

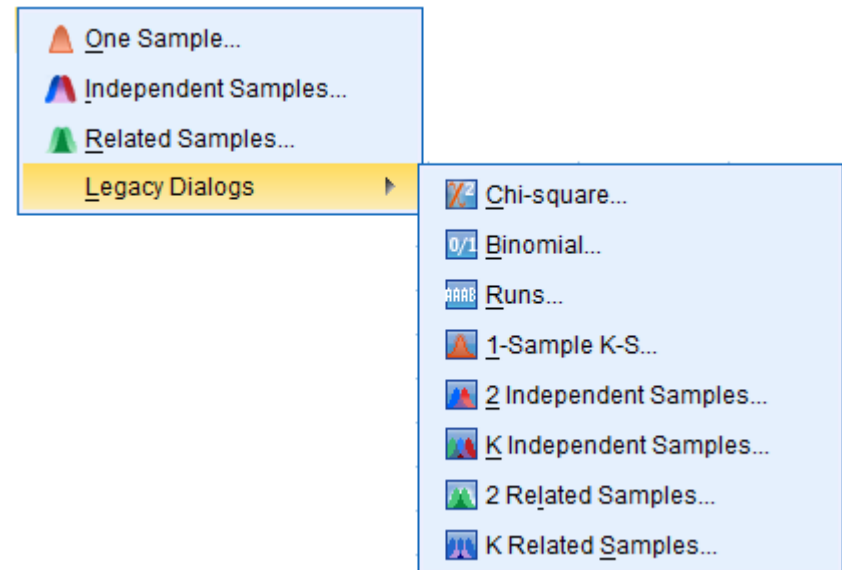


Neparametrické testy

- **Parametrické testy**
 - testy o parametrech (střední hodnota, rozptyl) známých pravděpodobnostních modelů, předpokládají určitý typ rozdělení, ze kterého výběr pochází (obvykle normální)
 - drobné odchylky od předpokladů většinou nevadí
 - při výrazném porušení předpokladů můžeme získat nekorektní výsledky
 - citlivé na odlehlé hodnoty
- **Neparametrické test**
 - určeny pro situaci, kdy nejsou splněny předpoklady parametrických testů
 - nemají předpoklady o typu rozdělení dat
 - testují jinou hypotézu o rozdělení základního souboru než je hypotéza o jeho parametru
 - výpočetně jednodušší s širším uplatněním
 - robustní vůči odlehlým hodnotám
 - vyváženo menší silou (vyšší pravděpodobnost nezamítnutí testované hypotézy)

Klasifikace neparametrických testů

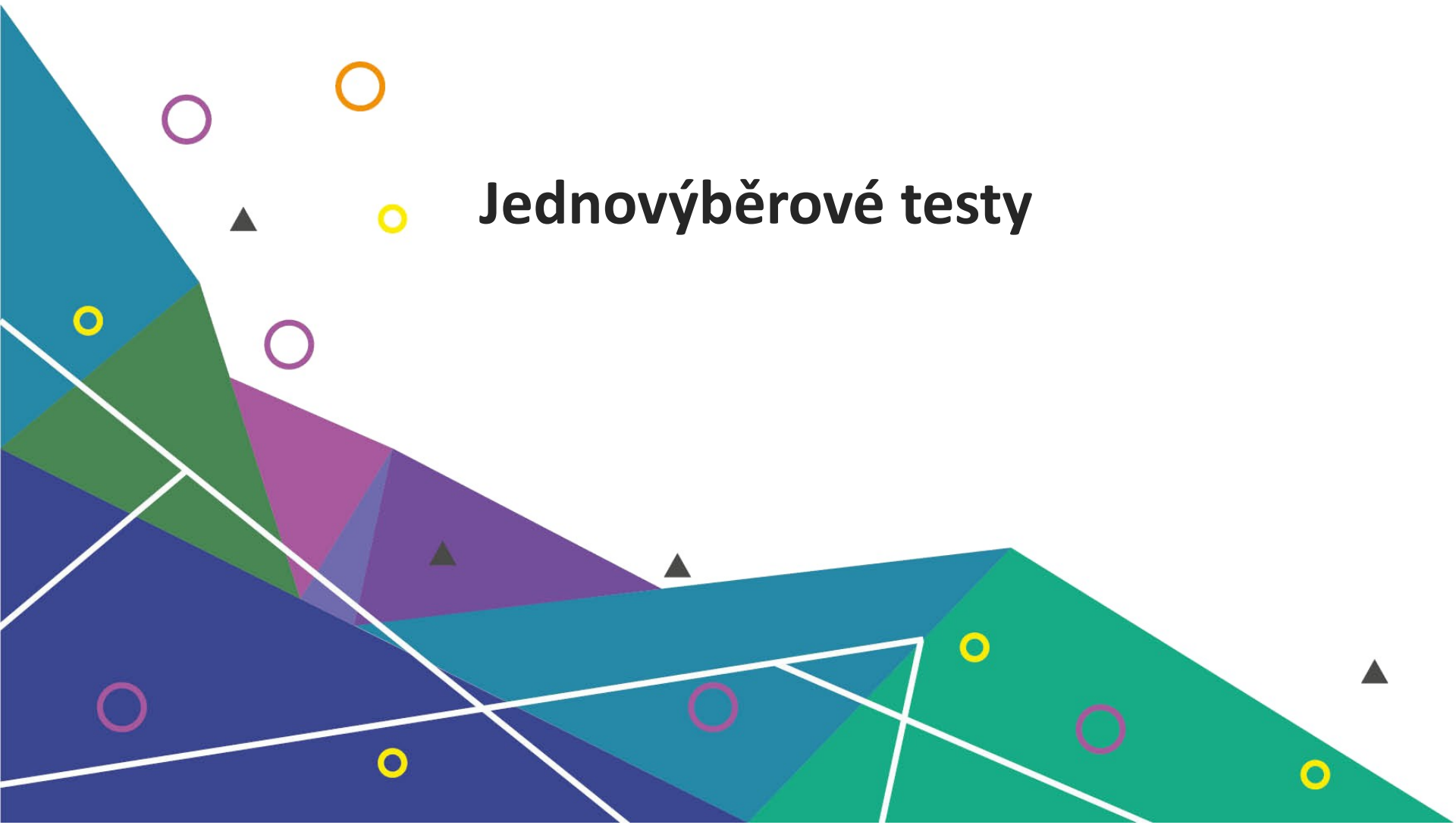
- **jednovýběrové testy**
- **dvouvýběrové testy**
 - nezávislé výběry
 - závislé výběry
- **vícevýběrové testy**
 - nezávislé výběry
 - závislé výběry



