4.10. Tvrzení. *Nechť* $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ *jsou mohutnosti takové, že* $\mathfrak{a} \le \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} \le \mathfrak{b}'$. *Pak*

1° $\quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \le \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$,

2° $\quad \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \le \mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}'$,

3° $\quad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \le \mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}'}$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{a} = \#A$, $\mathfrak{a}' = \#A'$, $\mathfrak{b} = \#B$, $\mathfrak{b}' = \#B'$. Podle předpokladu existují injektivní zobrazení $f : A \to A'$, $g : B \to B'$. Snadno se ukáže, že zobrazení $f \sqcup g$ a $f \times g$ zkonstruovaná v částech 1° a 2° důkazu tvrzení 4.8 jsou injektivní (proveďte podrobně sami).

V případě 3° je potřeba zkonstruovat injektivní zobrazení $A^B \to A'^{B'}$. Buď $h : B \to A$ libovolné zobrazení. Z injektivity zobrazení $g : B \to B'$ plyne, že existuje zobrazení $\bar{h} : B' \to A$ takové, že $\bar{h} \circ g = h$ (proč?). Pak je kompozice $h' = f \circ \bar{h}$ hledané zobrazení $B' \to A'$.

Dokažme injektivitu přiřazení $h \mapsto h'$. Nechť jsou dvěma zobrazením $h_1, h_2 : B \to A$ přiřazena stejná zobrazení $h_1' = h_2' : B' \to A'$. Pak $f \circ h_1' \circ g = f \circ h_2' \circ g$, čili $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Jelikož je f injektivní, smíme jím krátit zleva, načež $h_1 = h_2$ a důkaz je hotov.

Cvičení. Proč se v případě 3° nedá použít konstrukce z důkazu tvrzení 4.8?

Klasický Dirichletův princip praví, že pro žádné přirozené číslo n neexistuje injektivní zobrazení $n + 1 \to n$. Dokážeme jej jako součást obecnějšího tvrzení.

4.11. Dirichletův princip. *Platí*

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \aleph_0.$$

Důkaz. Připomeňme, že $n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Neostré nerovnosti $\le$ plynou z existence injektivních vložení

$$\emptyset \to \{0\} \to \{0,1\} \to \{0,1,2\} \to \cdots \to \mathbb{N}.$$

Nerovnosti $n + 1 \ne n$ bezprostředně vyplývají z klasického Dirichletova principu. Důkaz Dirichletova principu povedeme indukcí. Označme D_n tvrzení: "Pro $n \in \mathbb{N}$ neexistuje injektivní zobrazení $n + 1 \to n$." Tvrzení D_0 zřejmě platí (proč?). Nechť D_n platí pro pro některé n, dokažme platnost D_{n+1}. Důkaz povedeme sporem. Připusťme tedy, že existuje injektivní zobrazení $f : n+2 \to n+1$. Připomeňme, že $n+2 = \{0, 1, 2, \dots, n+1\}$. Prvek $f(n+1) \in n+1$ není obrazem žádného jiného prvku z $n + 2$, jak plyne z injektivity. Pak je dobře definována restrikce $f|_{n+1} : n+1 \to n+1 \setminus \{f(n+1)\}$ a je rovněž injektivní. Avšak $n+1 \setminus \{f(n+1)\} \sim n$ (zkonstruujte bijekci), takže jsme obdrželi injektivní zobrazení $n + 1 \to n$, což je ve sporu s D_n.

Zbývá dokázat nerovnost $n < \aleph_0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Označme D_n tvrzení: "Pro přirozené číslo n neexistuje injektivní zobrazení $\mathbb{N} \to n$." Důkaz indukcí proveďte jako cvičení (princip je podobný, opět je nutno z injektivního zobrazení $\mathbb{N} \to n + 1$ vyčlenit injektivní zobrazení $\mathbb{N} \to n$).

4.12. Tvrzení. *Jestliže* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, *pak* $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$. Zřejmě $\mathfrak{a} \le \mathfrak{c}$ (složení injektivních zobrazení je injektivní). Připusťme, že $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. Pak $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ a z Cantor–Bernsteinovy věty plyne, že $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, spor.

4.13. Cantorova věta. *Pro každou mohutnost* $\mathfrak{a}$ *platí* $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{a} = \#A$. Injektivní zobrazení $A \to \wp A$ je například $a \mapsto \{a\}$. Odtud $A \preceq \wp A$, a tedy $\mathfrak{a} \leq 2^{\mathfrak{a}}$.

Připusťme, že $A \sim \wp A$. Nechť $F : A \to \wp A$ je bijektivní zobrazení. Označme

$$X = \{a \in A \mid a \notin F(a)\}.$$

Jelikož je F surjektivní, existuje $x \in A$ takové, že $F(x) = X$. Pak nastane právě jedna ze dvou možností.

1) $x \in X$, čili $x \in F(x)$, načež $x \notin X$ podle definice množiny X, spor;

2) $x \notin X$, čili $x \notin F(x)$, načež $x \in X$ podle definice množiny X, spor.

