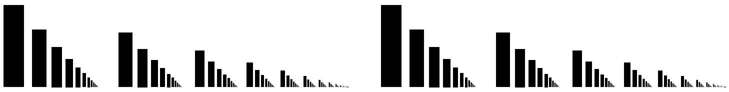
Stejný výsledek dostaneme, když v  nahradíme každý sloup celým sloupořadím.
Všimněte si, že ω prvků nemá předchůdce.

Cvičení. Kolik je $1 + \omega^2$? Kolik je $\omega + \omega^2$?

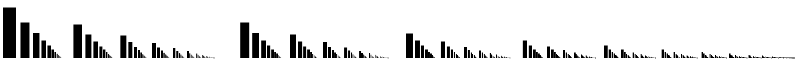
Cvičení. Ukažte, že každý prvek z ω^2 je tvaru $a_1\omega + a_0$, kde a_1, a_0 jsou přirozená čísla.
Návod: Viz předchozí obrázek.

Příklad. Dvojnásobek ordinálního čísla ω^2 je $2\omega^2 = 2 \times \omega^2$, což je



(dvě nekonečné řady nekonečných sloupořadí). Všimněte si, že 2ω prvků nemá předchůdce. Podobně trojnásobek atd.

Příklad. Co je ω^3? Definujeme jej jako ω-násobek ordinálního čísla ω^2 a znázorňuje jej diagram



(trojitě nekonečné sloupořadí). Stejný výsledek dostaneme, když v ω^2 nahradíme každý sloup sloupořadím, čili jako ω^2-násobek ordinálního čísla ω. Všimněte si, že ω^2 prvků nemá předchůdce.

Cvičení. Ukažte, že každý prvek z ω^3 je tvaru $a_2\omega^2 + a_1\omega + a_0$, kde a_2, a_1, a_0 jsou přirozená čísla.

Příklad. Analogicky ω^4 je

(čtyřnásobně nekonečné sloupořadí). Stejný výsledek dostaneme, když v ω^3 nahradíme každý sloup sloupořadím, čili jako ω^3-násobek ordinálního čísla ω. V tomto případě ω^3 prvků nemá předchůdce.

Cvičení. Zobrazte tento PDF soubor na monitoru a pozorujte obrázky při zvětšujícím se rozlišení.

Cvičení. Ukažte, že každý prvek z ω^4 je tvaru $a_3\omega^3 + a_2\omega^2 + a_1\omega + a_0$, kde a_2, a_1, a_0 jsou přirozená čísla.

Příklad. Libovolnému polynomu $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{N}[x]$ jedné neurčité x s koeficienty z $\mathbb{N}$ odpovídá ordinální číslo $p(\omega) = a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + a_1\omega + a_0$, přičemž pro různé polynomy p, q jsou čísla $p(\omega)$ a $q(\omega)$ různá. Připomeňme však, že je nutno dodržet pořadí sčítanců (proč?).

Čísla $p(\omega)$ vyčerpávají ordinální čísla, která lze vyjádřit pomocí konečných součtů a součinů přirozených čísel a čísla ω.

Na rozdíl od nekonečných součtů, nekonečné součiny ani nekonečné mocniny nenesou přirozené dobré uspořádání. Například $2^{\aleph_0}$, množina spočetných posloupností čísel $0, 1$, sice připouští lexikografické uspořádání, ale snadno najdeme nekonečnou klesající posloupnost

$$[1,0,0,0,0,\dots] \quad > \quad [0,1,0,0,0,\dots] \quad > \quad [0,0,1,0,0,\dots], \quad \dots$$

Nekonečné součiny a mocniny je nutno konstruovat jiným způsobem.

6.6. Definice. Nechť α, β jsou ordinální čísla. Položme

$$\alpha^\beta = \bigcup_{k \in \beta} \alpha^k.$$

Vysvětlení: V definici jde o ordinální typ prostého, nikoliv disjunktního, sjednocení množin α^k. Konečné mocniny α^k jsou stejně jako předtím prostě konečné součiny

$$\underbrace{\alpha \times \cdots \times \alpha}_{k}$$

a jsou vloženy jeden do druhého, $\alpha^k \subseteq \alpha^{k+1}$, prostřednictvím zobrazení $[a_1, a_2, \dots, a_k] \mapsto [0, a_1, a_2, \dots, a_k]$, takže prvky z α^k předcházejí ostatním v α^{k+1} (tvoří tam počátek; obecně počátky zavedeme v příštím oddílu). Potom $\alpha^k \subseteq \alpha^{k+2}$ prostřednictvím zobrazení $[a_1, a_2, \dots, a_k] \mapsto [0, 0, a_1, a_2, \dots, a_k]$, atd.

