

Determinanty  
determinant je číslo přiřazené čtvercové matici

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

čtvercovou matici A nazýváme REGULÁRNÍ právě tehdy, když  $\det A \neq 0$   
také platí:  $\text{h}(A) = n$

čtvercovou matici B nazýváme SINGULÁRNÍ právě tehdy, když  $\det B = 0$   
také platí:  $\text{h}(B) \neq n$

Výpočet determinantu

- determinant druhého řádu

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 6 = 10 + 18 = 28$$

A je regulární

- determinant třetího řádu (Sarrusovo pravidlo)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = 5 + 24 + 0 - 15 - 0 - 4 = 10$$

matice je regulární

Určení parametru tak, aby matice byla regulární (nebo singulární)

- pro jaké hodnoty parametru p (reálné číslo) je matice regulární a pro jaké hodnoty je singulární?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4+p \\ p+1 & 5-p \end{pmatrix}$$

$$\det A = 6 \cdot (5-p) - (4+p) \cdot (p+1) = 30 - 6p - (4p + 4 + p^2 + p) = 30 - 6p - 4p - 4 - p^2 - p = -p^2 - 11p + 26 = \det A$$

$$\begin{aligned} -p^2 - 11p + 26 &= 0 \\ p^2 + 11p - 26 &= 0 \end{aligned}$$

$$p_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-26)}}{2 \cdot 1} = \frac{-11 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-11 \pm 15}{2}$$

$$p_1 = \frac{-11 + 15}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$p_2 = \frac{-11 - 15}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$

pro  $p \in \mathbb{R} \setminus \{-13; 2\}$  je matice A regulární  
pro  $p \in \{-13; 2\}$  singulární

Inverzní matice

- inverzní matici lze najít jen pro REGULÁRNÍ matici ... ta je invertibilní

- inverzní matici k matici A značíme  $A^{-1}$  a platí

$$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A \quad E \dots \text{jednotková matice } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ nebo } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ apod.}$$

- ke každé regulární matici existuje právě jedna inverzní matice

- inverzní matice se využívají v maticových rovnicích

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{potom} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo

- metoda řešení soustavy lineárních rovnic, pokud je matice soustavy regulární

- pro regulární matici soustavy má soustava právě jedno řešení a platí

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$B_i$  je matice, t.j. v. n. z matice A tak, že i-tý sloupec matice A nahradíme aritmetickým vektorem pravých stran soustavy a ostatní sloupce necháme beze změny

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ -x + 2y &= -3 \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_x = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B_y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{5 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3)}{2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1)} = \frac{10 - 9}{4 - 3} = \frac{1}{1} = 1 \quad x = 1$$

$$y = \frac{2 \cdot (-3) - 5 \cdot (-1)}{2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1)} = \frac{-6 + 5}{4 - 3} = \frac{-1}{1} = -1 \quad y = -1$$

Gaussova eliminační metoda

- používá se pro řešení soustav lineárních rovnic

- použitím řádkových elementárních úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na horní trojúhelníkový tvar

- soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat maticově jako  $AX=B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matice soustavy

$A_n$  ... rozšířená matice soustavy

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

- pokud matice B obsahuje pouze nuly, jedná se o homogenní soustavu rovnic;

- pokud matice B neobsahuje pouze nuly, jedná se o NEHOMOGENNÍ soustavu rovnic

- nehomogenní soustava rovnic má

- žádné řešení, pokud  $\text{h}(A) < \text{h}(A_n)$

- právě jedno řešení, pokud  $\text{h}(A) = \text{h}(A_n)$  a navíc  $\text{h}(A) = n$

- nekonečně mnoho řešení, pokud  $\text{h}(A) = \text{h}(A_n)$  a  $\text{h}(A) < n$  ... v takovém případě máme  $(n-h)$  parametrů

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ -x + 2y &= -3 \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{2 \cdot 2. \text{ř.} : -2 \quad 4 \quad -6} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \left. \begin{aligned} \text{h}(A) &= 2 \\ \text{h}(A_2) &= 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{h}(A) &= \text{h}(A_2) \quad \therefore \\ n \text{ (počet neznámých)} &= 2 \text{ (mám } x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0x + y &= -1 \\ 2x - 3y &= 5 \\ 2x - 3 \cdot (-1) &= 5 \\ 2x + 3 &= 5 \quad / -3 \\ 2x &= 2 \quad / :2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$\text{h}(A) = n \Rightarrow$  právě 1 řešení