- **robustní transformace dat**
 - převedení číselných hodnot na pořadí
 - převedení párových rozdílů na pořadí
 - znaménka odchylek od prahové hodnoty
 - pořadí vzdáleností od prahové hodnoty
- **rozdělení testových statistik**
 - známá diskrétní rozdělení
 - specifická rozdělení
 - speciální tabulky kritických hodnot
 - aproximace známými spojitými rozděleními
 - výpočet exaktní dosažené hladiny významnosti bez testové statistiky

- **nabízí přesnou hodnotu dosažené hladiny významnosti**
- **předpoklady testu musí být dokonale splněny**
 - využívá-li testovou statistiku, její rozdělení je přesně známé i pro malé počty pozorování
 - při výpočtu dosažené hladiny významnosti se nepoužívají žádné aproximace
- **praktické použití pouze u neparametrických testů**
 - u parametrických testů je velmi obtížné dokonale splnit předpoklady
- **vhodné pouze pro malé soubory**
 - Výpočetně náročné
- **u větších souborů lze řešit metodou Monte Carlo**
 - simulační aproximace přesné signifikance
 - nelze považovat za exaktní test
 - Pro daný počet pozorování a okrajové podmínky se určí všechny dosažitelné výsledky a spočte se jejich pravděpodobnost za platnosti nulové hypotézy.
 - Dosažená hladina významnosti je součtem pravděpodobností výsledků stejných a více podporujících alternativní hypotézu než naměřená data.

