2)} y_t$
1998	2692			

1999	2757	65	1,024	
2000	2808	51	1,018	-14
2001	2858	50	1,018	-1
2002	2901	43	1,015	-7
2003	2944	43	1,015	0
2004	3005	61	1,021	18
2005	3070	65	1,022	4
2006	3138	68	1,022	3
2007	3247	109	1,035	41

- a) Absolutní přírůstky (diference) jsou uvedeny ve třetím sloupci tabulky a udávají roční přírůstky odměn, tj. o kolik Kč se absolutně zvětšily odměny v daném roce ve srovnání s předcházejícím rokem. Průměrný absolutní přírůstek je

$$\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n - 1} = \frac{3247 - 2692}{9} = 61,67.$$

Průměrná měsíční odměna stoupla v letech 1998 – 2007 ročně v průměru o 62 Kč.

- b) Koeficienty (tempa) růstu jsou uvedeny ve čtvrtém sloupci tabulky a udávají kolikrát se zvětšila výše odměny v daném roce ve srovnání s rokem předcházejícím (tzv. řetězové indexy růstu odměn). Průměrný koeficient růstu je

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[9]{\frac{3247}{2692}} = 1,021.$$

Průměrná měsíční odměna stoupla v letech 1998 – 2007 ročně o 2,1%.

- c) Druhé diference jsou vypočteny v pátém sloupci tabulky. Používají se např. při určování modelu trendu (další kapitola).

## Příklady k procvičení

### Ano či ne?...

- 1) Časová řada je posloupnost hodnot určitého ukazatele. Tato posloupnost hodnot je uspořádaná podle času.
- 2) Roční časová řada patří mezi časové řady krátkodobé.
- 3) Mezi krátkodobé časové řady patří časové řady, jejichž údaje jsou zaznamenávány ve čtvrtletních, měsíčních, týdenních a jiných kratších periodách.
- 4) Koeficient růstu je vždy větší než 1.
- 5) Absolutní diference mohou nabývat záporných hodnot.

### Doplňte...

- 6) Při grafickém znázornování časové řady nanášíme na osu  $x$  ..... a na osu  $y$  .....

- 7) Koeficienty (tempa) růstu udávají kolikrát se zvětšila hodnota v daném období ve srovnání s obdobím .....
- 8) Uveďte konkrétní příklady časových řad.
- 9) Při porovnání hodnot ukazatelů intervalových krátkodobých časových řad, vztahujících se na různě dlouhé časové intervaly, provádíme tzv. .... údajů.
- 10) Mezi elementární charakteristiky časových řad patří: ....., ....., .....

### Řešte...

- 11) Vyhledejte roční časové řady „Počet obyvatel ČR“ a „Peněžní příjmy obyvatelstva ČR“ od roku 1997 – 2007. Která časová řada je okamžiková a která intervalová? Graficky znázorněte tyto časové řady. Použijte data uvedená na stránkách Českého statistického úřadu ([www.czso.cz](http://www.czso.cz)).
- 12) Znázorněte charakter čtvrtletní časové řady hrubého domácího produktu České republiky v letech 200 – 2007. Použijte data uvedená na stránkách Českého statistického úřadu.
- 13) Následující časová řada 20; 23; 26; 29; 35 představuje výrobu snowbordů (v tis.kš) v období od ledna 2007 do května 2007. Vypočítejte očištěné hodnoty výroby s ohledem na počet kalendářních dnů v měsíci, víte-li, že průměrný počet dnů v měsíci je 30,42. Výsledky zaokrouhlete na 1 desetinné místo.
- 14) Určete průměrný počet obyvatel České republiky v letech 1981 – 1990, máte-li k dispozici následující údaje. K řešení použijte vážený chronologický průměr.

Rok	1981	1985	1987	1989	1990
Počet obyvatel (tis.)	10 303	10 337	10 349	10 362	10 363

- 15) V následující tabulce jsou uvedeny údaje o velikosti tržby textilního podniku v osmi měsících roku 2007 (v Kč). Určete průměrné tempo růstu a průměrnou hodnotu tržby za jeden měsíc.

Měsíc	březen	duben	květen	červen	červenec
Tržba (Kč)	121 418	120 401	124 124	125 873	127 002

Měsíc	srpen	září	říjen
Tržba (Kč)	129 188	132 387	134 200

### Klíč k řešení

#### Ano či ne?...

- 1) ano
- 2) ne
- 3) ano
- 4) ne

5) ano

**Doplňte...**

- 6) čas, hodnoty časové řady
- 7) předcházejícím
- 8) míra nezaměstnanosti, stav vkladů obyvatelstva, počet volných pracovních míst, počet obyvatel, příjmy a výdaje obyvatelstva, počet dopravních nehod, atd.
- 9) očišťování
- 10) absolutní přírůstky, relativní přírůstky, koeficienty růstu, průměrný absolutní přírůstek, průměrný koeficient růstu

**Řešte...**

- 11) „Počet obyvatel ČR“ – okamžiková časová řada  
„Peněžní příjmy obyvatelstva ČR“ – intervalová časová řada
- 12) bodový, spojnicový graf
- 13) 19,6; 24,9; 25,5; 29,4; 34,3
- 14) 10 337,7
- 15) 1,44%; 126 824 Kč