Příklad. Počítejme

$$2^\omega = \bigcup_{k \in \omega} 2^k$$

Zde 2^0 je jednoprvková množina $1 = \{0\}$, vložená do $2^1 = \{0, 1\}$ jako prvek $[0, 1]$. Přitom $2^1 = \{0, 1\}$ je vložená do 2^2 jako prvky $[0, 0]$, $[0, 1]$, zatímco 2^2 je vložená do 2^3 jako prvky $[0, 0, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 1, 1]$, atd. Vidíme, že sjednocení $\bigcup_{k \in \omega} 2^k$ lze ztotožnit s množinou všech posloupností $\dots, a_2, a_2, a_0$ nekonečných směrem doleva, kde a_1 je 0 nebo 1, ale jen konečně mnoho prvků a_i je nenulových. Uspořádání zůstává lexikografické, čili rozhodujs se podle nejlevějšího nenulového a_i. Dostáváme

$$(\dots, 0, 0, 0) < (\dots, 0, 0, 1) < (\dots, 0, 1, 0) < (\dots, 0, 1, 1) < \cdots,$$

což je izomorfní řetězci ω, čili

$$2^\omega = \omega.$$

Poznámka. Všimněte si, že oproti kardinálnímu číslu $2^{\aleph_0}$ je ordinální číslo 2^ω *spočetné.*

Příklad. Počítejme $1^\omega = \bigcup_{k \in \omega} 1^k$. Jelikož $1 \subset 2$, můžeme použít postup z předchozího příkladu, kde se omezíme jen na posloupnosti sestavené z prvků z 1. Tam je ovšem jediný prvek 0 a proto 1^ω obsahuje jediný prvek, a sice nulovou posloupnost $\dots, 0, 0, 0$. Tudíž,

$$1^\omega = 1.$$

Příklad. Počítejme ω^ω. Opět můžeme použít postup z předchozího příkladu, ale tentokrát budou posloupnosti $\dots, a_2, a_2, a_0$ sestaveny ze všech přirozených čísel, přičemž vše ostatní zůstane stejné, včetně uspořádání. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&(\dots, 0, 0, 0, 0) < (\dots, 0, 0, 0, 1) < (\dots, 0, 0, 0, 2) < \cdots \\
&< (\dots, 0, 0, 1, 0) < (\dots, 0, 0, 1, 1) < (\dots, 0, 0, 1, 2) < \cdots \\
&< (\dots, 0, 0, 2, 0) < (\dots, 0, 0, 2, 1) < (\dots, 0, 0, 2, 2) < \cdots \\
&< \cdots \\
&< (\dots, 0, 1, 2, 0) < (\dots, 0, 1, 2, 1) < (\dots, 0, 1, 2, 2) < \cdots,
\end{aligned}$$

což není žádné z dosud zkonstruovaných ordinálních čísel, protože všechna doposud zkonstruovaná ordinální čísla jsou tvaru $p(\omega) = c_n\omega^n + c_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + c_1\omega + c_0$ a odpovídají posloupnostem $a_n, \dots, a_2, a_2, a_0$ konečné délky. Vidíme, že ω^ω je zcela nové ordinální číslo.

Diagram množiny ω^ω obdržíme, když v množině ω nahradíme každý sloup množinou ω (vznikne ω^2), poté opět nahradíme každý sloup množinou ω (vznikne ω^3), a tak dále do nekonečna. Vznikne tak sobě podobná množina, jejíž každá část je podobná celku, čili fraktál.

Příklad. Podle podobného návodu se sestrojí číslo $\omega^{\omega^{\omega}}$, jen použité posloupnosti budou indexovány prvky z ω^{ω}. Analogicky $\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$, atd.

Poznámka. Ordinální čísla ω^{ω}, $\omega^{\omega^{\omega}}$, $\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \ldots,$ jsou opět *spočetná.*

Zde naši exkurzi do zoo ordinálních čísel ukončíme. Vidíme, že svět ordinálních čísel je mnohem rozmanitější než svět kardinálních čísel. Zdůrazněme, že všechna zatím zkonstruovaná ordinální čísla mají spočetnou mohutnost.

Z obvyklých zákonů aritmetiky platí pro operace s ordinálními čísly jen některé. Již jsme viděli, že obecně naplatí komutativní zákon ani pro sčítání, ani pro násobení.

6.7. Tvrzení. *Buďte α, β, γ libovolné mohutnosti. Pak*

$$
\begin{aligned}
&0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0,\\
&(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),\\
&\alpha \times \beta = \beta \times \alpha,\\
&1 \times \alpha = \alpha = \alpha \times 1,\\
&(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma),\\
&(\alpha + \beta) \times \gamma = \alpha \times \gamma + \alpha \times \gamma,\\
&0 \times \alpha = 0 = \alpha \times 0,\\
&\alpha^0 = 1,\\
&\alpha^1 = \alpha.\\
&\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\gamma} \times \alpha^{\beta},\\
&(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\gamma \times \beta},
\end{aligned}
$$

Cvičení. Ukažte, že $\alpha \times (\beta + \gamma)$ nemusí být rovno $\alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$. Z distributivních zákonů mezi násobením a sčítáním tak platí jen jeden.

Návod: Volte $\alpha = 2$, $\beta = \omega$, $\gamma = 1$.

Cvičení. Ukažte, že $(\alpha \times \beta)^{\gamma}$ nemusí být rovno ani $\alpha^{\gamma} \times \beta^{\gamma}$, ani $\beta^{\gamma} \times \alpha^{\gamma}$.

Návod: Volte $\alpha = \omega$, $\beta = \gamma = 2$.