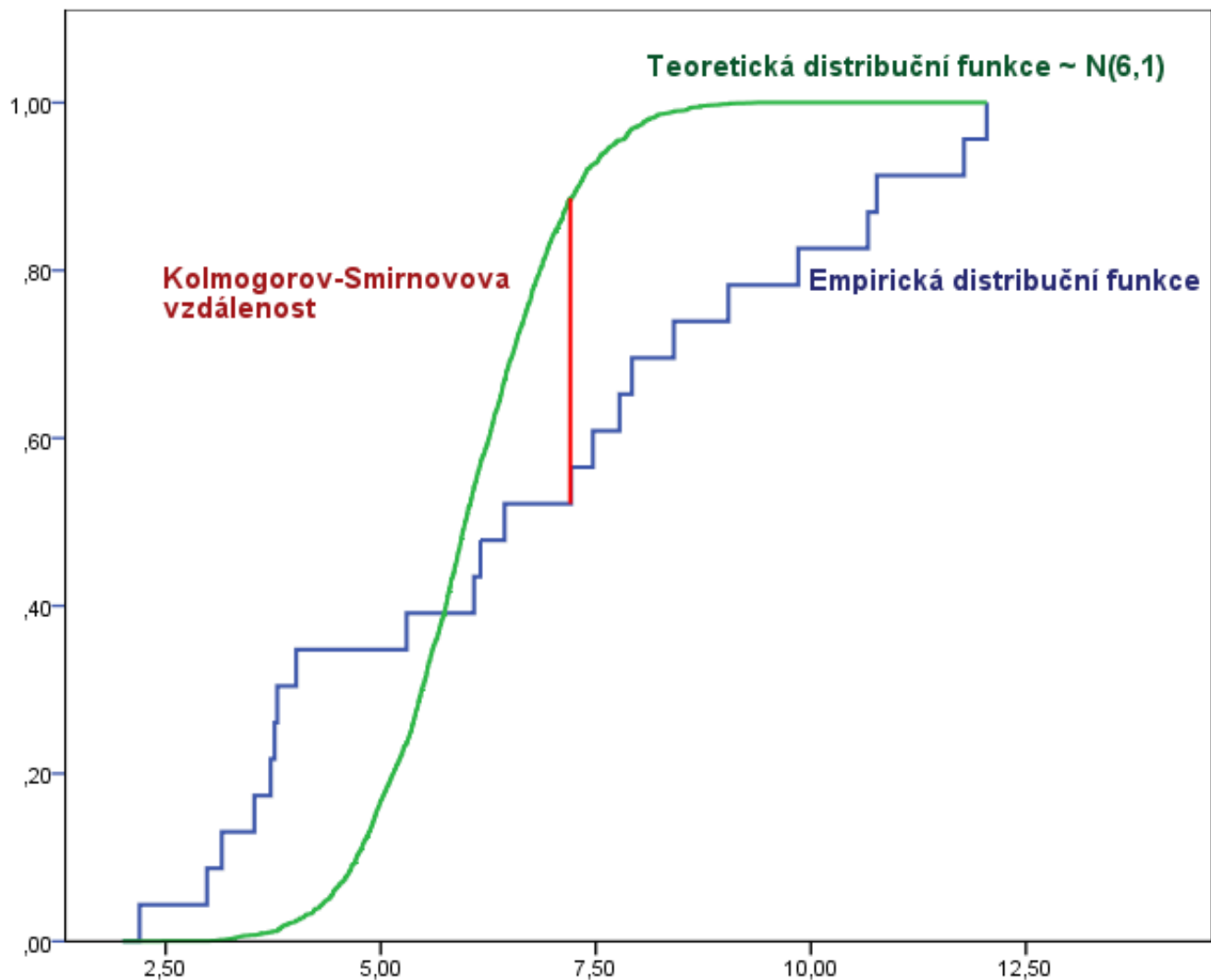
Jednovýběrové testy



Jednovýběrový Kolmogorov-Smirnovův test

- H_0 : data pochází z normálního rozdělení s danými parametry μ a σ^2
 - H_A : data nepochází z normálního rozdělení s danými parametry μ a σ^2
 - Analogicky lze testovat i jiné spojité rozdělení např. rovnoměrné, exponenciální, Poissonovo
 - Známé spojité rozdělení není předpokladem, ale hypotézou, proto je test neparametrický.
 - hypotéza se netýká hodnot parametrů rozdělení
 - Lillieforsův test: varinta K-S testu pro situaci kdy parametry μ a σ^2 jsou odhadnuty z naměřených dat.
- Pro každou naměřenou hodnotu v datech spočti kumulativní relativní četnost.
 - Hodnoty empirické distribuční funkce z předchozího kroku porovnej s teoretickou distribuční funkcí testovaného rozdělení.
 - Testovou statistikou je maximální rozdíl empirické a teoretické distribuční funkce.
 - Kritické hodnoty pro malé počty pozorování jsou tabelovány.
 - Platí-li H_0 , statistika má asymptoticky speciální tabelované rozdělení.

Porovnání distribucí v jedn. výb. K-S testu



- **Wilcoxonův znaménkový test**
- H_0 : veličina pochází z rozdělení symetrického podle mediánu
- H_A : veličina pochází z jiného rozdělení
- Je-li rozdělení symetrické podle jiného mediánu platí také H_A .
- testované rozdělení není třeba specifikovat
- **neparametrická alternativa jedno výběrového t-testu**
 - bez předpokladu normálního rozdělení ve výběru

Tip: Test je ekvivalentní Wilcoxonově testu pro 2 závislé výběry, kde se testuje oproti konstantě.

- Všechna pozorování vzestupně seřad' podle rozdílu od mediánu bez ohledu na znaménko a přiřad' jim pořadí
- Sečti pořadí pozorování pod mediánem S^- a nad mediánem S^+ .
- Testovou statistikou S je menší ze součtů.
- Kritické hodnoty pro malé počty jsou tabelovány.
- Pro vyšší počty pozorování jsou hodnoty aproximovány normálním rozdělením.

Výpočet statistik v mediánovém testu

- **Je čas kola 10 minut?**
 - Uspořádáme závod
- **Rozhodovat bude čas v cíli nebo vzdálenost od cíle po 10 min.**
 - Přesná hodnota času v cíli nehraje roli.

$$S^- = 2 + 4 = 6$$

$$S^+ = 1 + 3 + 5 + 6 = 15$$

$$S = \min(6, 15) = 6$$

Ranks

	N	Mean Rank	Sum of Ranks
10 - Čas v cíli			
Negative Ranks	2 ^a	3,00	6,00
Positive Ranks	4 ^b	3,75	15,00
Ties	0 ^c		
Total	6		

