Algebra II

Lineární zobrazení

Def: U, V .. vekt. prostory. Zobrazení $f: U \to V$ se nazývá lineární (nebo homomorfismus vekt. prostorů), když

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ (aditivita)
2) $f(r \cdot a) = r \cdot f(a)$ (homogenita)

$(a, b \in U, r \in P)$

Př Je zobrazení $f(x) = 3x$ lineární?

1) $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b$
$f(a) + f(b) = 3a + 3b$ ✓

2) $f(r \cdot a) = 3 \cdot r \cdot a$
$r \cdot f(a) = r \cdot 3 \cdot a$ ✓

ano, je

Př Je zobr. $f(x) = x^2$ lineární?

1) $f(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$f(a) + f(b) = a^2 + b^2$

není

Př Je zobr. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, 3x, y)$ lineární?

1) $f(a+b) = f((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = f(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1 + b_1 + a_2 + b_2, 3(a_1 + b_1), a_2 + b_2)$
$f(a) + f(b) = f(a_1, a_2) + f(b_1, b_2) = (a_1 + a_2, 3a_1, a_2) + (b_1 + b_2, 3b_1, b_2) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, 3a_1 + 3b_1, a_2 + b_2)$ ✓

2) $f(r \cdot a) = f(r \cdot (a_1, a_2)) = f(ra_1, ra_2) = (ra_1 + ra_2, 3ra_1, ra_2)$
$r \cdot f(a) = r \cdot f(a_1, a_2) = r \cdot (a_1 + a_2, 3a_1, a_2) = (ra_1 + ra_2, r3a_1, ra_2)$ ✓

ano, je

Př $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x - 3z, z + 2y - 5)$ DÚ (není lineární)

Jádro a obraz lineárního zobr.

Def: Jádro $\operatorname{Ker} f = \{u \in U;\ f(u) = 0\}$ (= všechno, co se zobrazí na 0)

Obraz $\operatorname{Im} f = \{f(u);\ u \in U\} = f(U)$ (= množina všech obrazů)

Platí: $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim U$

Jádro a obraz jsou vekt. podprostory.

Př $f(x) = 4x$

$\operatorname{Ker} f$ - která čísla se zobrazí na 0? jen 0, proto $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

$\operatorname{Im} f$ - jaké obrazy mohu dostat, když budu zobrazovat čísla z $\mathbb{R}$?
Zase všechna čísla z $\mathbb{R}$, proto $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

Př Určete jádro a obraz lin. zobrazení $f(x) = 0$.

$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}$
$\operatorname{Im} f = \{0\}$