Addition: $(a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d)$
Multiplication: $(a,b) \times (c,d) = (ac - bd,\ bc + ad)$

It is evident that there is a 1 to 1 correspondence between the complex numbers (a,0) and the real numbers a which is defined by $(a,0) \leftrightarrow a$ (read: implies and is implied by a). Under it sums correspond to sums and products to products. That is:

$$\begin{array}{ccccc} (a,0) & + & (c,0) & = & a + (c,0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a & + & c & = & a + c \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} (a,0) & \times & (c,0) & = & (ac,0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a & \times & c & = & ac \end{array}$$

Such a correspondence is called an <u>isomorphism</u>, and we say that the set of complex numbers (a,0) is isomorphic to the set of real numbers a relative to addition and multiplication.

The arithmetic of the pure imaginaries is given by the following rules:

Addition	$0,b + 0,d = 0,\ b + d$
Multiplication	$0,b \times 0,d = -bd,0$

It is important to note that the product of two pure imaginaries is a real number. In particular, $(0,1) \times (0,1) = (-1,0)$

We now recall that our motivation for introducing the complex numbers was our inability to solve the equation $x^2 = -1$ in terms of real numbers. Let us see how the introduction of complex numbers enables us to provide such a solution. By means of the isomorphism above, we see that this equation corresponds to the equation $(x,y)^2 = (x,y) \times (x,y) = (-1,0)$

As we have noted, $(x,y) = (0,1)$ is a solution of this equation,,and we also see that $(x,y) = (0,-1)$ is another solution. Therefore our introduction of complex numbers permits us to solve equations of this type, which had no solution in terms of real numbers.

In order to complete our discussion we need to show the correspondence between our two definitions of complex numbers. We first note the following identities: $(0,b) = (b,0) \times (0,1)$ and $(a,b) = (a,0) + [(b,0) \times (0,1)]$

We then set up the following relationship between the two notations:

	(a,b) notation	(a + bi) notation
Real numbers	(a,0)	a
Unit imaginary	(0,1)	i

Using the identities above, we then derive the correspondences:

	(a,b) notation	(a + bi) notation
Pure imaginaries	(0,b)	bi
Complex numbers	(a,b)	a + bi

From these we show that the rules for the equality, addition, and multiplication of complex numbers in the a + bi notation, which were stated as definitions at the beginning of our discussion, are in agreement with the corresponding definitions in the (a,b) notation. Finally, we observe that with these definitions the complex numbers form a <u>field</u>.

----

1. BRANCHES OF MATHEMATICS

Mathematics is the science of numbers, quantities and space, and their relationships. Arithmetic and geometry have been the fundamental branches of mathematics since antiquity. Over the centuries arithmetic was extended by algebra, in which symbols are used to represent numbers, variables and constants, either as a means of expressing general relationships or to indicate quantities satisfying particular conditions.

Arithmetic and algebra were unified with geometry in analytical geometry, which provided a technique for mapping numbers as points on a graph, for converting equations into geometric shapes, and vice versa. This analytical approach opened the way to most of the disciplines of higher, or advanced mathematics referred to by the single word "analysis". The first development of analysis was calculus, a system for analyzing change and motion, whose basic concepts are the limit of a sequence of numbers or objects and the limit of a function.

Many advances have taken place in number theory, dealing with the properties of the integers (ordinary whole numbers). The same applies to algebra and geometry, so that we have algebras including the algebra of sets, vectors and matrices, and Banach, Boolean or homological algebras, and non-Euclidean geometries such as elliptic, hyperbolic, and Riemannian geometries. Topology, another development of modern mathematics, is the study of the properties of geometric shapes which do not change when subjected to continuous transformation or deformation.

Mathematics has always been founded on logic. This led to the creation of symbolic logic, set theory and group theory. Symbolic logic attempts to reduce all human reasoning to mathematical notation. The set-theoretic approach now permeates all mathematics. Among other things, the theory of sets provides a new kind of arithmetic for dealing with infinity. Both symbolic logic and set theory are interrelated with group theory, which plays a unifying role in analysis and reveals unexpected similarities between different mathematical domains. The theory of graphs is a recent development of the set theory and of problems in finite combinatorial mathematics.

Probability theory, the mathematics of uncertainty and chance, serves to measure the likelihood of various events and studies methods for finding the relevant numerical values. Mathematical statistics is concerned with the techniques of collecting, presenting and analyzing data. It is based on the study of probability and, conversely, information obtained from statistics is needed for working out probabilities. The two disciplines not only find wide application in everyday life (economics, administration, technology and science, etc.), but also spring from life.

