4. Mohutnosti

Velmi důležitou relaci ekvivalence představuje ekvivalence $\sim$, kdy dvě množiny A, B považujeme za ekvivalentní právě tehdy, když existuje bijekce $A \longrightarrow B$. Konečné množiny jsou ekvivalentní právě tehdy, když mají stejný počet prvků (dokažte). Ekvivelence je zobecnění "rovnosti počtu prvků" na obecné množiny.

Cvičení. Ukažte, že právě definovaná relace $\sim$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Cvičení. Ukažte, že pro libovolnou množinu A platí $A \times A \sim A^2$. (A^2 je množina všech zobrazení z dvouprvkové množiny $2 = \{0, 1\}$ do A.

Důležitý příklad ekvivalence poskytuje následující tvrzení.

4.1. Tvrzení. *Je-li X množina, pak*

$$\wp X \sim 2^X,$$

tj. existuje bijekce mezi množinou $\wp X$ všech podmnožin v X a množinou všech zobrazení z X do dvouprvkové množiny.

Důkaz. Bijekcí je zobrazení $\wp X \longrightarrow 2^X$, které dané podmnožině $A \subseteq X$ přiřadí zobrazení $f_A : X \longrightarrow 2^X$, definované předpisem

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x \in A, \\ 0, & \text{jestliže } x \notin A. \end{cases}$$

Inverzní bijekcí $2^X \longrightarrow \wp X$ je zobrazení, které zobrazení $f : X \longrightarrow 2^X$ přiřadí vzor $f^{-1}\{1\}$ jedničky.

O ekvivalentních množinách pravíme, že mají stejnou *mohutnost*. Nic nám nebrání zavést nějaké symboly pro jednotlivé mohutnosti. Obecně se takové symboly nazývají *kardinální čísla*.

Nabízí se myšlenka definovat mohutnosti jako třídy rozkladu $\mathcal{U}/\sim$ podle ekvivalence $\sim$. Prvky rozkladu $\mathcal{U}/\sim$, tj. třídy ekvivalence $\sim$, jsou však vesměs vlastní třídy, a proto nemohou být prvky jiných tříd. To je další drobný nedostatek zvolené axiomatizace, který se však dá snadno obejít.

Mohutnost množiny A značíme $\#A$. Podle definice

$$\#A = \#B \Leftrightarrow A \sim B.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, množiny ekvivalentní s množinou $n = \{0, \ldots, n-1\}$ (ekvivalentně, množiny o n prvcích), nazýváme *n-prvkové množiny*. Třída n-prvkových množin budiž označena $\mathcal{U}_n$. Za příslušné kardinální číslo volíme prostě $n \in \mathbb{N}$, to jest, $\#n = n$.

Množiny náležející sjednocení

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$$

se nazývají *konečné množiny*. Množinu $\mathbb{N}$ ztotožňujeme s množinou *konečných mohutností*. Ostatní mohutnosti se nazývají *nekonečné mohutnosti*.

Množiny ekvivalentní s množinou $\mathbb{N}$ se nazývají *spočetné množiny*. Spočetná mohutnost se označuje symbolem $\aleph_0$ ($\aleph$ je první písmeno hebrejské abecedy a čte se *alef*). Máme tedy $\#\mathbb{N} = \aleph_0$. Ještě se dočkáme nekonečně mnoha dalších alefů (dokonce budou tvořit vlastní třídu) a každá nekonečná mohutnost bude některým alefem.

Příklad. Se spočetnými množinami jste se již seznámili v přednášce z matematické analýzy. Měli byste (nalezením příslušné bijekce) umět ověřit, že

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}.$$

Návod: Uspořádejte celá resp. racionální čísla do posloupnosti
Z výsledku plyne, že $\#\mathbb{Z} = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#\mathbb{Q} = \aleph_0$.

Mohutnost množiny reálných čísel se nazývá *mohutnost kontinua*. Budeme se jí podrobně zabývat později.

Zatím nemůžeme definovat třídu kardinálních čísel. Tento nedostatek napravíme později. Předesíláme, že kardinální čísla tvoří vlastní třídu.

4.1. Aritmetika kardinálních čísel

Nyní zavedeme sčítání, násobení a umocňování kardinálních čísel, které bude zobecněním obdobných aritmetických operací s přirozenými čísly. Budeme k tomu potřebovat další výsledky o množinách.

Při sčítání mohutností se používá disjunktní sjednocení množin.

4.2. Definice. Buďte A, B dvě množiny. Množina $(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ se nazývá *disjunktní sjednocení* množin A, B a značí se $A \sqcup B$.

Snadno se vidí, že množiny $\{0\} \times A$ a $\{1\} \times B$ nemají žádné společné prvky (proč?) a v tom spočívá smysl této konstrukce. K dispozici je i obecnější definice, která má podobnou podstatu.