a. 10 < Čas v cíli

b. 10 > Čas v cíli

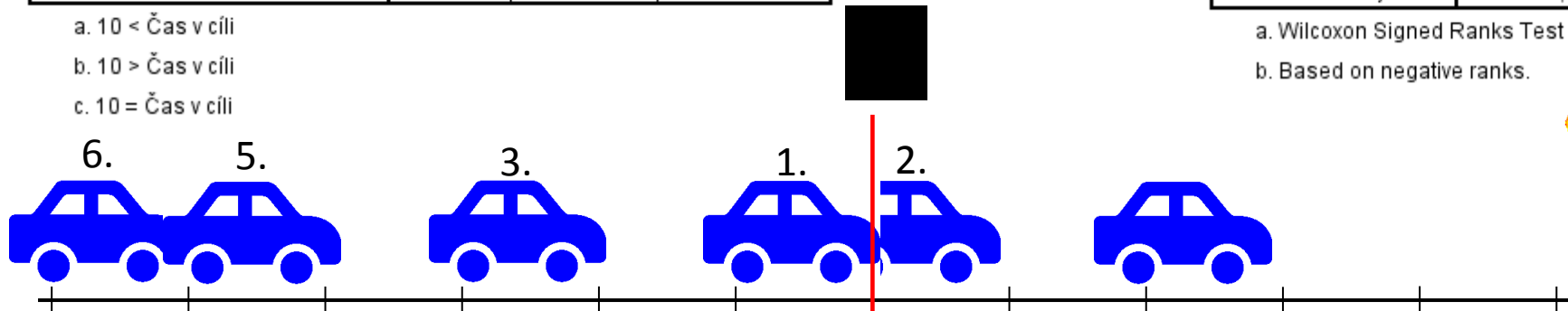
c. 10 = Čas v cíli

Test Statistics^a

	10 - Čas v cíli
Z	-,943 ^b
Asymp. Sig. (2-tailed)	,345
Exact Sig. (2-tailed)	,438
Exact Sig. (1-tailed)	,219
Point Probability	,063

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on negative ranks.



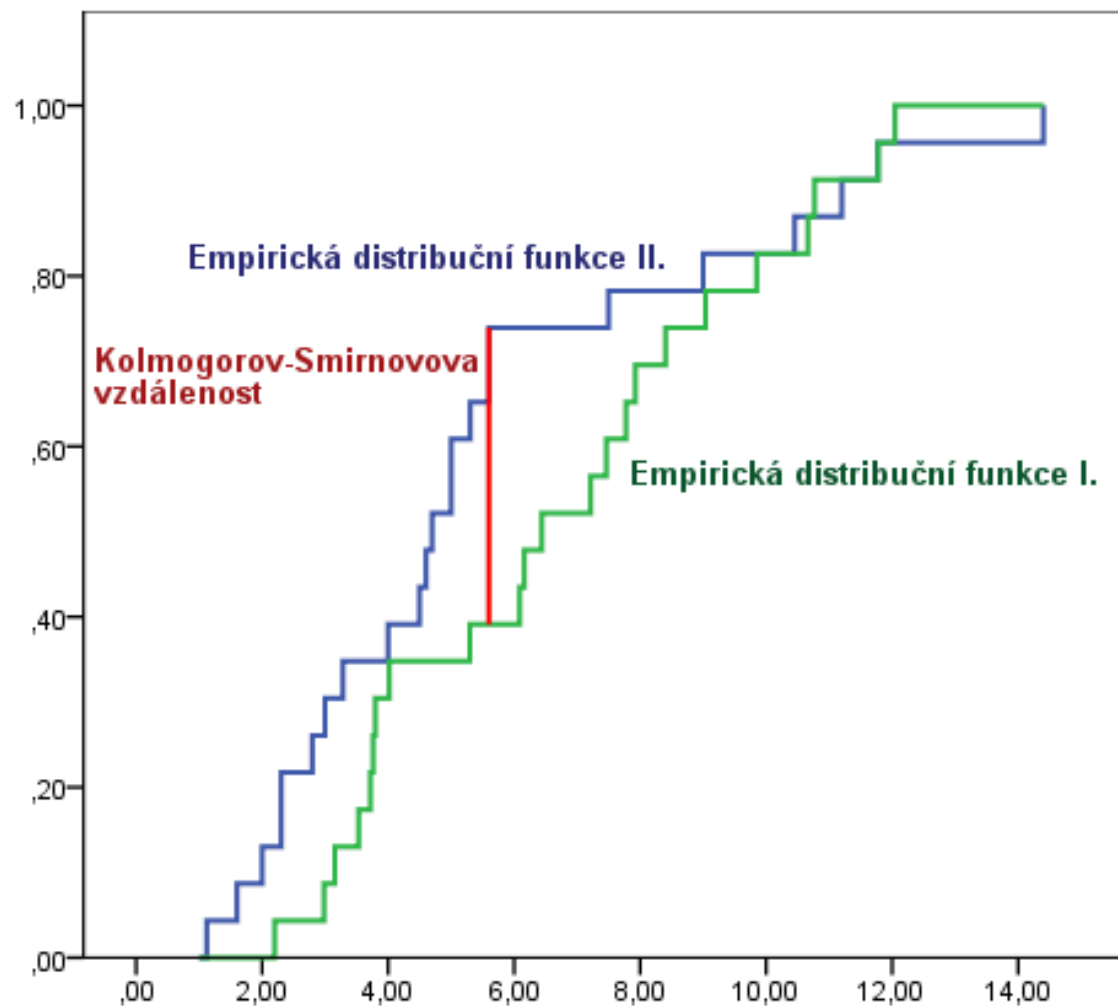


Nezávislé výběry

Dvouvýběrový Kolmogorov-Smirnovův test

- dva nezávislé výběry
 - H_0 : obě pozorované skupiny pochází ze stejného rozdělení
 - H_A : každá ze dvou pozorovaných skupin pochází z jiného rozdělení
 - Liší-li se rozdělení jen svými parametry, považujeme je také za rozdílná, tj. platí H_A .
 - testované rozdělení není třeba specifikovat
 - neparametrická alternativa t-testu pro dva nezávislé výběry
 - bez předpokladu normálního rozdělení ve výběrech
 - není třeba řešit shodu či neshodu rozptylů
- Pro oba výběry spočti jejich empirické distribuční funkce podobně jako u jednovýběrového K-S testu.
 - Hodnoty obou empirických distribučních funkcí z předchozího kroku porovnej mezi sebou.
 - Testovou statistikou je maximální rozdíl obou empirických distribučních funkcí.
 - Kritické hodnoty pro malé počty pozorování jsou tabelovány
 - Platí-li H_0 , statistika má asymptoticky speciální tabelované rozdělení.