Last decades have seen the introduction of new areas of applied mathematics, <u>mathematical cybernetics</u>, <u>information mathematics</u> and <u>computing science</u>, operations research, and others, involving programming, problems of automatic control and model construction, which would be unthinkable without computers able to process very large quantities of data and to perform complex and lengthy computations at a high speed. Computerization of the human activities above is one of the main features of modern time.

quantity	kwontiti	množství, veličina
space	speis	prostor
relationship	ri´leišənšip	vztah, závislost
fundamental	fandə´mentl	základní, podstatný
branch	bra:nč	odvětví, obor; větev
antiquity	æn´tikwiti	starověk, antika
to extend	iks´tend	rozšířit
variable	veəriəbl	proměnná
to satisfy	sætisfai	uspokojit, vyhovět
particular	pə´tikjulə	jednotlivý; zvláštní
to unify	ju:nifai	sjednotit
to provide	prə´vaid	poskytnout, dát, opatřit
to map	mæp	zobrazit
to convert into	kən´və:t	přeměnit, převést na
equation	i´kweišn	rovnice
shape	šeip	tvar, útvar, podoba
approach	ə´prouč	přístup, pojetí
to refer to	ri´fə:	odkazovat na, mluvit o
calculus	kælkjuləs	diferenciální a integrální počet, kalkul
motion	moušn	pohyb
sequence	si:kwəns	posloupnost, řada
advance	əd´va:ns	pokrok, zdokonalení, vývoj
theory	θiəri	teorie
to deal with, dealt, dealt	di:l, delt	zabývat se něčím, pojednávat
property	propəti	vlastnost
integer	intidžə	celé číslo
to apply to	ə´plai	týkat se, platit o; aplikovat
to include	in´klu:d	zahrnovat, obsahovat
set	set	množina, soubor
matrix, matrices	meitriks, -isiz	matice, matrice
Euclid, Euclidean	ju:klid, ju:´klidiən	Euklides, euklidovský
to subject to	səb´džekt	podrobit, vystavit
continuous	kən´tinjuəs	souvislý, spojitý (funkce)

creation	kri´eišn	vytvoření, vznik
to attempt	ə´tempt	pokusit se, snažit se
to reduce to	ri´dju:s	převést na; zjednodušit
notation	no´teišn	zápis, označení
reasoning	ri:zniŋ	usuzování, úvaha
set-theoretic	´set θiə´retik	množinový
to permeate	pə:mieit	prolínat, pronikat
infinity	in´finiti	nekonečno
group	gru:p	grupa; skupina
to reveal	ri´vi:l	odhalovat, vyjevovat
similarity	,simə´læriti	podobnost
domain	do´mein	oblast, obor (definiční)
recent	ri:snt	nedávný, nový
finite	fainait	konečný
combinatorial mathematics	,kombinə´toriəl m.	kombinatorika
probability	,probə´biləti	pravděpodobnost
uncertainty	an´sə:tnti	nejistota
chance	ča:ns	náhoda, možnost
to measure; measure	mežə	měřit; míra
likelihood	laiklihud	pravděpodobnost
event	i´vent	jev, případ, událost
relevant	reləvənt	příslušný, vhodný
value	vælju:	hodnota
to be concerned with	kən´sə:nd	týkat se, zabývat se čím
datum, data (sg. se nyní nepoužívá)	deitəm, deitə	údaj, data
based on	beist‿ən	založený na
conversely vice versa	kən´və:sli ´vaisi ´və:sə	naopak, obráceně
to spring, sprang, sprung	spriŋ, spræŋ, spraŋ	pramenit, vznikat
area	eəriə	oblast; plošný obsah (geom.)
applied mathematics	ə´plaid ,mæθi´mætiks	aplikovaná matematika
cybernetics	,saibə´netiks	kybernetika
information mathematics computing science computer science	,infə´meišn m. ,kəm´pju:tiŋ saiəns ,kəm´pju:tə	informatika
operations (US) research operational (GB) research	,opə´reišnz ri´sə:č ,opə´reišnl	operační výzkum, op. analýza
programming	prougræmiŋ	programování
automatic control	,o:tə´mætik kən´troul	automatické řízení
unthinkable	an´θinkəbl	nemyslitelný

to process	prouses	zpracovávat
to perform	pə´fo:m	provádět, vykonávat
computation	ˌkompju:´teišn	výpočet, počítání
complex	kompleks	složitý
lengthy	leŋθi	zdlouhavý
computerization	kəmpju:tərai´zeišn	převádění na počítač, užití p.
feature	fi:čə	charakteristický rys, znak

Useful Phrases

disciplines referred to by the single word "analysis"	obory, které označujeme (o kterých mluvíme pod) jedním slovem "analýza"
more advances have taken place in number theory	k dalšímu rozvoji došlo v teorii čísel
the same applies to algebra	totéž platí o algebře
topology is concerned with ...	topologie se zabývá čím
statistics finds wide application	statistika se široce uplatňuje
last decades have seen the introduction of new branches	v posledních desetiletích jsme byli svědky zavedaní nových oborů
new kinds of algebra such as ...	nové typy algebry, například ...

