Převod matice lineárního zobrazení (vynecháme, nebudu po vás chtít)

$f: U \to V$ na U: stará báze e, nová báze e' — matice přechodu $e \to e' = Q_1$

na V: stará báze f, nová báze f' — matice přechodu $f \to f' = Q_2$

Potom matici A převedeme: $A' = Q_2^{-1} \cdot A \cdot Q_1$

(Př) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

na $\mathbb{R}^3$: $e = ((-1,0,1),(2,1,0),(0,1,-1))$, $e' = ((0,1,2),(3,5,0),(0,0,1))$

na $\mathbb{R}^2$: $f = ((1,-1),(0,1))$, $f' = ((-1,0),(2,2))$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{51}{5} & \frac{21}{5} & \frac{42}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{19}{10} & \frac{33}{10} \end{pmatrix}$$

Vlastní hodnoty a vlastní vektory

budeme pracovat s lineárními transformacemi, tj. lineárními zobr. $U \to U$

(tzn. matice A je čtvercová)

Def: Vektor $u \in U$ je vlastní vektor lin. transformace $f: U \to U$, když platí $f(u) = \lambda \cdot u$ pro nějaký skalár λ.

Skalár λ se nazývá vlastní hodnota vl. vektoru u.

(Př) $f(x) = 5x$ $\quad f(u) = \lambda \cdot u$

$5u = \lambda \cdot u \Rightarrow \lambda = 5$

$\Rightarrow$ všechny vektory jsou vlastní (i nulový vektor) s vlastní hodnotou $\lambda = 5$.

Jak najdeme vl. hodnoty a vektory u zobr. zadaného maticí?

chceme $f(u) = \lambda \cdot u$

$A \cdot u = \lambda \cdot u$

$(A - \lambda E)u = 0$ a dořešíme

Frobeniova věta

$(A - \lambda E)u = 0 \iff \det(A - \lambda E) = 0$

(Př) Najděte vl. hodnoty a vektory transformace $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = 0$

$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)$

det se má rovnat nule: $(1-\lambda)(4-\lambda) = 0$

2 vl. hodnoty: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$

dopočítáme vl. vektory: $\lambda_1 = 1$: $(A - \lambda E)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0u_1 + 2u_2 = 0$

$0u_1 + 3u_2 = 0$

$u_2 = 0$, u_1 může být libovolné

$u \in [[(1,0)]]$

stejně dopočítáme pro $\lambda_2 = 4$: $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$