Porovnání distribucí ve dvouvýb. K-S testu



Mann-Whitneyův test

- dva nezávislé výběry
- H_0 : obě pozorované veličiny pochází ze stejného rozdělení
- H_A : každá ze dvou pozorovaných veličin pochází z jiného rozdělení
- Liší-li se rozdělení jen svými parametry považujeme je také za rozdílná, tj. platí H_A .
- testované rozdělení není třeba specifikovat
- neparametrická alternativa t-testu pro dva nezávislé výběry
 - bez předpokladu normálního rozdělení ve výběrech
 - není třeba řešit shodu či neshodu rozptylů

- Všechna pozorování vzestupně seřad bez ohledu na příslušnost do skupin a přiřad jim pořadí.
- Pro každou skupinu sečti pořadí jejích členů
 - Wilcoxonovo W
- Pro každého člena jedné skupiny zjisti, kolik členů druhé skupiny získalo nižší pořadí, počty ve skupinách sečti
 - Mann-Whitneyovo U

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

$$U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

$$U_1 + U_2 = n_1 n_2$$

- Testovou statistikou je menší ze součtů
- Kritické hodnoty pro malé počty pozorování jsou tabelovány
- Pro vyšší počty pozorování se U aproximuje normálním rozdělením

Výpočet statistik v Mann-Whitneyově testu

- Jsou rychlejší červená nebo modrá auta?
 - Uspořádáme závod
- Rozhodovat bude pořadí v cíli.
 - Časy mezi dojezdy závodníků nehrají roli.

$$W_{\check{c}} = 1 + 3 + 6 = 10$$

$$W_m = 2 + 4 + 5 + 7 = 18$$

$$U_{\check{c}} = 0 + 1 + 3 = 4$$

$$U_m = 1 + 2 + 2 + 3 = 8$$

Ranks

skupina	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Čas v cíli Červená	3	3,33	10,00
Modřá	4	4,50	18,00
Total	7		

Test Statistics^a

	Čas v cíli
Mann-Whitney U	4,000
Wilcoxon W	10,000
Z	-,707
Asymp. Sig. (2-tailed)	,480
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,629 ^b

a. Grouping Variable: skupina

b. Not corrected for ties.



Kruskal-Wallisův test

- Dva a více nezávislých výběrů
- H_0 : Všechny pozorované skupiny pochází ze stejného rozdělení
- H_A : Alespoň jedna z pozorovaných skupin pochází z jiného rozdělení
- Liší-li se rozdělení jen svými parametry považujeme je také za rozdílná, tj. platí H_A .
- testovaná rozdělení není třeba specifikovat
- neparametrická alternativa ANOVA
 - bez předpokladu normálního rozdělení ve výběrech
 - není třeba řešit shodu či neshodu rozptylů

- Všechna pozorování vzestupně seřad' bez ohledu na příslušnost do skupin a přiřad' jim pořadí.
- Pro každou skupinu j spočti průměrné pořadí jejích členů r_j
- Z průměrných pořadí ve skupinách spočti testovou statistiku

– Kruskal-Wallisovo H

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^k n_j r_j^2 - 3(n+1)$$

- Kritické hodnoty pro malé počty pozorování jsou tabelovány.
- Pro vyšší počty pozorování se H aproximuje chí-kvadrát rozdělením s $(k-1)$ stupni volnosti.

Výpočet statistik v Kruskal-Wallisově testu

- Jsou rychlejší červená nebo modrá nebo zelená auta?
 - Uspořádáme závod
- Rozhodovat bude pořadí v cíli.
 - Časy mezi dojezdy závodníků nehrají roli.

$$r_z = \frac{1}{3}(2 + 8 + 9) = 6,33$$

$$r_m = \frac{1}{4}(3 + 4 + 5 + 6) = 4,50$$

$$r_z = \frac{1}{2}(1 + 7) = 4,00$$

$$H = \frac{12}{9 * 10} (3 * 6,33^2 + 4 * 4,50^2 + 2 * 4,00^2) - 3 * 10 = 1,11$$

Ranks

skupina	N	Mean Rank
Čas v cíli Červená	3	6,33
Modřá	4	4,50
Zelená	2	4,00
Total	9	

Test Statistics^{a,b}

	Čas v cíli
Chi-Square	1,111
df	2
Asymp. Sig.	,574
Exact Sig.	,614
Point Probability	,013

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable:
skupina



Mediánový test

- dva a více nezávislých výběrů
 - H_0 : všechny pozorované skupiny pochází z rozdělení se stejným mediánem
 - H_A : alespoň jedna z pozorovaných skupin pochází z rozdělení s odlišným mediánem
 - testovaná rozdělení není třeba specifikovat
 - **neparametrická alternativa ANOVA**
 - bez předpokladu normálního rozdělení ve výběrech
 - není třeba řešit shodu či neshodu rozptylů
- Všechna pozorování vzestupně seřad' bez ohledu na příslušnost do skupin a najdi společný medián.
 - V každé skupině spočti počet členů menších než medián a počet členů větších než medián.
 - Z počtů sestav kontingenční tabulku o rozměrech **2xk** porovnávající výsledek srovnání se společným mediánem a skupinu.
 - Pro kontingenční tabulku spočti standardní Pearsonův chí-kvadrát test s **(k-1)** stupni volnosti.