Poznámky

1. Některé názvy vědních oborů jsou zakončeny na -s, ale mají sloveso v jednotném čísle: Mathematics is a science.
   Podobně: physics, statistics, economics, cybernetics, linguistics, aj. (Ale: logic, arithmetic.) Přízvuk je zpravidla na 2. slabice od konce.
2. Přízvuk v pojmenováních vědních oborů zakončených na -logy, -graphy, -metry, -scopy, -nomy atd. je ustálen na 3. slabice od konce:
   topology, geology, biology, geography, geometry, trigonometry, spectroscopy, astronomy, philosophy, aj.
3. V obecném významu se názvy věd a jejich oborů užívají bez členu:
   Arithmetic and algebra were unified with geometry in analysis.
   Ale pro odlišení různých druhů jednoho oboru použijeme členu:
   Probability is the mathematics of chance. This is a Boolean algebra. (algebra = algebraic structure)
4. Pozorujte následující významově ekvivalentní výrazy (na levé straně struktura the ... of ... , na pravé pro angličtinu typická složená pojmenování, kde první slovo je přívlastek, druhé základní podstatné jméno):

the theory of sets	=	set theory
the theory of groups	=	group theory
the theory of numbers	=	number theory
the theory of measure	=	measure theory
the theory of information	=	information theory
the theory of probability	=	probability theory

5. Konečně jsou v matematice častá složená pojmenování typů:

a) the Riemann integral, the Lebesgue /lebeg/ measure, a Hilbert space, the Cauchy /koši/ formula, a Banach algebra, the/a Hasse diagram, atd.

b) přivlastňovací pád (bez členu): Cramer´s rule, Taylor´s theorem, Euclid´s geometry (také the geometry of Euclid), aj.

c) s archaizující (latinskou) příponou -ean nebo -ian : Euclidean geometry, Riemannian geometry, the Cartesian product /ka:´ti:zien/, an Abelian /a´beljən/ group, Newtonian physics /srovnej také Shakespearian theatre, Victorian period/.

Přeložte:

1. V období vědeckotechnické revoluce se matematické výsledky (achievements) a metody široce uplatňují v rozmanitých oborech teorie i praxe.
2. Jednou z charakteristických vlastností současné matematiky je vznik nových odvětví, ve kterých se prolínají metody různých matematických disciplin.
3. Na přírodovědecké fakultě jsou katedry matematiky, fyziky, chemie, biologie, biochemie, geologie a zeměpisu.
4. Matematika měla vždy úzké vztahy k logice a filosofii.
5. Matematická lingvistika studuje jazykové struktury s použitím (using) matematických a logických modelů.
6. Význam tohoto oboru vzrostl v posledních letech při tvorbě (in developing) umělých jazyků pro počítače a v oblasti automatického překladu z jednoho jazyka do druhého.

----

2. THE ABSTRACT LANGUAGE OF MATHEMATICS

Mathematics is an important tool for science. But while science is closely tied to the physical world, mathematics is essentially abstract. The first phase of the abstraction of mathematics from physical reality is the use of undefined words in definitions, e.g., in the following ones:

Point: the common part of two intersecting lines.
Line: the figure traced by a point which moves along the shortest path between the points.

Thus we have defined point in terms of line and line in terms of point. Clearly, such definitions are going in circle. Adding another word, between, we may define:

Line segment: that portion of a line contained between two given points on a line.

The words other than those underlined are without special meanings and thus may be used freely.

Once we have built up our vocabulary from undefined words and other words defined in terms of them, we can make statements about these new terms. They will be declarative sentences (assertions) which are so precisely stated that they are either true or false. Statements accepted as true are called axioms. Certainly the geometry of Euclid was a grand abstraction from physical space. But the type of abstraction found in modern mathematics is of an even higher order, i.e., the objects, relations, and operations with which it deals are already themselves abstractions.

When we have shown that the truth of a given statement follows logically from the assumed truth of our axioms, we call this statement a theorem and say that "we have proved it." The main interest of a mathematician is to invent new theorems and to construct proofs for them , and the two mental processes vital to all mathematical progress are abstraction and proof.

The rules of mathematical reasoning may be viewed as the grammar of mathematics. Its vocabulary, in addition to technical terms discussed above, typically includes symbols such as:

numerals for numbers;

letters for unknown numbers;

π for the ratio of the circumference to the diameter of a circle;

sin (for sine), cos (for cosine) and tan (for tangent) for the ratios between sides in a right triangle;

$\sqrt{}$ for a square root; ∞ for infinity;

$\int$, ∂, $\sum$ and $\rightarrow$ for selected other concepts in higher mathematics.

---

abstract	æbstrækt	abstraktní
to abstract, abstraction	əb´strækt, əb´strækšn	abstrahovat, abstrakce
tool	tu:l	nástroj, prostředek
to tie	tai	vázat, pojit (se)
essential	i´senšl	zásadní, podstatný
phase	feiz	fáze, stadium, stupeň
reality	ri´æliti	skutečnost, realita
undefined	´andi´faind	nedefinovaný
common	komən	společný; obecný; běžný
to intersect	intə´sekt	protínat (se)
line (straight line)	lain, streit l.	přímka, čára
to trace	treis	nakreslit, vyznačit
to move along	mu:v ə´loŋ	pohybovat se po
path	pa:θ	cesta, dráha; vzdálenost
term	tə:m	termín, výraz, člen (mat.)
in terms of		vyjádřeno jako, pomocí
clearly	kliəli	zřejmě, je zřejmé, že
to go in circle	in sə:kl	pohybovat se v kruhu
line segment	lain segmənt	úsečka
portion	po:šn	část, úsek
to underline	´andə´lain	podtrhnout
meaning	mi:niŋ	význam, smysl
once	wans	jednou, jakmile, když

