

Neparametrické testy

Mgr. Jiří Mazurek, PhD.

Co přináší neparametrické testování hypotéz

V případě **ordinálních (pořadových) nebo nominálních dat** odpovídá na specifické otázky:

1. Existuje významný soulad dané charakteristiky vzorku se zadanou charakteristikou?
2. Existuje významný rozdíl dané charakteristiky mezi 2 (nebo více) vzorky?

Charakteristika - např. medián, zadané pořadí, rozdělení pravděpodobnosti (četnosti) aj.

Neparametrické hypotézy

- Neparametrické hypotézy se netýkají parametrů rozdělení náhodné veličiny, nýbrž jiných statistických vlastností, např. tvaru rozdělení, nezávislosti náhodných veličin a podobně.
- O neparametrických testech se také hovoří obecněji v případech, kdy nejsou splněny některé standardně vyžadované předpoklady pro provedení daného testu. (např. u t-testů jsme požadovali splnění jistých podmínek, aby mohl být daný statistický test realizován – požadovali jsme, aby výběr pocházel z normálního rozdělení.)
- Jsou situace, kdy takový předpoklad splněn není, a pak je otázkou jak postupovat.

Možnost testů

- Existují testy „robustnějšího“ charakteru, kterými lze testovat vlastnosti populace, ze které náhodný výběr pochází, a přitom je třeba splnit pouze podmínky velmi obecného charakteru pro využití těchto testů.
- V takových případech hovoříme rovněž o neparametrických testech, byť jimi můžeme testovat konkrétní podobu parametrů daného rozdělení.
- Pod pojmem neparametrický test budeme zahrnovat statistický test, jenž zkoumá jiné vlastnosti neznámé populace či základního souboru než ty vlastnosti, které se týkají přímo parametrů této populace.

Neparametrické testy hypotéz

- Ad 1) **Jednovýběrové testy:**
 - Má medián populace s neznámým rozdělením stanovenou hodnotu? (mediánový test)
 - Pochází výběr z populace se zadaným (známým) rozdělením pravděpodobnosti? (Chi-kvadrát test, Kolmogorov-Smirnovův test)
- Ad 2) **Dvouvýběrové testy:**
 - Mají výběry stejný medián? (mediánový test)
 - Pochází výběry ze stejné populace? (Chi-kvadrát test, Mann-Whitneyův test, Wilcoxonův párový test)

Mediánový test

- hodnoty mediánu (prostřední hodnoty v populaci).
- Pokud jde o populaci, která má tu vlastnost, že její populační průměr se shoduje s mediánem, lze mediánový test využít také jako jednovýběrový t-test.
- Jedinou podmínkou pro použití mediánového testu je předpoklad, že rozdělení četností v populaci je možno popsat distribuční funkcí spojitého typu. Nepožaduje se tedy v tomto případě normální rozdělení jako v případě jednovýběrového t-testu.

Mediánový test - předpoklady

- Označme neznámý medián v populaci symbolem $\tilde{\mu}_0$, rozsah vzorku dat, který je k dispozici, je n . Předpokládáme větší rozsah výběru, neboť platnost dále popsaného testu se zpřesňuje s růstem rozsahu n .

Mediánový test

1. Nulová hypotéza: $H_0: \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$

Alternativní hypotéza: $H_1: \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$

2. Testové kritérium: $T = \frac{|2m-n|}{\sqrt{n}}$,

- kde m je počet pozorování, která jsou menší než $\tilde{\mu}_0$

3. Kritická hodnota je $K = z_{1-\alpha/2}$

- $z_{1-\alpha/2}$ je kritická hodnota normovaného normálního rozdělení pro zadanou hladinu významnosti α .

4. Jestliže platí $T \geq K$, potom se H_0 zamítá, jinak se H_0 přijímá.

Mediánový test - poznámky

- $z_{1-\alpha/2}$ je kritická hodnota normovaného normálního rozdělení pro zadanou hladinu významnosti α .
- Je to tedy reálné číslo $z_{1-\alpha/2}$ takové, že pravděpodobnost jeho překročení (nebo dorovnání) je rovna hodnotě $1-\alpha/2$.
- Tuto hodnotu nalezneme buď ve statistických tabulkách normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ nebo pomocí Excelu použitím funkce `NORMSINV` ($1-\alpha/2$)

Příklad 1

- Budeme testovat hypotézu (na hladině významnosti 0,05), že průměrný plat v jistém podniku je 35 000 Kč. Z 50 zaměstnanců podniku mělo 30 zaměstnanců plat nižší než 35 000 Kč.
- Vypočteme testové kritérium $T = \left| \frac{2m-n}{\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{2*20-50}{\sqrt{50}} \right| = 0,14$.
- Krit. hodnota (z tabulek): $K = 1,96$.
- H_0 přijímáme.