4.3. Definice. Buď $F : I \longrightarrow \mathcal{U}$ systém množin. Jeho *disjunktní sjednocení* definujeme jako sjednocení

$$\bigsqcup_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times F_i).$$

Podobně platí, že i sjednocované množiny $\{i\} \times F_i$ nemají žádné společné prvky (proč?) a opět v tom spočívá smysl této konstrukce.

4.4. Tvrzení. 1°. *Buďte A, B dvě disjunktní množiny. Pak $A \cup B \sim A \sqcup B$.*

2°. *Buď $F : I \longrightarrow \mathcal{U}$ systém množin po dvou disjunktních, čili takových, že $U_i \cap U_j = \emptyset$, kdykoliv $i \neq j \in I$. Pak $\bigcup_{i \in I} F_i \sim \bigsqcup_{i \in I} F_i$.*

Důkaz. 1°. Zadejme zobrazení $h : A \cup B \longrightarrow A \sqcup B$ předpisem

$$h(x) = \begin{cases} [0, x], & \text{když } x \in A, \\ [1, x], & \text{když } x \in B. \end{cases}$$

Ukažte jako cvičení, že h je bijekce. 2°. Analogicky.

Při násobení mohutností se používá kartézský součin množin, který už známe z dřívějška.

Důkaz. Cvičení.

4.5. Tvrzení. *Buďte $A \sim A'$ dvě ekvivalentní množiny a $B \sim B'$ jiné dvě ekvivalentní množiny. Pak*

1° $A \sqcup B \sim A' \sqcup B'$,

2° $A \times B \sim A' \times B'$,

3° $B^A \sim B'^{A'}$

jsou ekvivalentní množiny.

Důkaz. Buďte $g_A : A \longrightarrow A'$ a $g_B : B \longrightarrow B'$ bijekce.
1° : Zaveďme zobrazení

$$g_A \sqcup g_B : A \sqcup B \longrightarrow A' \sqcup B'$$

předpisem

$$(g_A \sqcup f_B)(x) = \begin{cases} [0, g_A(a)], & \text{když } x = [0, a] \in \{0\} \times A, \\ [1, g_B(b)], & \text{když } x = [1, b] \in \{1\} \times B. \end{cases}$$

Snadno se ukáže, že $g_A \sqcup g_B$ je bijekce s inverzí ${g_A}^{-1} \sqcup {g_B}^{-1}$. Tudíž, $A \sqcup B$ a $A' \sqcup B'$ jsou ekvivalentní.
2° : Zaveďme zobrazení

$$g_A \times g_B : A \times B \longrightarrow A' \times B'$$

předpisem

$$(g_A \times g_B)(a, b) = [g_A(a), g_B(b)].$$

Snadno se ukáže, že $g_A \times g_B$ je bijekce s inverzí ${g_A}^{-1} \times {g_B}^{-1}$. Tudíž, $A \times B$ a $A' \times B'$ jsou ekvivalentní.
3° . Zobrazení $B^A \longrightarrow B'^{A'}$, $f \longmapsto g_B \circ f \circ g_A^{-1}$, má inverzi $B'^{A'} \longrightarrow B^A$, $h \longmapsto g_B^{-1} \circ h \circ g_A$, a proto je bijektivní. Tudíž, B^A a $B'^{A'}$ jsou ekvivalentní.

V důsledku posledního tvrzení můžeme zavést sčítání, násobení a umocňování kardinálních čísel předpisy

1° $\#A + \#B = \#(A \sqcup B)$,

2° $\#A \times \#B = \#(A \times B)$,

3° $(\#B)^{(\#A)} = \#(B^A)$.

Jinak řečeno, k daným mohutnostem libovolně vybereme množiny, které je reprezentují, provedeme s nimi odpovídající množinovou operaci a zjistíme mohutnost výsledku.

Cvičení. Přesvědčte se, že $1 + 1 = 2$, $1 \times 2 = 2$, $1^2 = 1$, $2^1 = 2$.

Cvičení. Ukažte, že $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2 = \cdots = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
Návod: Uspořádávání do posloupnosti.

Cvičení. Ukažte, že ${\aleph_0}^2 = {\aleph_0}^3 = \cdots = \aleph_0$. (Pozor, ${\aleph_0}^{\aleph_0} = \aleph_0$ neplatí!)
Návod: Uspořádávání do posloupnosti.

Pro operace s kardinálními čísly platí obvyklé zákony aritmetiky.