to build up (built, built)	ˈbildˈap	vybudovat, vytvořit
vocabulary	vəˈkæbjuləri	slovník; slovní zásoba
statement	steitmənt	výpověď, tvrzení, věta
declarative	diˈklærətiv	oznamovací, vypovídací
sentence	sentəns	věta (gram.)
assertion	əˈsə:šn	tvrzení
to state	steit	vyslovit (větu), uvést
precise	priˈsais	přesný
true	tru:	pravdivý; platný, věrný
false	fo:ls	nepravdivý; neplatný
to accept	əkˈsept	přijímat
axiom	æksiəm	axióm, základní zřejmá věta
grand	grænd	znamenitý, geniální
order	o:də	řád, stupeň, pořadí
truth	tru:θ	pravda, pravdivost, platnost
to assume	əˈsju:m	předpokládat
theorem	θiərəm	věta, poučka
to prove	pru:v	dokázat
to invent	inˈvent	vynalézt, vymyslit, objevit
proof	pru:f	důkaz
vital to	vaitl	(životně) důležitý, rozhodující pro
progress	prougres	pokrok, rozvoj, postup vpřed
rule	ru:l	pravidlo, předpis
to view as	vju:	dívat se na jako, považovat
grammar	græmə	gramatika, mluvnice
in addition to	in əˈdišn	vedle, kromě čeho
typical of	tipikl	typický, příznačný pro
numeral	nju:mrl	číslovka; číselný
unknown	ˈanˈnoun	neznámý, neznámá (veličina)
ratio	reišiou	poměr, podíl
circumference	səˈkamfrns	obvod (geom.)
diameter	daiˈæmitə	průměr (kruhu)
sine (zkr. sin)	sain	sinus
cosine (zkr. cos)	kousain, kos	kosinus
tangent (zkr. tan)	tændžənt, tæn	tangens; tečna
side	said	strana
right triangle	rait traiəŋgl	pravoúhlý trojúhelník
square; square root	skweə, s. ru:t	čtverec; druhá odmocnina
sign	sain	znak, znaménko
to imply	imˈplai	implikovat, znamenat

Useful Phrases

we define point in terms of line	bod definujeme pomocí pojmu přímka
such definitions are going in circle	takové definice se pohybují v kruhu
statements accepted as true are called axioms	tvrzení přijímaná za pravdivá nazýváme axiómy
the rules are viewed as the grammar of mathematics	pravidla chápeme jako (považujeme za) gramatiku matematiky
its vocabulary includes symbols	do slovníku patří symboly

Anglická abeceda

a /ei/, b /bi:/, c /si:/, d /di:/, e /i:/, f /ef/, g /dži:/, h /eič/,
i /ai/, j /džei/, k /kei/, l /el/, m /em/, n /en/, o /ou/, p /pi:/,
q /kju:/, r /a:/, s /es/, t /ti:/, u /ju:/, v /vi:/, w /dablju:/,
x /eks/, y /wai/, z /zed/; ch = c + h /si:eič/.

Řecká abeceda

A	α	alpha	/ælfə/	N	ν	nu	/nju:/
B	β	beta	/bi:tə/	Ξ	ξ	xi	/zai/
Γ	γ	gamma	/gæmə/	O	o	omicron	/ou´maikrən/
Δ	δ	delta	/deltə/	Π	π	pi	/pai/
E	ϵ	epsilon	/ep´sailən/	P	ρ	rho	/rou/
Z	ζ	zeta	/zi:tə/	Σ	σ	sigma	/sigmə/
H	η	eta	/i:tə /	T	τ	tau	/to:/
O	ϑ	theta	/θi:tə/	Y	υ	upsilon	/ju:p´sailən/
I	ι	iota	/ai´outə/	Φ	ϕ	phi	/fai/
K	$\varkappa$	kappa	/kæpə/	X	χ	chi	/kai/
Λ	λ	lambda	/læmdə/	Ψ	ψ	psi	/sai/
M	μ	mu	/mju:/	Ω	ω	omega	/ oumigə/

Čtení symbolů

$\sqrt{\ }$ - the root sign; $\sqrt{x}$ - the square root of x; ∞ - infinity
Σ - sum, summation /sam, sam´eišn/; $\int$ - integral /integrəl/;
∂ - partial differential /pa:šl ˏdifə´renšl/; $\longrightarrow$ - implies /im´plaiz/.

Poznámky

1. Number - a) číslo, b) počet; numeral - a) číslice, b) číslovka; číslice je také: figure (10 is a double-figure number) a digit (kterákoli z číslic 0 - 9); a number of two digits (a two-digit number): 32; a binary /bainəri/ digit ≙ either 1 or 0 (zero -/ziərou/) = bit.

