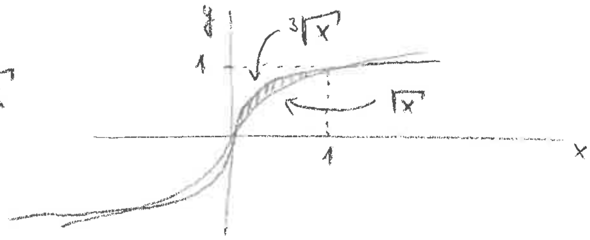
$y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt[3]{x}$



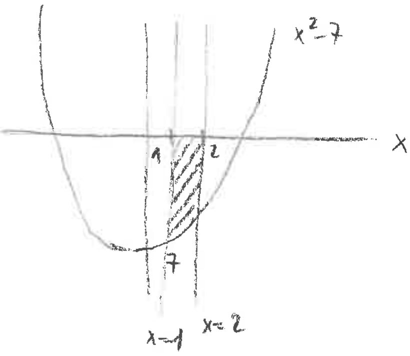
$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, dx$ určí plochu mezi grafem funkce $\sqrt[3]{x}$ a osou x

$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$ — " — $\sqrt{x}$ a osou x

musíme tedy spočítat rozdíl $\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})\, dx$

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})\, dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}})\, dx = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}} \text{ (jednotek}^2\text{)}$$

Př Určete plochu oblasti vymezené křivkami $y = x^2 - 7$; osa x, $x = 1$, $x = 2$.



$$\int_1^2 x^2 - 7\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 7x \right]_1^2 = \frac{8}{3} - 14 - \left(\frac{1}{3} - 7 \right) =$$

$$= \frac{7}{3} - 7 = \frac{7-21}{3} = \underline{\underline{-\frac{14}{3}}}$$

plocha vyšla záporně, protože je pod osou x

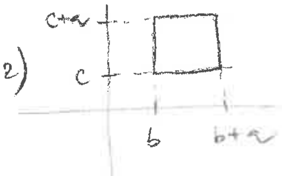
obsah plochy je tedy $\underline{\underline{\frac{14}{3}}}$.

Př Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu čtverce o straně a.

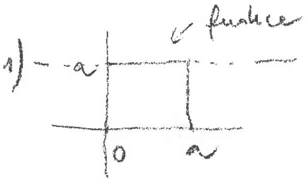
Je jedno, jak čtverec umístíme do roviny

třeba takto:

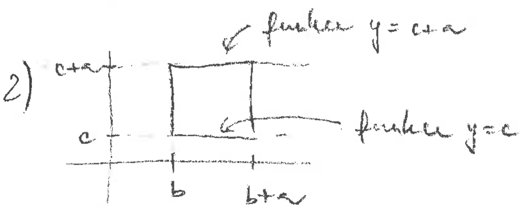
nebo takto



(musí vyjít stejně)



$$\int_0^a a\, dx = [ax]_0^a = \underline{\underline{a^2}}$$



$$\int_b^{b+a} ((c+a) - c)\, dx = \int_b^{b+a} a\, dx = [ax]_b^{b+a} =$$

$$= a(b+a) - ab = ab + a^2 - ab = \underline{\underline{a^2}}$$

Př Určete obsah plochy oblasti vymezené křivkami

a) $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ (3π)

b) $y = x + 3$, $y = 5 - 2x$, $x = 2$ $\left(\frac{8}{3}\right)$