6. Ordinální čísla

O izomorfních uspořádaných množinách říkáme, že mají stejný *ordinální typ*. Ordinální čísla můžeme definovat jako ordinální typy dobře uspořádaných množin. Znamená to, že dvě ordinální čísla jsou si rovna, právě když jsou ordinálními typy izomorfních dobře uspořádaných množin. Pro ordinální typy zavedeme zvláštní symboly. Podobným způsobem jsme zavedli kardinální čísla, jen místo bijekcí mezi množinami rozhodují izomorfismy dobře uspořádaných množin.

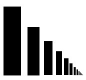
Izomorfismus uspořádaných množin je bijekce, a proto mají izomorfní uspořádané množiny stejnou mohutnost. Odtud plyne, že každé ordinální číslo má určitou mohutnost, přičemž může existovat více různých ordinálních čísel stejné mohutnosti.

Podobně jako u mohutností taková definice neumožňuje utvořit třídu ordinálních čísel. To nám dovolí až von Neumannova definice ordinálních čísel čili ordinálů, kterou uvedeme později. Není tak názorná jako definice pomocí ordinálních typů.

Příklady. 1. Každé přirozené číslo n označuje rovněž ordinální typ řetězce o n prvcích (již víme, že je dobře uspořádaný). Jeho diagram sestává z n bodů spojených úsečkami, např. $1, 2, 3$ mají po řadě diagramy

$$\circ, \quad \circ\!\!-\!\!\circ, \quad \circ\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\circ.$$

2. Symbolem ω se označuje ordinální typ množiny všech přirozených čísel uspořádaných podle velikosti (rovněž dobře uspořádaná množina). Výše jsme uvedli její diagram $\circ\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\cdots$. Jinou názornou ilustrací čísla ω je nekonečná řada objektů



táhnoucích se k obzoru.

6.1. Aritmetika ordinálních čísel

Podobně jako kardinální čísla, lze i ordinální čísla sečítat, násobit a umocňovat. Operace sčítání a násobení definujeme podobně jako stejnojmenné operace s kardinálními čísly, pouze je potřeba zařídit, aby disjunktní sjednocení a součiny dobře uspořádaných množin byly dobře uspořádané množiny. (Podobný postup není možný v případě umocňování.)

Upozorněme též, že operace s ordinálními čísly nejsou komutativní.

6.2. Sčítání ordinálních čísel

6.1. Definice. Buďte A, B dvě dobře uspořádané množiny. Množina $(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ s uspořádáním daným formulí

$$(i, a) \leq (j, b) \quad \Leftrightarrow \quad i < j \vee (i = j \wedge a \leq b)$$

se nazývá *disjunktní sjednocení dobře uspořádaných množin* nebo také *součet dobře uspořádaných množin* A, B a značí se $A \sqcup B$ nebo $A + B$.

Slovy: Prvky disjunktního sjednocení uspořádáme

1. podle prvních složek, přičemž $0 < 1$;
2. v případě rovnosti podle druhých složek, přičemž použijeme uspořádání z té množiny, kde se oba prvky nacházejí.

Nebo jinak: Prvky původem z A předcházejí všechny prvky původem z B, kdežto dvojice prvků původem z jedné a téže množiny jsou uspořádány stejně jako ve “své” množině.

Schematicky

$$\boxed{\mathrm{A}}\!-\!\boxed{\mathrm{B}}.$$

6.2. Definice. Buďte α, β po řadě ordinální typy dobře uspořádaných množin A, B. Součet $\alpha + \beta$ definujeme jako ordinální typ disjunktního sjednocení $A \sqcup B$.

Definice je korektní, protože jsou-li $A \cong A'$, $B \cong B'$ izomorfní dobře uspořádané množiny, pak jsou i $A \sqcup B$, $A' \sqcup B'$ izomorfní dobře uspořádané množiny. Ohledně izomorfismu se důkaz vede podobně jako ohledně ekvivakence množin (jsou-li f, g izomorfismy, je i $f \sqcup g$ izomorfismus). Ohledně dobrého uspořádání je důkaz proveden níže v zobecnění na systémy.

Příklad. Kolik je $1 + 2$? Máme

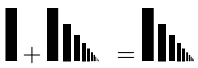
$$\circ \sqcup \circ\!-\!\circ = \boxed{\circ}\!-\!\boxed{\circ\!-\!\circ} = \circ\!-\!\circ\!-\!\circ,$$

a tedy $1 + 2 = 3$.