2. **Zkratky**: i.e. - that is (tj.); e.g. - for example (for instance) = např.; etc. - and so on (forth) = atd.; cf. - compare (srov.); viz. - namely (totiž); et al. - and others (aj.).
   Q.E.D. (lat. quod erat demonstrandum) - which was to be proved (demonstrated) - což bylo (třeba) dokázat (c.b.d., cbd)

3. V odborné angličtině jsou velmi časté vazby s trpným rodem, zatímco v češtině dáváme přednost činnému rodu nebo použijeme zvratného slovesa.

Such statements are called axioms lze přeložit trojím způsobem: Taková tvrzení jsou nazývána / se nazývají / nazýváme axiómy.

Z hlediska jazykové praxe nás zde zajímá třetí způsob, protože chybný doslovný překlad "Such statements we call axioms" je porušením pravidla o slovosledu v anglické větě (SVOMPT).

Pamatujme si: Začneme-li takovou větu naším 4.pádem, pokračujeme v angličtině automaticky trpnou vazbou. Vzor: Hamleta napsal Shakespeare = Hamlet was written by Shakespeare (jinak bychom samozřejmě vztah obrátili). Tedy:

Axiómy nedokazujeme. Axioms are not proved. (Ovšem také: We do not prove a.)
Věty dokazujeme pomocí důkazů. Theorems are proved by proofs.
Důkaz ponecháváme čtenáři. The proof is left to the reader.

Přeložte do angličtiny (s použitím trpného rodu):

1. V axiomatickém systému pojem "množina" a vztah "být prvkem" (element) nedefinujeme (tak jako nedefinujeme v geometrii pojmy "bod" a "přímka"). Pro tyto nedefinované pojmy vyslovíme řadu nedokazovaných tvrzení zvaných axiómy. Z těchto axiómů se pak buduje celá teorie množin deduktivně.
2. První pokus o vybudování axiomatické teorie představuje Euklidova práce "Základy" (Elements), která obsahuje 5 známých axiómů a 5 postulátů eukleidovské geometrie. Rozvoj axiomatických metod se však datuje až do 19.století, kdy Lobačevskij a Bolyai položili základy geometrie neeuklidovské.
3. Matematická indukce je postup, který se používá k důkazům (to prove) určitých typů matematických vět a výrazů. Zakládá se na IV. Peanově axiómu přirozených čísel.

----

3. THE NUMBER SYSTEM AND REAL NUMBERS

Numbers are basic ideas in mathematics and it is essential to know all the important properties of our number system. We must start with the natural numbers 1,2,3, ... used in counting things and objects. The count is indicated by cardinal numbers, while the position in an ordered list is indicated by ordinal numbers. To add, subtract, multiply and divide pairs of natural numbers were the very first lessons of everybody's elementary arithmetic. A major step in the development of mathematics was the invention of fractions to give meaning to divisions like $7 \div 2$ or $2 \div 5$ (different from say $6 \div 3 = 2$). Later on zero and negative numbers were added to form, together with the positive integers and fractions, the system of rational numbers. This made it possible to subtract any rational number from one another, e.g., $3 - 5$. Numbers that cannot be expressed as ordinary fractions, such as $\sqrt{2}$ and π, are called irrational numbers. They are written as infinite decimal expansions: 1.4142 ... and 3.1415 ...

(Note that the decimal expansions of the rational numbers are also infinite, for example, 1/4 = 0.25000 ..., 1/3 = 0.33333 ..., 1/7 = 0.142857142857 ... These, however, repeat after a certain point, whereas the irrationals do not have this property.)

The collection of the rationals plus the irrationals is called the system of real numbers. It is quite difficult to give a completely satisfactory definition of a real number, but for the present purpose the following will suffice.

Def.1. A real number is a number which can be represented by an infinite decimal expansion.

Def.2 (of equality). Two symbols, a and b, representing real numbers are equal if and only if they represent the same real number.

Thus a real number can be expressed in a variety of notations:

e.g. $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, 0.5000... , $\frac{1/8}{1/4}$, $\frac{1}{4}2$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$.

From the definition of equality above the following theorem follows immediately:

Theorem 1. If a,b,c represent real numbers and if a = b, then a + c = b + c, a − c = b − c, ac = bc, and a/c = b/c (provided $c \neq 0$).

Addition of Real Numbers

Closure Law of Addition: The sum a + b of any real numbers is a unique real number c.

This property may seem trivial, but let us consider some situations where closure is not true: a) The sum of two odd numbers is not an odd number. b) The sum of two irrational numbers is not necessarily irrational, for $(2+\sqrt{3}) + (4-\sqrt{3}) = 6$. c) The sum of two prime numbers is not necessarily a prime, for 7 + 11 = 18.

Commutative Law of Addition a + b = b + a (i.e., the order is not important)

Associative Law of Addition (a + b) + c = a + (b + c)

Def.3. a + b + c is defined to be the sum (a + b) + c. Hence follows

Theorem 2. a + b + c = c + b + a .