Testy dobré shody

- Další kategorií testů, které probereme, jsou tzv. **testy dobré shody**.
- Do této skupiny statistických metod patří řada testů, my se budeme zabývat dvěma z nich, které lze považovat za základní a často využívané při marketingových či sociologických výzkumech.
- **První test** je zaměřen na testování podoby pravděpodobnostního rozdělení, z něhož pochází náhodný výběr, který je k dispozici.
- **Druhý test** zkoumá statistickou nezávislost dvou znaků. Protože se v obou případech pracuje s rozdělením chí-kvadrát, pokud jde o rozdělení testového kritéria, hovoří se také o chí-kvadrát testech.

Chi-kvadrát test

(χ^2 - test pro 1 výběr)

- Data mohou být nominální (nejslabší požadavek)!
- Testuje se (nulová) hypotéza: výběr pochází z populace se zadaným rozdělením
- Zadané rozdělení je obvykle:
 - diskrétní rozdělení s rozdílnými pravdě- podobnostmi (tzv. **test dobré shody**)
 - diskrétní rozdělení se stejnými pravdě- podobnostmi (tzv. **test nezávislosti**)

Test dobré shody

- Pro (Pearsonův) test dobré shody předpokládáme, že výsledky náhodného výběru lze uspořádat do J nepřekrývajících se tříd.
- Četnosti v jednotlivých třídách značíme $n_1, n_2, \dots, n_J$, celkový rozsah náhodného výběru je n .
- Testovaná hypotéza spočívá v předpokladu určitého modelu pravděpodobnostního rozdělení, tedy předpokladu pravděpodobností pro každou třídu $p_1, p_2, \dots, p_J$, součet všech pravděpodobností dává hodnotu 1.
- Test dobré shody spočívá v porovnání naměřených (empirických) četností s četnostmi teoretickými.
- Teoretické četnosti $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_J$ získáte jako součin odpovídající pravděpodobnosti a rozsahu náhodného výběru:
 $p_i \cdot n_i$
- Podmínkou použitelnosti testu jsou teoretické četnosti větší než 5.

Postup testu

1. Stanovení hypotézy: $H_0 : p_1 = \pi_1, p_2 = \pi_2, \dots, p_j = \pi_j$ (slovy: dobrá shoda),
 $H_1 : \exists i, p_i \neq \pi_i$ (negace H_0).
2. Testové kritérium: $G = \sum_{i=1}^J \frac{(n_i - \psi_i)^2}{\psi_i}$.
3. Obor přijetí: $\langle 0, \chi_{J-1}^2(\alpha) \rangle$, kritický obor: $(\chi_{J-1}^2(\alpha), +\infty)$, kde $\chi_{J-1}^2(\alpha)$ je kritická hodnota χ^2 -rozdělení s $df = J - 1$.
4. Závěr.

Excel

- V Excelu dostanete kritickou hodnotu pomocí funkce **CHIINV**.
- Další funkce programu Excel, funkce **CHITEST(Aktuální;Očekávané)** vám umožní spočítat p hodnotu testu.
- Argumenty funkce CHITEST jsou naměřené – aktuální hodnoty n_i a pak teoretické – očekávané hodnoty ψ_i . Testové kritérium získáte z p -hodnoty pomocí funkce CHIINV.

Příklad 2

- Dodavatel slíbil, že dodávka bude obsahovat 70% výrobků 1. jakosti, 20% druhé jakosti a 10% jakosti třetí.
- Při kontrole dodávky kontroloři náhodně vybrali 100 výrobků a zjistili, že 75 kusů je 1. jakosti, 10 kusů je 2. jakosti a 15 kusů je jakosti třetí.
- Na hladině významnosti 0,05 zjistěte, zda dodavatel dodržel smlouvu.

Příklad 2 – řešení

- V následující tabulce je přehled zadání a výpočet teoretických hodnot. Celkový počet pozorování je $n = 100$.

Četnost výskytu n_i	Pravděpodobnost p_i	Teoretická četnost $\psi_i = p_i n_i$
75	0,7	70
10	0,2	20
15	0,1	10

P (pozorovaná četnost)	O (očekávaná četnost)	P-O	(P-O) ²	(P-O) ² /O
75	70	5	25	0.35
10	20	-10	100	5
15	10	5	25	2.5
			suma (G)	7.85

Příklad 2 – dosazení do vzorce

1. Stanovení hypotézy: $H_0 : p_1 = 0,7, p_2 = 0,2, p_3 = 0,1$ (shoda – smlouva dodržena)
 H_1 : negace H_0 (neshoda – dodavatel šidí).