Tudíž, $A \not\sim \wp A$, a proto $\mathfrak{a} \neq 2^{\mathfrak{a}}$.

4.14. Důsledek. *Ke každému kardinálnímu číslu existuje větší kardinální číslo.*

Poznamenejme, že zatím neumíme odpovědět na otázku, zda existují nesrovnatelné mohutnosti, tj. mohutnosti $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, pro něž nenastává žádná z možností $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$. Odpověď je záporná (neexistují), ale vyžaduje větší úsilí. Odložíme ji do jedné z dalších kapitol spolu s tzv. pohlcovacími zákony, které umožňují stanovovat součty a součiny libovolných mohutností bez zdlouhavého počítání. Mezitím se budeme věnovat dalším mohutnostem, které mají uplatnění v matematické analýze.

4.3. Mohutnost kontinua

Mohutnost $2^{\aleph_0}$, o níž zatím víme jen tolik, že je nespočetná (ostře větší než $\aleph_0$, podle Cantorovy věty), se nazývá *mohutnost kontinua*. Značí se $\mathfrak{c}$. Pojmenování pochází z názvu "kontinuum" pro množinu reálných čísel.

4.15. Tvrzení. *Platí* $\mathfrak{c} = \#\mathbb{R}$.

Důkaz. 1) Nerovnost $\mathfrak{c} \leq \#\mathbb{R}$ dokážeme konstrukcí injektivního zobrazení $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. Zobrazení $\mathbb{N} \to 2$ je totéž, co posloupnost $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ nul a jedniček, $a_n \in \{0, 1\}$. Takové posloupnosti můžeme přiřadit třeba reálné číslo s desetinným rozvojem

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 10^n = 0, a_0 a_1 a_2 \ldots$$

Přiřazení je injektivní, protože různým posloupnostem odpovídají různá reálná čísla (problematická splynutí jako např. $1 = 0,999\ldots$ se nevyskytnou díky tomu, že jsme zvolili číselnou soustavu se základem $10 \neq 2$).

2) Nerovnost $\#\mathbb{R} \leq \mathfrak{c}$ dokážeme konstrukcí injektivního zobrazení $\mathbb{R} \to 2^{\mathbb{Q}}$ (racionálních čísel je též spočetně mnoho). Přiřazení budiž

$$r \mapsto \mathbb{Q}_{<r} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}.$$

Důkaz injektivity: Nechť jsou $r_1 < r_2$ různá reálná čísla. Pak $\mathbb{Q}_{<r_1} \neq \mathbb{Q}_{<r_2}$, protože existuje racionální číslo $r_1 < q < r_2$ a toto číslo q náleží $\mathbb{Q}_{<r_2}$ a nenáleží $\mathbb{Q}_{<r_1}$.

Důkaz je hotov.

Stejně tak mají mohutnost kontinua intervaly $\mathrm{I}(a, b)$, $\mathrm{I}(a, b]$, $\mathrm{I}[a, b)$, $\mathrm{I}[a, b]$, kde $a < b$ jsou reálná čísla (pro jednoznačnost používáme značení obvyklé v analýze, ale s předsunutým písmenem I). Stačí si všimnout, že pro ně prochází již provedený důkaz rovnosti $\mathfrak{c} = \#\mathbb{R}$

jen s malou modifikací nahrazující injektivní zobrazení $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ injektivním zobrazením $2^{\mathbb{N}} \to \mathrm{I}(a,b)$ (jakým?). Potažmo i do zbývajících intervalů $\mathrm{I}(a,b]$, $\mathrm{I}[a,b)$, $\mathrm{I}[a,b]$.

Z Cantor–Bernstainovy věty vyplývá, že existují bijekce mezi množinami $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$, $\mathrm{I}(a,b)$, $\mathrm{I}(a,b]$, $\mathrm{I}[a,b)$, $\mathrm{I}[a,b]$. Z důkazu Cantor–Bernstainovy věty pak také vyplývá návod, jak by bylo možné ony bijekce sestavit, ale je zřejmé, že konstrukce by byly značně komplikované. V sadě následujících cvičení ukážeme, jak takové bijekce sestrojit snáze.

Cvičení. Najděte bijekci mezi $\mathrm{I}(0,1)$ a $\mathbb{R}$.
Návod: kompozice tg a lineární funkce.

Cvičení. Najděte bijekci mezi $\mathrm{I}(0,1)$ a $\mathrm{I}(0,1]$.
Návod: Oba intervaly rozložte na sjednocení spočetně mnoha jednobodových množin a spočetně mnoha otevřených intervalů, např.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(0,1) &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left\{\frac{1}{2^n}\right\} \quad \cup \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{I}\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right),\\ \mathrm{I}(0,1] &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{2^n}\right\} \quad \cup \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{I}\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Cvičení. Najděte bijekci mezi $\mathrm{I}(0,1]$ a $\mathrm{I}[0,1]$.
Návod: Upravte kontrukci z předchozího cvičení.