Výpočet statistik v mediánovém testu

- Jsou rychlejší červená nebo modrá nebo zelená auta?
 - Uspořádáme závod
- Rozhodovat bude pořadí v cíli.
 - Časy mezi dojezdy závodníků nehrají roli.

$$M = 5$$

Frequencies

		skupina		
		Červená	Modrá	Zelená
Čas v cíli	> Median	2	1	1
	<= Median	1	3	1

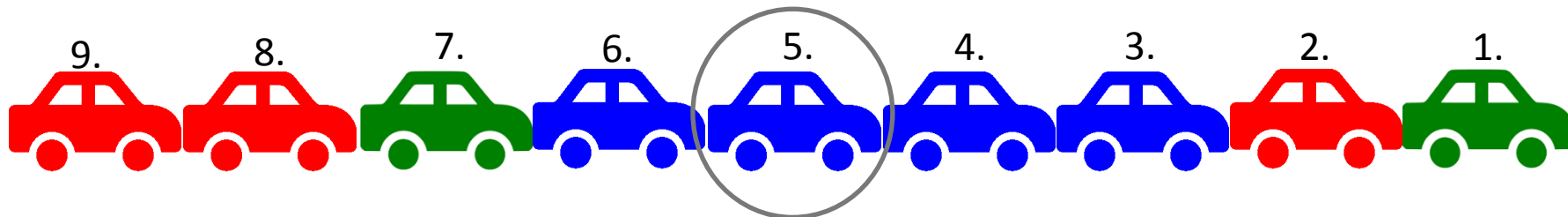
Test Statistics^a

	Čas v cíli
N	9
Median	9,900
Chi-Square	1,238 ^b
df	2
Asymp. Sig.	,539
Exact Sig.	,714
Point Probability	,190