2. Testové kritérium:

$$G = \sum_{i=1}^J \frac{(n_i - \psi_i)^2}{\psi_i} = \frac{(75 - 70)^2}{70} + \frac{(10 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 10)^2}{10} =$$
$$= \frac{25}{70} + \frac{100}{20} + \frac{25}{10} = 7,857.$$

3. Kritickou hodnotu naleznete takto: $\text{CHIINV}(0,05;2)=5,991476$. Potom obor přijetí: $\langle 0;5,99 \rangle$, kritický obor: $(5,99;+\infty)$.
4. Závěr: Testové kritérium leží v kritickém oboru. Zamítáme hypotézu dobré shody vzorku s předpokladem. Dodavatel nedodržel smlouvu.

Příklad 2 – výpočet pomocí aplikace EXCEL

- Použijete-li k testování funkci CHITEST, naleznete po dosazení naměřených a teoretických hodnot výsledek $p = 0,01967$.
- Toto číslo je menší než zadaná hladina významnosti $\alpha=0,05$, a tedy zamítáme nulovou hypotézu, dodavatel nedodržel smlouvu.
- Testové kritérium získáte z pravděpodobnosti p pomocí funkce CHIINV, jejíž argumenty budou pravděpodobnost a počet stupňů volnosti.
- Zkontrolujte si, že $\text{CHIINV}(0,019671;2)=7,857$.

Příklad 2b

- Zaměstnavatel se rozhodl zjistit, zda existuje souvislost mezi počtem nemocných zaměstnanců a ročním obdobím.
- V zimě bylo nemocných 8 osob, na jaře 14, v létě 6 a v zimě 12.
- Na hladině významnosti 0,05 testujte nulovou hypotézu, že ve všech ročních obdobích byl počet nemocných zaměstnanců stejný.

	P	O	$(P-O)^2$	$(P-O)^2/O$
Zima	8	10		
Jaro	14	10		
Léto	6	10		
Podzim	12	10		

Test nezávislosti kvalitativních znaků

- Jednou z aplikací testu dobré shody je testování nezávislosti kvalitativních znaků v **kontingenční tabulce**.
- Jedná se o n náhodných pokusů, které nemají přesné výsledky, ale výsledky určují rozdělení do kategorií.
- Příkladem může být kvalitativní znak úspěch s kategoriemi úspěš/neúspěš nebo znak barva s kategoriemi červená/modrá/zelená.
- Sleduje se více znaků, pro dva znaky A a B by výsledná tabulka četností (kontingenční tabulka) vypadala takto:

Příklad kontingenční tabulky

Kategorie znaku A/B	B_1	B_2	B_3	...	B_s	Marginální součty
A_1	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	...	$n_{1,s}$	$n_{1,-}$
A_2	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	$n_{2,3}$	...	$n_{2,s}$	$n_{2,-}$
A_3	$n_{3,1}$	$n_{3,2}$	$n_{3,3}$	...	$n_{3,s}$	$n_{3,-}$
...	...	...	...	...	...	...
A_r	$n_{r,1}$	$n_{r,2}$	$n_{r,3}$	...	$n_{r,s}$	$n_{r,-}$
Marginální součty	$n_{-,1}$	$n_{-,2}$	$n_{-,3}$		$n_{-,s}$	Celkový součet n

- Počet kategorií znaku A označme r a toto číslo současně označuje počet řádků tabulky.
- Počet kategorií znaku B označme s a tento počet je v tabulce vyjádřen počtem sloupců.
- Celkový počet pozorování je n .
- Test nezávislosti se může provádět, jen když je každá z četností $n_{i,j}$ větší než 4.

Teoretické hodnoty

- Chceme-li použít k testování nezávislosti znaků A a B test dobré shody, potřebujeme mít k dispozici teoretické hodnoty, které pak následně porovnáme s hodnotami naměřenými.
- Teoretické četnosti jsou hodnoty, které by byly v tabulce, kdyby oba znaky byly nezávislé a současně by marginální četnosti zůstaly stejné jak u empirických hodnot.
- Teoretické hodnoty lze vypočítat ze vztahu:

