Cvičení. Ukažte, že pro každou mohutnost $\mathfrak{m}$ platí $1^{\mathfrak{m}} = 1$, $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = 2 \times \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$. A pokud $\mathfrak{m} \neq 0$, pak $0^{\mathfrak{m}} = 0$.

Operace s kardinálními čísly mají i analogie pro systémy kardinálních čísel.

4.6. Definice. Buď $\{F_i\}_{i \in I}$ systém množin. Jeho *disjunktní sjednocení* definujeme jako sjednocení

$$\bigsqcup_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times F_i).$$

Podobně jako u binární operace $\sqcup$ platí, že sjednocované množiny $\{i\} \times F_i$ nemají žádné společné prvky (proč?) a opět v tom spočívá smysl této konstrukce.

4.7. Tvrzení. *Buď $\{F_i\}_{i \in I}$ systém množin po dvou disjunktních, čili takových, že $F_i \cap F_j = \emptyset$, kdykoliv $i \neq j \in I$. Pak $\bigcup_{i \in I} F_i \sim \bigsqcup_{i \in I} F_i$.*

Důkaz. Zadejme zobrazení $h : \bigcup_{i \in I} F_i \to \bigsqcup_{i \in I} F_i$ předpisem

$$h(x) = [i, x], \quad \text{když } x \in F_i.$$

Ukažte jako cvičení, že h je bijekce.

4.8. Tvrzení. *Buďte $F_i \sim F'_i$ systémy ekvivalentních množin. Pak*

1° $$\bigsqcup_{i \in I} F_i \sim \bigsqcup_{i \in I} F'_i,$$

2° $$\prod_{i \in I} F_i \sim \prod_{i \in I} F'_i$$

jsou ekvivalentní množiny.

Důkaz. Buďte $g_i : F_i \to F'_i$ bijekce.
1° : Zaveďme zobrazení

$$\bigsqcup_{i \in I} g_i : \bigsqcup_{i \in I} F_i \to \bigsqcup_{i \in I} F'_i$$

předpisem

$$\left(\bigsqcup_{i \in I} g_i\right)(x) = [i, g_i(f)], \quad \text{když } x = [i, f] \in \{i\} \times F_i$$

Snadno se ukáže, že $\bigsqcup_{i \in I} g_i$ je bijekce s inverzí $\bigsqcup_{i \in I} g_i^{-1}$. Odtud tvrzení.
2° : Zaveďme zobrazení

$$\prod_{i \in I} g_i : \prod_{i \in I} F_i \to \prod_{i \in I} F'_i$$

předpisem

$$\left(\prod_{i \in I} g_i\right)([f_i]_{i \in I}) = [g_i(f_i)]_{i \in I}.$$

Snadno se ukáže, že $\prod_{i \in I} g_i$ je bijekce s inverzí $\prod_{i \in I} g_i^{-1}$. Odtud tvrzení.

Při troše velkorysosti můžeme se systémem $\{F_i\}_{i\in I}$ spojit systém kardinálních čísel $\mathfrak{f}_i = \#F_i$ (ignorujeme fakt, že dosud nemáme třídu kardinálních čísel). Díky právě dokázanému tvrzení lze definovat součet a součin systému kardinálních čísel předpisem

$$\sum_{i\in I}\mathfrak{f}_i = \#\bigcup_{i\in I}F_i,$$

$$\prod_{i\in I}\mathfrak{f}_i = \#\prod_{i\in I}F_i.$$

Jde o přímá zobecnění výše definovaných binárních operací '+' a '×' (ty dostáváme pro dvouprvkové systémy množin).

Platí analogie formulí z tvrzení 4.5, zejména

$$\mathfrak{a}\times\sum_{i\in I}\mathfrak{b}_i = \sum_{i\in I}\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}_i,$$

$$\mathfrak{a}^{\sum_{i\in I}\mathfrak{b}_i} = \prod_{i\in I}\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_i},$$

$$\left(\prod_{i\in I}\mathfrak{a}_i\right)^{\mathfrak{b}} = \prod_{i\in I}\mathfrak{a}_i^{\mathfrak{b}},$$

Dokažte je jako cvičení.

Analogií komutativního a asociativního zákona je, že se v definici neuplatňuje žádné uspořádání indexové množiny.

Cvičení. Ukažte, že

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}2 = \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}}\aleph_0 = \aleph_0$$

a obecně

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{m} = \aleph_0\times\mathfrak{m}.$$