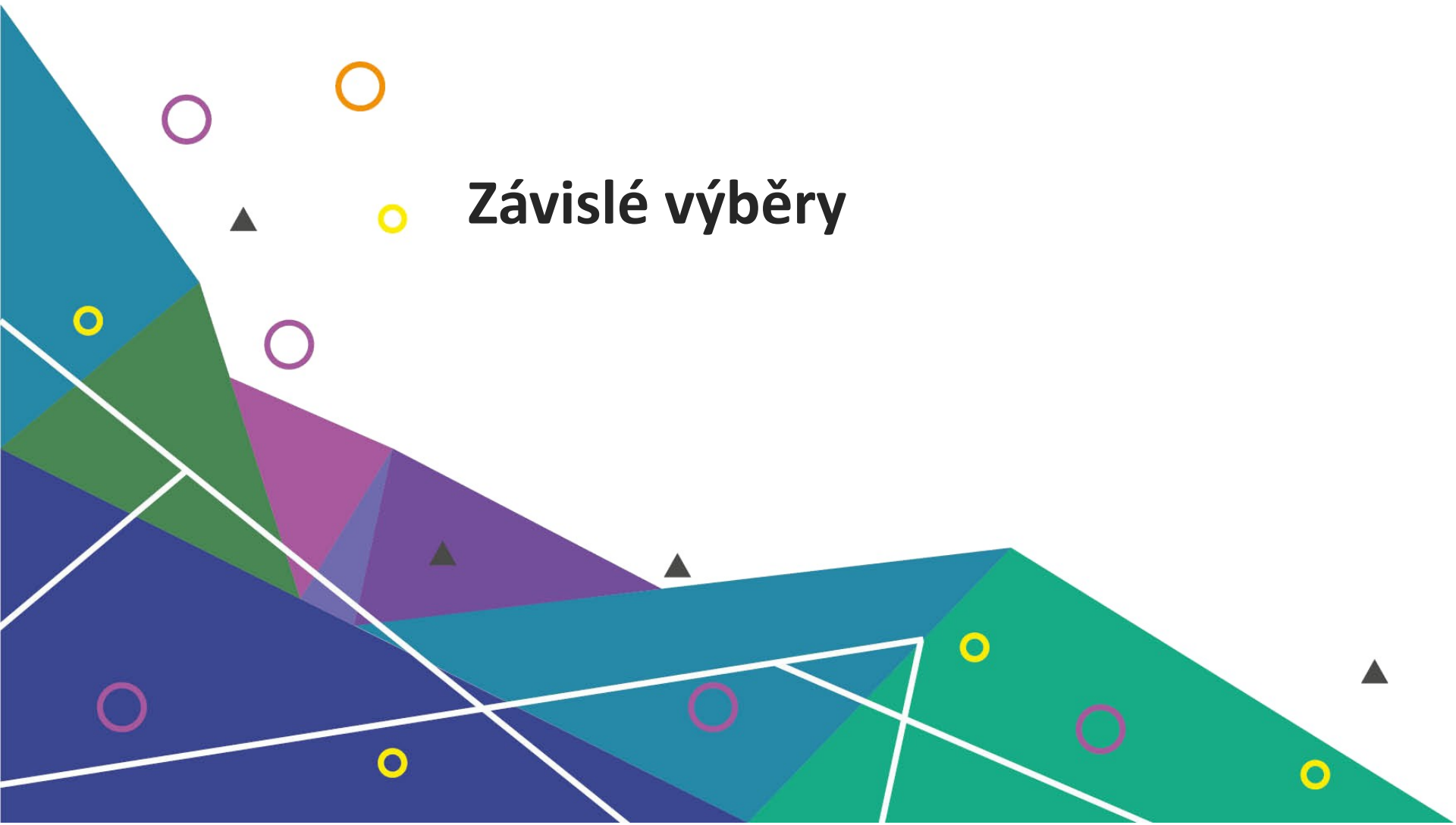
a. Grouping Variable: skupina

b. 6 cells (100,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is ,9.

medián



Závislé výběry



Znaménkový test

- dva závislé výběry, párový test
- H_0 : pravděpodobnost, že první veličina je větší než druhá, je 50%
- H_A : pravděpodobnost, že první veličina je větší než druhá, je jiná než 50%
- rozdělení veličin není třeba specifikovat
- neparametrická alternativa párového t-testu
 - bez předpokladu normálního rozdělení rozdílů







- Pro každý pár spočti, které pozorování je větší a podle toho přiřaď znaménko plus nebo mínus.
- Spočti počet plusů resp. mínusů
- Za platnosti H_0 by se měl počet plusů resp. mínusů řídit binomickým rozdělením s $p = 0,5$.
- Kritickými hodnotami jsou kvantily binomického rozdělení.
- Pro vyšší počty pozorování lze binomické rozdělení aproximovat normálním.

Výpočet statistik ve znaménkovém testu

- **Jezdí auta rychleji na palivo A nebo na palivo B?**
 - Každé auto projede závodní trať dvakrát, jednou s palivem A a podruhé s palivem B
- **Rozhodovat budeme na základě porovnání obou časů**
 - Rozhoduje pouze znaménko rozdílu

$$n_+ = 5$$

$$n_- = 1$$

auto	čas A	čas B	rozdíl	zn.
	65	96	31	+
	40	70	30	+
	69	55	-14	-
	33	67	33	+
	56	81	25	+
	63	82	19	+

Frequencies

		N
Čas v cíli s palivem B - Čas v cíli s palivem A	Negative Differences ^a	1
	Positive Differences ^b	5
	Ties ^c	0
	Total	6

- Čas v cíli s palivem B < Čas v cíli s palivem A
- Čas v cíli s palivem B > Čas v cíli s palivem A
- Čas v cíli s palivem B = Čas v cíli s palivem A

Test Statistics^a

	Čas v cíli s palivem B - Čas v cíli s palivem A
Exact Sig. (2-tailed)	,219 ^b
Exact Sig. (1-tailed)	,109
Point Probability	,094

- Sign Test
- Binomial distribution used.

- dva závislé výběry, párový test
- H_0 : obě pozorované veličiny pochází z rozdělení se stejným mediánem
- H_A : každá ze dvou pozorovaných veličin pochází z rozdělení s jiným mediánem
- testované rozdělení není třeba specifikovat
- neparametrická alternativa párového t-testu
 - bez předpokladu normálního rozdělení rozdílů

- Pro každý pár spočti rozdíl obou pozorování.
- Rozdíly seřaď vzestupně podle jejich absolutní hodnoty a přiřaď jim pořadí.
- Sečti pořadí všech pozitivních rozdílů W_+ a pořadí všech negativních rozdílů W_- .
- Testovou statistikou je menší ze součtů
 - Wilcoxonovo W
$$W = \min(W_+, W_-)$$
- Kritické hodnoty pro malé počty pozorování jsou tabelovány.
- Pro vyšší počty pozorování se W aproximuje normálním rozdělením.

Výpočet statistik ve Wilcoxonově testu

- **Jezdí auta rychleji na palivo A nebo na palivo B?**
 - Každé auto projede závodní trať dvakrát, jednou s palivem A a podruhé s palivem B
- **Rozhodovat budeme podle rozdílů mezi oběma časy.**
 - Rozhoduje pouze znaménko a pořadí absolutní hodnoty rozdílů

$$W_+ = 5 + 4 + 6 + 3 + 2 = 20$$

$$W_- = 1$$

$$W = 1$$

auto	čas A	čas B	rozdíl	zn.	abs.	pořadí
	65	96	31	+	31	5
	40	70	30	+	30	4
	69	55	-14	-	14	1
	33	67	33	+	33	6
	56	81	25	+	25	3
	63	82	19	+	19	2

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Čas v cíli s palivem B - Čas v cíli s palivem A	Negative Ranks	1 ^a	1,00	1,00
	Positive Ranks	5 ^b	4,00	20,00
Ties		0 ^c		
Total		6		

- a. Čas v cíli s palivem B < Čas v cíli s palivem A
 b. Čas v cíli s palivem B > Čas v cíli s palivem A

Test Statistics^a

	Čas v cíli s palivem B - Čas v cíli s palivem A
Z	-1,992 ^b
Asymp. Sig. (2-tailed)	,046
Exact Sig. (2-tailed)	,063
Exact Sig. (1-tailed)	,031
Point Probability	,016

- a. Wilcoxon Signed Ranks Test
 b. Based on negative ranks.