$$\psi_{i,j} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}$$

Tabulka teoretických četností

Kategorie znaku A/B	B_1	...	B_s	Marginální součty
A_1	$\psi_{1,1} = \frac{n_{1, \cdot} \cdot n_{\cdot, 1}}{n}$	...	$\psi_{1,s} = \frac{n_{1, \cdot} \cdot n_{\cdot, s}}{n}$	$n_{1, \cdot}$
A_2	$\psi_{2,1} = \frac{n_{2, \cdot} \cdot n_{\cdot, 1}}{n}$	...	$\psi_{2,s} = \frac{n_{2, \cdot} \cdot n_{\cdot, s}}{n}$	$n_{2, \cdot}$
...	...	...	...	...
A_r	$\psi_{r,1} = \frac{n_{r, \cdot} \cdot n_{\cdot, 1}}{n}$	...	$\psi_{r,s} = \frac{n_{r, \cdot} \cdot n_{\cdot, s}}{n}$	$n_{r, \cdot}$
Marginální součty	$n_{\cdot, 1}$	...	$n_{\cdot, s}$	Celkový součet n

Postup testování

1. Stanovení hypotézy: $H_0 : p_{i,j} = p_i \cdot p_j, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$ (nezávislost znaků),
 $H_1 : \text{negace } H_0$.
2. Testové kritérium: $G = \sum_{i=1}^J \frac{(n_i - \psi_i)^2}{\psi_i}$.
3. Obor přijetí: $\langle 0, \chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha) \rangle$, kritický obor: $(\chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha), +\infty)$, kde $\chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha)$ je kritická hodnota chi-rozdělení s $df = (r-1)(s-1)$.
4. Závěr.

Příklad 3

- Bylo zkoumáno nákupní chování mužů a žen, které se týkalo návštěv obchodního domu Karolína Ostrava. V Tabulce níže je uveden počet žen a mužů, kteří v Karolíně pravidelně nakupují.

	ANO	NE	
Muži	12	34	46
Ženy	25	16	41
	37	50	87

Zjistěte na hladině významnosti $\alpha = 0,05$, zda se nákupní zvyklosti mužů a žen liší.

Příklad 3 - pokračování

- V našem případě se kontingenční tabulka nazývá 4polní tabulka.

	Kat. 1	Kat. 2	
Kat. 1	A	B	
Kat. 2	C	D	

Testové kritérium se vypočte takto: $G = \frac{n(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$

Kritickou hodnotu najdeme v tabulkách pro chí-kvadrát rozdělení s 1 stupněm volnosti.

Příklad 3 - pokračování

- Bylo zkoumáno nákupní chování mužů a žen, které se týkalo návštěv obchodního domu Karolína Ostrava. V Tabulce níže je uveden počet žen a mužů, kteří v Karolíně pravidelně nakupují. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ otestujte hypotézu, že se nákupní chování mužů a žen neliší.

	ANO	NE	
Muži	12	34	46
Ženy	25	16	41
	37	50	87

H_0 : Nákupní chování mužů a žen se neliší.

H_1 : liší se.

$$G = \frac{87(12 \cdot 16 - 25 \cdot 34)^2}{(12+34)(25+16)(12+25)(34+16)} = 10.79; K(df = 1, \alpha = 0.05) = 3.84.$$

H_0 zamítáme.

Příklad 4

- Vysoká škola zjišťovala, jestli existuje závislost mezi známkami z matematiky a mikroekonomie.
- Do výzkumu zahrnula 100 studentů druhých ročníků, kteří měli obě zkoušky za sebou. Výsledky jsou uspořádány v následující kontingenční tabulce.
- Na hladině významnosti 0,05 určete, zda lze pozorovat závislost mezi těmito dvěma předměty.

		Mikroekonomie			
Známka		1	2	3	
Matematika	1	7	5	8	20
	2	5	11	12	28
	3	14	19	19	52
		26	35	39	100

Příklad 4 - řešení

- **H0: Mezi známkami z matematiky a mikroekonomie není závislost.**

H1: je závislost.

- **Testové kritérium G:**

- $$G = 100 \left(\frac{7^2}{20 \cdot 26} + \frac{5^2}{20 \cdot 35} + \frac{8^2}{20 \cdot 39} + \frac{5^2}{26 \cdot 28} + \frac{11^2}{35 \cdot 28} + \frac{12^2}{39 \cdot 28} + \frac{14^2}{26 \cdot 52} + \frac{19^2}{35 \cdot 52} + \frac{19^2}{39 \cdot 52} - 1 \right) = 2.3$$

- **K (df = 4, alfa = 0.05) = 9.49.**

- **H0 přijímám.**

		Mikroekonomie			
Známka		1	2	3	
Matematika	1	7	5	8	20
	2	5	11	12	28
	3	14	19	19	52
		26	35	39	100

Děkuji za pozornost