Příklad. Kolik je $1 + \omega$? Máme

$$\circ \sqcup \circ\!-\!\circ\!-\!\cdots = \boxed{\circ}\!-\!\boxed{\circ\!-\!\circ\!-\!\cdots} = \circ\!-\!\circ\!-\!\cdots = \omega$$

neboli



Tudíž, $1 + \omega = \omega$. Podobně $2 + \omega = \omega$, atd.

Příklad. Kolik je $\omega + 1$? Máme

$$\circ\!-\!\circ\!-\!\cdots \sqcup \circ = \boxed{\circ\!-\!\circ\!-\!\cdots}\!-\!\boxed{\circ} = \circ\!-\!\circ\!-\!\cdots\circ.$$

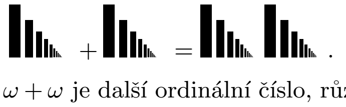
neboli

Vidíme, že $\omega + 1 \neq \omega$. Vskutku, v ω je jediný prvek, 0, který nemá přechůdce, kdežto v $\omega + 1$ jsou takové prvky dva. Podobně $\omega + 2 \neq \omega + 1$ (proč?), atd.

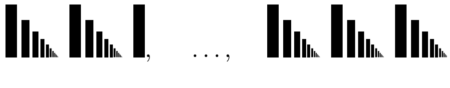
Příklad. Kolik je $\omega + \omega$? Máme

$$\begin{aligned} &\circ\!-\!\circ\!-\!\cdots \sqcup \circ\!-\!\circ\!-\!\cdots \\ &= \boxed{\circ\!-\!\circ\!-\!\cdots}\!-\!\boxed{\circ\!-\!\circ\!-\!\cdots} \\ &= \circ\!-\!\circ\!-\!\cdots\circ\!-\!\circ\!-\!\cdots \end{aligned}$$

neboli



Vidíme, že $\omega + \omega$ je další ordinální číslo, různé od již sestrojených. Podobně $\omega + \omega + 1, \ldots, \omega + \omega + \omega$ jsou po řadě



další nová ordinální čísla.

Shora uvedené příklady ukazují, že na rozdíl od sčítání kardinálních čísel není sčítání ordinálních čísel komutativní. Například $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$. Nicméně, sčítání ordinálních čísel je asociativní (ověřte jako cvičení).

Vyplatí se rovnou zavést i zobecnění na systémy. Dobře uspořádaný systém dobře uspořádaných množin je systém $\{A_i\}_{i \in I}$, kde jednotliví sčítanci A_i i indexová množina I jsou dobře uspořádáni. Disjunktní sjednocení

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i)$$

uspořádáme podle předpisu

$$(i, a_i) \leq (j, a_j) \quad \Leftrightarrow \quad i < j \vee (i = j \wedge a_i \leq a_j)$$

(zde $a_i \in A_i$ a $a_j \in A_j$).

Opět platí, že prvky disjunktního sjednocení uspořádáváme

1. podle prvních složek, přičemž přebíráme uspořádání z I;
2. v případě rovnosti podle druhých složek, přičemž použijeme uspořádání z té množiny, kde se oba prvky nacházejí.

Schematicky

$$\boxed{A_{i_1}} - \boxed{A_{i_2}} - \boxed{A_{i_3}} -,$$

přičemž jednotlivé “bloky” jsou uspořádány stejně jako jejich indexy v množině I.

Je zřejmé, že dříve zavedené disjunktní sjednocení dvou množin je speciální případ, kdy indexovou množinou je řetězec 0—1. Zobecnění na n-prvkový řetězec je zřejmé — obdržíme součet n množin.

6.3. Tvrzení. *Disjunktní sjednocení dobře uspořádaného systému dobře uspořádaných množin je dobře uspořádaná množina.*

Důkaz. Buď B neprázdná podmnožina v disjunktním sjednocení $\bigsqcup_{i \in I} A_i$. Nechť I_B je množina všech indexů i takových, že $B \cap A_i \neq \emptyset$. Zřejmě je $I_B \neq \emptyset$ neprázdná (proč?) podmnožina v dobře uspořádané množině I, takže má nejmenší prvek, což je podle definice nejmenší index i takový, že $B \cap A_i \neq \emptyset$. Pak je ovšem $B \cap A_i$ neprázdná podmnožina dobře uspořádané množiny A_i, takže má nejmenší prvek, který je současně nejmenším prvkem podmnožiny B (proč?).

6.4. Definice. Buďte α_i ordinální typy dobře uspořádaných množin A_i, $i \in I$, kde I je dobře uspořádaná. Součet $\sum_{i \in I} \alpha_i$ definujeme jako ordinální typ disjunktního sjednocení $\bigsqcup_{i \in I} A_i$.