In a similar way we can define the sum of four real numbers.

Def.4. The real number zero is called the identity element in the addition of real numbers.

Def.5. The additive inverse of a real number a is the real number −a having the property that a + (−a) = −a + a = 0.

We must further define the difference of two real numbers.

Def.6. Let a and b be real numbers. Then, by definition, a − b = a + (−b).

We shall have frequent occasion to refer to the absolute value of a real number. This is written |a| and is defined as follows:

Def.7. The absolute value of a real number a, |a| , is the real number such that: a) If a is positive or zero, then |a| = a.
b) If a is negative, then |a| = −a.

Multiplication of Real Numbers

The laws of multiplication are easy to learn; they are almost the same, with "product" written in the place of "sum".

The real number 1 is the multiplicative identity.

The multiplicative inverse of $a \neq 0$ is a′ having the property that a x a′ = a′ x a = 1.

(Note: $a \neq 0$ is to be read: a is different from zero; a′ is read: a prime.)

Now let us define division. Just as the difference of a and b is defined to be the sum of a and the additive inverse of b, the quotient of a by b is defined to be the product of a and the multiplicative inverse of b.

Def.8. Let a and b be real numbers, and let $b \neq 0$. Then the quotient of a by b is defined to be $a/b = a \times b'$.

Note that division by zero is not defined. Zero may never appear in the denominator of a fraction.

There is one final law connecting multiplication and addition:

Distributive Law $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

This law has a number of important consequences. The first of these is the multiplicative property of zero.

Theorem 3. Let a be any real number; then $a \times 0 = 0$.

From this theorem we conclude the following useful result:

Theorem 4. If a and b are two real numbers such that $ab = 0$, then $a = 0$, or $b = 0$.

This theorem has very many applications, especially in the solution of equations.

A second consequence of the distributive law is the set of rules for multiplying signed numbers. These are easily derived from the following theorem.

Theorem 5. For any real number a, $(-1) \times a = -a$

Corollary. $(-1) \times (-1) = 1$

Putting $a = -1$ in Theorem 5 and applying the convention that $-(-a) = a$, we can prove the usual rules.

Theorem 6. Let p and q be any positive real numbers. Then:
a) $p \times (-q) = -(pq)$, b) $(-p) \times (-q) = pq$

In summary, the laws above form the foundation of the whole subject of arithmetic and ordinary algebra. They should be carefully memorized. In more advanced mathematics they are taken to be axioms of an abstract system called a field. Hence we may say that the real numbers form a field.

---

idea	ai´diə	myšlenka, pojem
natural	næčrl	přirozený
to count; count	kaunt	počítat; počet
to indicate	indikeit	ukázat, označit, určit
cardinal numbers	ka:dinl	kardinální, základní čísla
ordinal numbers	o:dinl	řadová čísla, ordinální
to add; addition	æd, ə´dišn	sčítat; sčítání
to subtract; subtraction	səb´trækt, -kšn	odčítat; odčítání
to multiply; multiplication	maltiplai ˌmaltipli´keišn	násobit; násobení
to divide; division	di´vaid, di´vižn	dělit; dělení
major	meidžə	větší, závažný
step	step	krok
fraction	frækšn	zlomek
like	laik	jako; podobný

zero	ziərou	nula
rational number	ræšnl	racionální číslo
to express	iks´pres	vyjádřit
ordinary	o:dnri	obyčejný
irrational	i´ræšnl	iracionální
infinite	infinit	nekonečný
decimal	desiml	decimální, desetinný
expansion	iks´pænšn	rozvoj
to note	nout	všimnout si, zaznamenat
however	hau´evə	avšak, ale; jakkoli
to repeat	ri´pi:t	opakovat (se)
whereas (while)	weərəz, wail	kdežto, zatímco
collection	kə´lekšn	soubor, sbírka
satisfactory	,sætis´fæktəri	uspokojující, dostatečný
purpose	pə:pəs	účel, záměr
to suffice	sə´fais	stačit, uspokojit
equality	i´kwoliti	rovnost
variety	və´raiəti	rozmanitost, různost
immediately	i´mi:diətli	ihned, okamžitě bezprostředně
closure	kloužə	uzavřenost, uzávěr
law	lo:	zákon, pravidlo
unique	ju:´ni:k	jedinečný, jednoznačný
trivial	triviəl	triviální
to consider	kən´sidə	uvažovat; považovat za
to be true	tru:	platit
odd number	od nambə	liché číslo
closed	klouzd	uzavřený
prime (number)	praim	prvočíslo
commutative	kə´mju:tətiv	komutativní
associative	ə´soušiətiv	asociativní
for	fo:	neboť (spojka)
hence	hens	tudíž, tedy, proto, odtud
in a similar way	´similə´wei	podobným způsobem, podobně
identity element	ai´dentiti elimənt	neutrální prvek
inverse	in´və:s	inverze; inverzní, opačný
frequent	fri:kwənt	častý
occasion	ə´keižn	příležitost
absolute value	æbsolu:t vælju:	absolutní hodnota
product	prodəkt	součin
just as	džastəz	právě tak jako