Cvičení. Ukažte, že

$$\begin{aligned}\mathfrak{c} &= \mathfrak{c}+1 = \mathfrak{c}+2 = \cdots = \mathfrak{c}+\aleph_0 = \mathfrak{c}+\mathfrak{c} = \mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\mathfrak{c} = \cdots = \aleph_0 \times \mathfrak{c}\\ &= \mathfrak{c}\times\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\times\mathfrak{c}\times\mathfrak{c} = \cdots = \mathfrak{c}^{\aleph_0}.\end{aligned}$$

Cvičení. Ukažte, že $\#\mathbb{C} = \mathfrak{c}$.

Cvičení. Ukažte, že množina všech spojitých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má mohutnost kontinua.
Návod: Spojitá funkce je určena svými hodnotami na racionálních číslech.

Příklad. **Cantorovo diskontinuum** V první části důkazu věty 4.15 jsme sestrojili injektivní zobrazení $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. Posloupnosti $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ nul a jedniček jsme přiřadili reálné číslo s desetinným rozvojem

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 10^n = 0,a_0a_1a_2\ldots$$

Obrazem tohoto zobrazení je podmnožina v $\mathbb{R}$, která se nazývá Cantorovo diskontinuum. Můžeme ji popsat jako množinu všech reálných čísel z intervalu $\mathrm{I}[0,1]$, jejichž desetinný rozvoj obsahuje jen nuly a jedničky (včetně rozvojů s nekonečně mnoha po sobě jdoucími jedničkami). Stejnou množinu dostaneme tak, že z intervalu $\mathrm{I}[0,1]$ vyloučíme otevřený interval $\mathrm{I}(\frac{1}{10},\frac{9}{10})$, tedy prostředních osm desetin, což opakujeme do nekonečna. Jak se dá ukázat, z jednotkového intervalu takto vyloučíme intervaly v celkové délce 1. Přesto má Cantorovo diskontinuum mohutnost kontinua.

Cvičení. Dokažte tvrzení uvedená v předchozím příkladu.

4.4. Cantorův důkaz existence transcendentních čísel

V Cantorově době byla známa jen jednotlivá transcendentní čísla, přičemž množina transcendentních čísel není dodnes úplně prozkoumána. Cantor překvapivě snadno dokázal, že transcendentních čísel je nekonečně mnoho.

Připomeňme definice. Algebraickým číslem se rozumí komplexní číslo, které je kořenem nenulového polynomu s racionálními koeficienty. Transcendentním číslem se rozumí komplexní číslo, které není algebraické.

4.16. Tvrzení. *Mohutnost množiny algebraickcýh čísel je* $\aleph_0$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{A}$ je množina všech algebraických čísel.

1) $\aleph_0 \leq \#\mathfrak{A}$, protože každé racionální číslo je algebraické (proč?).

2) Ukažme, že $\#\mathfrak{A} \leq \aleph_0$. Množinu algebraických čísel vyjádříme jako sjednocení

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n,$$

kde n je stupeň příslušného minimálního polynomu (minimální polynom algebraického čísla a je polynom minimálního stupně mezi polynomy s racionálními koeficienty a kořenem a). Mohutnost množiny $\mathfrak{A}_n$ je $n \times \#\mathbb{Q}^n = n \times {\aleph_0}^n = \aleph_0$ (proč?). Dostáváme tedy

$$\#\mathfrak{A} \leq \# \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \#\mathfrak{A}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

Důkaz je hotov.

4.17. Důsledek. *Mohutnost množiny transcendentních čísel je* $\mathfrak{c}$.

4.5. Další mohutnosti matematické analýzy

Již jsme se zmínili, že existuje nekonečně mnoho (dokonce vlastní třída) nekonečných mohutností. Kromě alefů $\aleph$, které patří k poměrně obtížným pojmům, existuje nekonečná řada mohutností $\beth$ (beth, druhé písmeno hebrejské abecedy), které jsou mohutnostmi množin hojných v analýze.

Pro přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ definujme $\beth_n$ rekurzivním předpisem

$$\beth_0 = \aleph_0, \quad \beth_{n+1} = 2^{\beth_n}.$$

Podle Cantorovy věty zřejmě $\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \cdots$. Máme

$$\beth_1 = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}, \quad \beth_2 = 2^{\beth_1} = 2^{\mathfrak{c}}, \quad \beth_3 = 2^{\beth_2} = 2^{2^{\mathfrak{c}}}, \quad \ldots$$

a také

$$\beth_0 = \#\mathbb{N}, \quad \beth_1 = \#\wp\mathbb{N}, \quad \beth_2 = \#\wp\wp\mathbb{N}, \quad \beth_3 = \#\wp\wp\wp\mathbb{N}, \quad \ldots$$

Cvičení. Ukažte, že mohutnost $\beth_2$ mají množiny

1) $\wp\mathbb{R}$ všech podmnožin množiny reálných čísel;
2) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všech reálných funkcí jedné reálné proměnné;
3) $\sum_{n\in N} \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$ všech reálných funkcí konečně mnoha reálných proměnných.