Příklad. Máme

$$\sum_{i \in \omega} i = \omega,$$

jak je snadno vidět z diagramu

$$\boxed{\circ} - \boxed{\circ - \circ} - \boxed{\circ - \circ - \circ} - \cdots$$

6.3. Násobení ordinálních čísel

Jako další operaci zavedeme násobení, přičemž se ukáže, že v případě dvou operandů jde o speciální případ sčítání systému ordinálních čísel.

6.5. Definice. Buďte A, B dvě dobře uspořádané množiny. Množina $A \times B$ s uspořádáním daným formulí

$$(a, b) \leq (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a < a' \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

se nazývá *lexikografický součin dobře uspořádaných množin* nebo jen *součin dobře uspořádaných množin* A, B a značí se $A \times B$.

Slovy: Prvky součinu uspořádáme

1. podle prvních složek,
2. v případě rovnosti podle druhých složek.

Původ přívlastku "lexikografický" nalezneme ve slovníkovém uspořádání dvoupísmenných slov. Je to dobře patrné v níže uvedených příkladech.

Jinak: A krát B znamená, že prvky množiny A nahradíme kopiemi mnžiny B; v rámci jedné a téže kopie přebíráme uspořádání z B, zatímco mezi různými kopiemi přebíráme uspořádání z A. Schematicky

$$\underbrace{\boxed{B}-\boxed{B}-\boxed{B}-\cdots}_{A}$$

Z definic je patrné, že součin $A \times B$ není nic jiného, než disjunktní součet

$$A \times B = \bigsqcup_{A} B$$

systému sestávajícího z kopií množiny B, po jedné pro každý prvek z A, a proto je dobře uspořádaný.

Příklad. Počítejme 3×3. Máme

$$3 \times 3 = \begin{Bmatrix} [0,0] & [0,1] & [0,2] \\ [1,0] & [1,1] & [1,2] \\ [2,0] & [2,1] & [2,2] \end{Bmatrix}$$

s lexikografickým uspořádáním

$$[0,0] < [0,1] < [0,2] < [1,0] < [1,1] < [1,2] < [2,0] < [2,1] < [2,2].$$

Vidíme, že zároveň jde o disjunktní sjednocení

$$\boxed{[0,0]-[0,1]-[0,2]}-\boxed{[1,0]-[1,1]-[1,2]}-\boxed{[2,0]-[2,1]-[2,2]}.$$

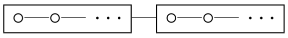
Jelikož součin dvou dobře uspořádaných množin je speciálním případem součtu systému množin, je dobře uspořádán. Můžeme pak pro ordinální čísla α, β, která jsou po řadě ordinálními typy množin A, B, definovat součin $\alpha\beta = \alpha \times \beta$ jako ordinální typ množiny $A \times B$. Čislo α se nazývá *násobitel* (multiplicator), číslo β *násobenec* (multiplicandus). Jelikož násobení není obecně komutativní, na pořadí záleží.

Pro zapamatování: Při zápisu "$\times$" násobíme v pořádí "kolikrát co," to jest, $\alpha \times \beta$ má význam "αkrát β."

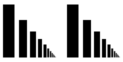
Obvyklejší je zápis součinu v převráceném pořadí jako $\beta \cdot \alpha = \alpha \times \beta$, což znamená, že násobíme v pořádí "co kolikrát," to jest, $\alpha \cdot \beta$ má význam "α βkrát." Důvody pro převrácený zápis uvedeme v souvislosti s umocňováním níže.

Pro zachování historické pravdy uveďme, že G. Cantor původně zavedl součin ekvivalentní součinu "$\times$" [v práci Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, *Mathematische Annalen* 21 (1883) 545–591 na str. 551], ale později přešel k převrácenému součinu.

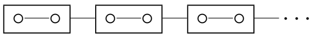
Příklad. Kolik je $2 \times \omega = \bigsqcup_2 \omega$? Dostáváme



což je $\omega + \omega$ neboli

 .

Pro srovnání, $\omega \times 2 = \bigsqcup_\omega 2$ je

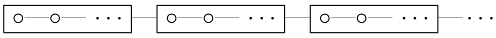


čili

○—○—○—○— ··· ,

což je ω. Vidíme, že $2 \times \omega \neq \omega = \omega \times 2$.

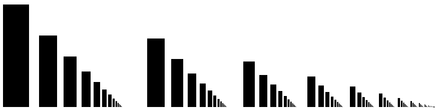
Příklad. Kolik je $\omega \times \omega = \bigsqcup_\omega \omega$? Dostáváme



čili

○—○— ··· ○—○— ··· ○—○— ··· ···

nebo názorněji



Může se psát i jako mocnina ω^2 (viz níže).