quotient	kwoušnt	podíl; kvocient
to appear	əˈpiə	objevit se, vyskytnout se
denominator	diˈnomineitə	jmenovatel
distributive	disˈtribjutiv	distributivní
consequence	konsikwens	následek, důsledek
to conclude	kənˈklu:d	uzavřít, učinit závěr
solution	səˈlu:šn	řešení
signed number	saind nambə	číslo se znaménkem
corollary	kəˈroləri	důsledek (axiom.)
convention	kənˈvenšn	konvence, úmluva
(in) summary	saməri	(na) závěr, závěrem; souhrn, resumé
foundation	faunˈdeišn	základ
to memorize	meməraiz	naučit se nazpaměť
field	fi:ld	pole, komutativní těleso
coefficient	kouiˈfišnt	koeficient
binomial polynomial	baiˈnoumiəl poliˈnoumiəl	binomický; dvojčlen mnohočlen
to enclose	inˈklouz	uzavřít
round bracket square bracket	raund skwə: brækit	kulatá závorka hranatá závorka
dividend divisor	dividend diˈvaizə	dělenec dělitel
numerator	nju:məreitə	čitatel
proportion	prəˈpo:šn	úměra; poměr, podíl
power	pauə	mocnina; moc, síla
to raise to ... power	reiz	povýšit na ..., umocnit
base	beis	základ; základna (geom.)
exponent	iksˈpounənt	exponent
involution	,invəˈlu:šn	umocňování
cube (power)	kju:b	krychle; třetí mocnina
to take roots evolution	teik ru:ts ,i:vəˈlu:šn	odmocňovat odmocňování
parenthesis, - es	pəˈrenθisis, - i:z	závorka
brace	breis	složená závorka; svorka
comma	komə	čárka
decimal point	desiml point	desetinná tečka
to omit	oˈmit	vynechat
nought	no:t	nula
percent (%)	pəˈsent	... procent

Useful Phrases

this made it possible to subtract any rational number from one another	to umožnilo navzájem od sebe odečítat jakákoli racionální čísla
the sum is not necessarily a prime	součet nemusí být prvočíslo
closed under addition	uzavřen vzhledem ke sčítání
from the definition the following theorem follows immediately	z definice vyplývá okamžitě následující věta
this is defined as follows	to definujeme následovně
the quotient is defined to be a/b	podíl definujeme jako a/b
the laws are easy to learn	je lehké se naučit pravidla (zákony)
the rules are easily derived	pravidla se dají snadno odvodit
the laws should be memorized	pravidla bychom se měli naučit zpaměti
let us put a = -1	položme a = -1

Poznámky

1. Let us consider/define/have/put atd. - uvažujme, definujme, mějme, položme
   Stejnou vybízecí funkci má rozk. způsob: Suppose/assume - předpokládejme.
   Let a be a real number - Nechť a je ... Let S be a set - Budiž S množina.

2. Any v kladných větách - jakýkoli, libovolný (arbitrary), každý
   Let a be any real number. Any number divisible by 2 is even.
   Let p and q be any (arbitrary) positive real numbers.

3. Struktura (implikace) If ...(such that) ... , then ...
   If a and b are two real numbers such that ab = 0, then a = 0 or b = 0.
   Jestliže takové, že . pak (platí, že)
   Čeština užívá slova "platí" daleko častěji než angličtina, kde stačí např. jen then (viz příklad). Such that bychom snad mohli rovněž přeložit "o nichž platí, že". Další příklad:
   Nechť platí inkluse $A \subset B$ - Let $A \subset B$ (čti: Let A be a subset of B
   Let A be contained in B)
   Platí = holds (singulár) nebo hold (plurál) nebo is true / are true,
   ale tato slovesa následují jen po podmětu (tj. musí předcházet to, co platí).
   Např.: Tato věta platí = This theorem holds (does not hold).
   ... pak platí věta 3 = then Theorem 3 holds.
   (všimněte si znovu rozdílného slovosledu)
   V našem příkladě nahoře uvedeném bychom mohli tedy také říct:
   ..., then (the equality) a = 0 holds (ale s tím se tak často nesetkáváme).

4. The rationals plus the irrationals form the system of real numbers (reals).
   Zde máme příklad tzv. konverze, t.j. přechodu slova z jednoho slovního druhu do jiného; v našem případě jde o zpodstatnělá přídavná jména:
   a variable (quantity) = proměnná (tj. veličina); variables = variable quantities; a conic (section) = kuželosečka (plurál: conics); a prime, primes = a prime number, prime numbers (prvočíslo, prvočísla).