4.6. Tvrzení. *Buďte* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *libovolné mohutnosti. Pak*

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a},\\
&0 + \mathfrak{a} = a,\\
&(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}),\\
&\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a},\\
&1 \times \mathfrak{a} = a,\\
&(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}),\\
&\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c},\\
&0 \times \mathfrak{a} = 0,\\
&\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \times \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}},\\
&\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}},\\
&(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \times \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}},\\
&\mathfrak{a}^0 = 1,\\
&\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}.
\end{aligned}
$$

Důkaz. Cvičení. Nalezněte potřebné bijekce.

Cvičení. Ukažte, že pro každou mohutnost $\mathfrak{m}$ platí $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = 2 \times \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$.

4.2. Uspořádání mohutností

Řekneme, že mohutnost $\mathfrak{a}$ je menší nebo rovna mohutnosti $\mathfrak{b}$, a zapisujeme $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, jestliže existuje injektivní zobrazení $A \longrightarrow B$ takové, že $\mathfrak{a} = \#A$ a $\mathfrak{b} = \#B$. Injektivní zobrazení existuje nebo neexistuje nezávisle na volbě reprezentantů A, B. S trochou velkorysosti dostáváme relaci $\leq$ mezi kardinálními čísly (odhlédneme-li od toho, že zatím neumíme definovat třídu kardinálních čísel).

Relace $\leq$ je zřejmě reflexivní (skrze identické zobrazení) a tranzitivní (skrze skládání injektivních zobrazení). Cantor–Bernsteinova věta praví, že relace $\leq$ je i antisymetrická. Jde o netriviální tvrzení.

Pokud jste zapomněli, co je antisymetrie, odskočte níže na definici 4.11 a zase se vraťte.

4.7. Cantor–Bernsteinova věta. *Jestliže* $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ *a zároveň* $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$*, pak* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{a} = \#A$ a $\mathfrak{b} = \#B$. Podle předpokladu existují injektivní zobrazení $f : A \longrightarrow B$ a $g : B \longrightarrow A$. Konstruujme bijektivní zobrazení $A \longrightarrow B$. Označme

$$
\begin{aligned}
&A_0 = A, && B_0 = B,\\
&A_1 = gB_0, && B_1 = fA_0,\\
&A_2 = gB_1, && B_2 = fA_1,\\
&A_3 = gB_2, && B_3 = fA_2,\\
&A_4 = gB_3, && B_4 = fA_3,\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

a obecně $A_{i+1} = gB_i$, $B_{i+1} = fA_i$ pro každé přirozené číslo i. Přitom

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots,$$
$$B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots,$$

Dále g dává bijekci $B_i \to A_{i+1}$ a f dává bijekci $A_i \to B_{i+1}$. Tudíž, $g|_{B_{i-1}\setminus B_i}$ je bijekce

$$B_{i-1} \setminus B_i \to A_i \setminus A_{i+1}$$

a podobně $f|_{A_{i-1}\setminus A_i}$ je bijekce

$$A_{i-1} \setminus A_i \to B_i \setminus B_{i+1}.$$

Složením dostáváme bijekce

$$A_0 \setminus A_1 \to B_1 \setminus B_2 \to A_2 \setminus A_3 \to B_3 \setminus B_4 \to \cdots$$

zprostředkované zobrazením f a bijekce

$$B_0 \setminus B_1 \to A_1 \setminus A_2 \to B_2 \setminus B_3 \to A_3 \setminus A_4 \to \cdots$$

zprostředkované zobrazením g. Z nich je možné sestavit bijekce mezi sjednoceními

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{2i} \setminus A_{2i+1} \longleftrightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}$$

a rovněž mezi sjednoceními

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{2i} \setminus B_{2i+1} \longleftrightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{2i+1} \setminus A_{2i+2}.$$

Celkově je tím nalezena bijekce mezi podmnožinami

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \setminus B_{i+1} \longleftrightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \setminus A_{i+1}.$$

Podmnožina $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \setminus B_{i+1}$ resp. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \setminus A_{i+1}$ ovšem není rovna celému A resp. B. Nicméně,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \setminus A_{i+1} = A \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i, \qquad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \setminus B_{i+1} = B \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i.$$

Inkluze $\subseteq$ plyne z inkluzí $A_i \setminus A_{i+1} \subseteq A \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ pro každé i; podobně pro B. Opačnou inkluzi $\supseteq$ dokážeme úvahou, že pro libovolný prvek $a \in A \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ existuje nejmenší i takové, že $a \notin A_{i+1}$, načež $a \in A_i \setminus A_{i+1}$.

Tudíž, zatím jsme našli bijekci

$$A \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \longleftrightarrow B \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$$

a ještě zbývá zkonstruovat bijekci mezi průniky $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ a $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$. To lze provést například následujícím způsobem:

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{2i} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (g\circ f)^i A \xleftrightarrow{f} \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f(g\circ f)^i A$$
$$= \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (f\circ g)^i fA = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_{2i+1} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i.$$

Důkaz je hotov.