

Matice

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matice typu (m, n) ... m řádků
 n sloupců

např. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ obdelník
 $B = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$ čtverec
 $C = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 200 & 0 \end{pmatrix}$ čtverec

jiný zápis matice $A = (a_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$

$i \dots$ řádkový index
 $k \dots$ sloupcový index

$A = [a_{ik}]$ nebo $A = \|a_{ik}\|$

hlavní diagonála ... prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$
vedlejší diagonála
 $n = \min\{m, n\}$

nulová matice ... prvky jsou nuly, značíme O

diagonální matice ... mimo hlavní diagonálu nuly a na hlavní diagonále nenulová čísla

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

jednotková matice ... diagonální matice, kt. má na hlavní diagonále

prvky jednotky

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trojúhelníková matice

horní ... pod hlavní diagonálou jen nuly
dolní ... nad hl. diagonálou jen nuly

Operace s maticemi

ROVNOST MATIC

matice $A = (a_{ik})$ a $B = (b_{ik})$ stejného typu (m, n) se sobě rovnají, pokud mají

na stejných místech stejné prvky

$$\text{např.: } \begin{pmatrix} x & 0,5 & 2 \\ 4 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & y+z \\ 4 & y & z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0,5 \\ z=1,5 \end{matrix}$$

SČÍTÁNÍ MATIC

sčítání matice $A = (a_{ik})$ a $B = (b_{ik})$ stejného typu (m, n) rozumíme

matice, jejíž prvky jsou součtem odpovídajících si prvků matice A a B

$$\text{např.: } A = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 \\ -10 & 0 & \pi \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} 20+11 & 23+3 & 5+8 \\ 8-10 & 4+0 & 3+\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 26 & 13 \\ -2 & 4 & 3+\pi \end{pmatrix}$$

VLASTNOSTI SČÍTÁNÍ MATIC

- $A+B = B+A$
- $A+(B+C) = (A+B)+C$
- $A+O = O+A = A$... O je nulová matice stejného typu jako A
- $A+(-A) = -A+A = O$

NÁSOBENÍ MATICE REÁLNÝM ČÍSLEM

násobit matice $A = (a_{ik})$ reálným číslem r znamená vynásobit

každý prvek a_{ik} číslem r ... typ matice se nemění

$$\text{např.: } A = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad r=4$$

$$rA = \begin{pmatrix} 4 \cdot 20 & 4 \cdot 23 & 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 8 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 92 & 20 \\ 32 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

VLASTNOSTI

- $\lambda A = A \lambda$
- $1A = A$
- $(-\lambda)A = -A$
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

NÁSOBENÍ MATICE MATICÍ

součinem matice A typu (m, n) a matice B typu (n, p)

je matice $C = AB$ typu (m, p)

! počet sloupců první matice musí být stejný jako počet

řádků druhé matice ... u nás n

... pravidlo $P \times S = R$

$$\text{např.: } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + ? \cdot 2 + ? \cdot 5 & 4 \cdot 0 + ? \cdot 1 + ? \cdot 2 \end{pmatrix} \quad \text{NELOŽE}$$

VLASTNOSTI

- obecně neplatí komutativnost ... $AB \neq BA$
(platí jen u zvláštních případů)
- $A \cdot E = EA = A$... E ... jednotková matice
- $A(BC) = (AB)C$
- $AO = OA = O$... O ... nulová matice
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $A(B+C) = AB+AC$
- $(A+B)C = AC+BC$

TRANSPONOVÁNÍ MATICE

- sámení řádků se sloupci (přehodnutí prvků matice kolem hl. diag.)

$$\text{např.: } A = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots \text{transponováno: } A^T = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 23 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Hodnost matice

hodnost $h(A)$ matice A je maximální počet lineárně nezávislých

řádků (nebo sloupců) matice A

- hodnost nulové matice je 0
- hodnost obdelníkove matice je rovna menšímu z čísel, kt. odpovídají max. počtu lineárně nezávislých řádků nebo sloupců
3 řádky, 4 sloupce ... $\min\{3, 4\} = 3$

EKVIVALENTNÍ matice ... mají stejnou hodnost, značíme $A \sim B$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 18 \end{pmatrix}$ jsou řádky lineárně závislé?
... první řádek násobený číslem 3 je stejný jako druhý řádek $\rightarrow$ jsou lineárně závislé

hodnost matice se nemění, pokud v matici provedeme

řádkové elementární úpravy:

- sámení řádků matice
- vynásobení řádku reálným číslem (nenulovým)
- přičtení lineární kombinace řádků k jinému řádku matice
- spečení řádků, kt. je lineární kombinací ostat. řádků
- ... totéž platí pro sloupce, proto $h(A) = h(A^T)$

POSTUP: Pomocí řádkových elem. úprav přivedeme matici

na horní trojúh. tvar. Hodnost matice je rovna počtu

obv. nenulových řádků matice.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot \text{ř.} 1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 8 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3 \cdot \text{ř.} 1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 19 & -41 \end{pmatrix}$$

řádky ... 3
sloupce ... 4

$$h(M) = \min\{3, 4\} = 3$$