Def: Funkce $f(x)$ je integrovatelná na $[a,b]$, když $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ platí délka dílku dělení $< \delta \Rightarrow U_f - L_f < \varepsilon$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\uparrow}} L_f = \lim_{\substack{\uparrow}} U_f$$

délka dílku dělení $\to 0$

- nebudeme počítat podle definice, naučíme se neurčitý integrál základních funkcí a nějaká pravidla pro derivování, takto dostaneme funkci (tzv. „primitivní" funkce k f)
- určitý integrál potom dopočítáme takto: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

primitivní funkce k f

Integrály zákl. funkcí:

$\int 1\,dx = x$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\int c\,dx = c \cdot x$

$\int e^x\,dx = e^x$

$\int \sin x\,dx = -\cos x$

$\int \cos x\,dx = \sin x$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

Základní vlastnosti integrálu:

1) linearita $\int f+g\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

$\int c \cdot f\,dx = c \cdot \int f\,dx$

2) porovnání $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$

3) abs. hodnota $\int |f|\,dx \geq |\int f\,dx|$

4) dělení intervalu: $[a,b]$; $a < c < b$

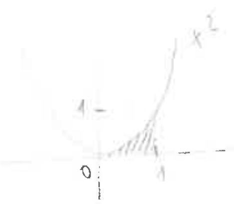
$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$

5) opačný interval: $\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$

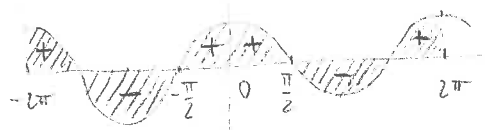
- neplatí žádné pravidlo pro integraci součinu ani složené funkce

Př.) Zintegrujte:

1) $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$



2) $\int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-2\pi}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin(-2\pi) = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$



všechny části nad osou x se započítaly s +, části pod osou s −, poodečítaly se, vyšla nula

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\,dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}} \longleftarrow$ skutečná plocha 1 „obloučku" funkce cos