Algebraic expressions and operations:	How to read them:
$6\,xy$ 6 = coefficient, x,y = unknowns	six x y
$3ax + 4by$ – a binomial (sum of two terms); + = plus sign	three a x plus four b y
$2xy - 4x + 7y - 3 = 0$ an equation whose left side is a polynomial of four terms; = is the sign of equality	two x y minus four x plus seven y minus three is equal to zero (equals zero)
$9 \cdot 8$ 9×8 ·, x – multiplication signs	nine times eight, nine multiplied by eight
$(a + b) \cdot (a - b) = 5$ two binomials enclosed in brackets	a plus b into a minus b equals five
$48 \div 4 = 12$ ÷ , : – division signs 48 – dividend, 4 – divisor, 12–quotient	forty-eight divided by fours is twelve (equals twelve)
$x = \frac{2a}{3b}$ The right member of the equation is a fraction. 2a – numerator, 3b – denominator	x is equal to two a over (by) three b
$\frac{a}{b}$, a : b	the ratio of a and b
a : b = c : d a proportion	a is to b as c is to d
x^2 x is raised to the second power x – base, 2 – exponent; the operation of involution	x squared, x square, x to the second (power), the square of x
x^3 is to be read:	x cubed, x cube, the cube of x, x to the third power
x^n ; x^{-n} to be read:	x to the n-th; x to the minus n-th
$\sqrt{x}$ a root; the operation of evolution (taking roots)	the square root of x
$\sqrt[3]{x}$; $\sqrt[4]{x}$; $\sqrt[n]{x}$; read: the cube root of x; the	fourth root of x; the n-th root ...
$x^{-\frac{1}{2}}$ a power with a fractional exponent	x to the minus one-half
x^a a – power exponent	x to the a square(d)
x^{n-1} n-1 = binomial exponent	x to the n minus one
$\left(a + \frac{b}{c}\right)^2$	a plus b over c all squared

( ) round brackets, parentheses [ ] square brackets { } braces

Fractions: $\frac{1}{3}$ one third, $\frac{6}{11}$ six elevenths, $6\,\frac{2}{3}$ six and two-thirds

Decimal fractions:

23.318 or 23˙318 (point instead of comma)	twenty-three point three one eight
0.72 or .72 (zero may be omitted)	zero (nought) point seventy-two
$1.\overline{14285}$ a repeating decimal	one point one four two eight five
15 %	fifteen percent

Note: Commas separate large numbers into groups of three digits: 65,237,948.
"billion" denotes 10^{12} in Great Britain, but 10^{9} in the USA.

CVIČENÍ

A. <u>Čtěte:</u>

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \;;$$

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1) \cdot (3x + 1) \;; \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \;;$$

$$2^{-1/7} = \frac{1}{\sqrt[7]{2}} \;; \qquad y = 2\left(1 - \frac{x}{3}\right) \;; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;;$$

$$x = \pm 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{3}} \;; \qquad \sqrt{a^3} = a^{3/4} \;; \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$ (a_n-read: a sub n)

$\frac{1}{2}$; $\frac{12}{59}$; $18\frac{1}{5}$; 4,009.32 ; 0.8806 ; 21 % ; 75 % ; 2.17 %.

B. <u>Přeložte:</u>

1. Sčítáním, odčítáním, násobením a dělením číselných výrazů dostáváme jejich součty, rozdíly, součiny a podíly (... respectively.).
2. Exponent je index nebo symbol, který označuje, na jakou mocninu má být povýšena nějaká veličina.
3. Každé reálné číslo odpovídá v grafickém zobrazení nějakému bodu na číselné ose (real line), jejímž počátkem je 0 a kde napravo jsou kladná a nalevo záporná čísla.
4. Čísla dělitelná 2 se nazývají sudá, ostatní jsou lichá. Prvočísla nemají žádného jiného činitele než jedničku (unity) nebo samo prvočíslo.
5. Krácení (cancelling) je jeden ze způsobů, jak zjednodušíme matematické výrazy v rovnicích nebo ve zlomcích. Další algebraické operace jsou rozklad na činitele (factoring), odstraňování závorek, aj.

----

4. COMPLEX NUMBERS

Many problems cannot be solved by the use of real numbers alone, for instance, $x^2 = -1$. The new symbol i is then introduced, with the property that $i^2 = -1$. Expressions like $a + bi$ are called complex numbers; a is the real part and bi is the imaginary part.

The arithmetic operations on complex numbers are defined as follows:

Equality: $a + bi = c + di$ if and only if $a = c$ and $b = d$.
Addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
Multiplication: $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$.

Note that the definition of multiplication is consistent with the property that $i^2 = -1$. For we can multiply $(a + bi)\cdot(c + di)$ by ordinary algebra and obtain $ac + i(bc + ad) + i^2(ad)$. When we replace i^2 with -1 and rearrange, we obtain the formula in the definition.

We will now give an alternative development of the complex numbers in a logical and nonimaginary fashion. A complex number is defined to be an ordered pair of real numbers (a,b). The complex number $(a,0)$ is called the real part, and $(0,b)$ the imaginary part of the complex number (a,b). The pairs $(a,0)$ are identified with the real numbers a and $(0,b)$ is a pure imaginary number. The arithmetic of complex numbers is then given by the following basic definitions:

Equality: Two complex numbers (a,b) and (c,d) are said to be equal if and only if $a = c$ and $b = d$.