- dva a více závislých výběrů
- H_0 : všechny pozorované veličiny pochází z rozdělení se stejným mediánem
- H_A : alespoň jedna z pozorovaných veličin pochází z rozdělení s jiným mediánem než ostatní
- testované rozdělení není třeba specifikovat
- neparametrická alternativa testování opakovaných měření
 - bez předpokladu normálního rozdělení pozorovaných veličin

- V rámci každého řádku seřad' pozorování a přiřad' jim pořadí.
- V rámci každého sloupce spočti součet řádkového pořadí s_j .
- Z průměrných pořadí spočti testovou statistiku

– Friedmanovo Q

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^k s_j^2 - 3n(k+1)$$

- Kritické hodnoty pro malé počty pozorování jsou tabelovány
- Pro vyšší počty pozorování se Q aproximuje chí-kvadrát rozdělením s $k-1$ stupni volnosti.

Výpočet statistik ve Friedmanově testu




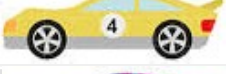


- **Jezdí auta rychleji na palivo A nebo na palivo B nebo na palivo C?**
 - Každé auto projede závodní trať třikrát: jednou s palivem A, podruhé s palivem B a potřetí s palivem C.
- **Rozhodovat budeme na základě součtu či průměru pořadí pro jednotlivá paliva**

$$s_A = 1 + 1 + 3 + 1 + 2 + 2 = 10$$

$$s_B = 3 + 3 + 2 + 3 + 3 + 3 = 17$$

$$s_C = 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 9$$

$$Q = \frac{12}{6 * 3 * 4} (10^2 + 17^2 + 9^2) - 3 * 6 * 4 = 6,22$$

auto	čas A	čas B	čas C	poř. A	poř. B	poř. C
	65	96	70	1	3	2
	40	70	48	1	3	2
	69	55	46	3	2	1
	33	67	58	1	3	2
	56	81	55	2	3	1
	63	82	59	2	3	1

Ranks

	Mean Rank
Čas v cíli s palivem A	1,67
Čas v cíli s palivem B	2,83
Čas v cíli s palivem C	1,50

Test Statistics^a

N	6
Chi-Square	6,333
df	2
Asymp. Sig.	,042
Exact Sig.	,052
Point Probability	,023

a. Friedman Test

- **testování dvou a více závislých výběrů**
- **není dalším typem testu**
 - Lze převést na Friedmanův test
 - Stejné hypotézy, stejná testová statistika
 - Nová statistika pro interpretaci

- **Kendalovo W**

$$W = \frac{Q}{n(k-1)}$$

- **vyjadřuje shodu hodnotitelů**
 - míra reliability
 - škála od nuly do jedné

- **V rámci každého sloupce seřaď pozorování a přiřaď jim pořadí.**
- **V rámci každého řádku spočti součet sloupcového pořadí s_j .**
- **Spočti celkový průměr součtů z přechozího kroku s .**
- **Spočti součet čtverců odchylek od průměru**

$$T = \sum_{i=1}^n (s_i - s)^2$$

- **Spočti koeficient konkordance**
 - Kendalovo **W**

$$W = \frac{12T}{k^2(n^3 - n)}$$

- **Při testování se Kendalovo **W** převede na Friedmanovo **Q** a postupuje se jako při Friedmanově testu**






Výpočet Kendallova koeficientu konkordance

- **Jezdí auta rychleji na palivo A nebo na palivo B nebo na palivo C?**
 - Každé auto projede závodní trať třikrát: jednou s palivem A, podruhé s palivem B a potřetí s palivem C
- **Rozhodovat budeme na základě variability součtu či průměru pořadí pro jednotlivá auta**

$$s = \frac{1}{6}(17 + 7 + 8 + 7 + 10 + 14) = 10,5$$

$$= (17 - 10,5)^2 + (7 - 10,5)^2 + (8 - 10,5)^2 + (7 - 10,5)^2 + (10 - 10,5)^2 + (14 - 10,5)^2 = 85,5$$

$$W = \frac{12 * 85,5}{3^2(6^3 - 6)} = 0,54$$

auto	čas A	čas B	čas C	poř. A	poř. B	poř. C	součet
	65	96	70	5	6	6	17
	40	70	48	2	3	2	7
	69	55	46	6	1	1	8
	33	67	58	1	2	4	7
	56	81	55	3	4	3	10
	63	82	59	4	5	5	14

Test Statistics

N	6
Kendall's W ^a	,528
Chi-Square	6,333
df	2
Asymp. Sig.	,042

a. Kendall's Coefficient of Concordance

- **jeden výběr = jeden sloupec dat**
 - Jednovýběrový Kolmogorov-Smirnov
- **nezávislé výběry = jeden sloupec dat + identifikátor bloků datové matice**
 - dva bloky
 - Mann-Whitney
 - Dvouvýběrový Kolmogorov-Smirnov
 - více než dva bloky
 - Kruskal-Wallis
 - mediánový
- **závislé výběry = několik sloupců dat**
 - dva sloupce
 - Wilcoxon
 - znaménkový
 - více než dva sloupce
 - Friedman
 - Kendall