Jednovýběrové a dvouvýběrové testy

Parametrické a neparametrické testy

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Petr Seďa

Pravděpodobnost a statistika II

2025

Vybrané jednovýběrové testy parametrických hypotéz

a) test o rozptylu (χ^2-test), viz přednáška č. 12,

b) test o střední hodnotě (z-test, t-test), viz přednáška č. 12,

c) testy o mediánu (kvantilový (mediánový) test, Wilcoxonův test),

d) testy o parametru π alternativního rozdělení.

Jednovýběrový χ^2-test

Předpokládejme, že máme normálně rozdělenou populaci se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 a **žádný z parametrů μ, σ^2 neznáme**. Na základě výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z dané populace chceme ověřit předpoklad, zda rozptyl populace σ^2 se rovná hodnotě σ_0^2.

Test o rozptylu

<table>
<tr><th>Nulová hypotéza H_0</th><th>Alternativní hypotéza H_A</th><th>Testové kritérium $T(\boldsymbol{X})$</th><th>Nulové rozdělení</th><th>p-hodnota</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\sigma^2 = \sigma_0^2$</td><td>$\sigma^2 < \sigma_0^2$</td><td rowspan="3">$\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$</td><td rowspan="3">$\chi^2_{n-1}$</td><td>$F_0(x_{OBS})$</td></tr>
<tr><td>$\sigma^2 > \sigma_0^2$</td><td>$1 - F_0(x_{OBS})$</td></tr>
<tr><td>$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$</td><td>$2min\{F_0(x_{OBS}); 1 - F_0(x_{OBS})\}$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Předpoklad testu: Populace má normální rozdělení s neznámou střední hodnotou.</td></tr>
</table>

Jednovýběrový z-test

Má-li populace normální rozdělení o **známém rozptylu $\boldsymbol{\sigma^2}$**, používáme tzv. jedno výběrový z-test. Tento test (viz tabulka) uvádíme pouze pro zajímavost - v praxi se totiž obvykle nesetkáváme se situaci, kdy bychom znali rozptyl populace a neznali její střední hodnotu.

Jednovýběrový z-test

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium $T(\boldsymbol{X})$	Nulové rozdělení	p-hodnota
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$	$N(0;1)$	$F_0(x_{OBS})$
	$\mu > \mu_0$			$1 - F_0(x_{OBS})$
	$\mu \neq \mu_0$			$2min\{F_0(x_{OBS}); 1 - F_0(x_{OBS})\}$
Předpoklad testu: Populace má normální rozdělení se známým rozptylem σ^2.				

Jednovýběrový t-test

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Máme-li normálně rozdělenou populaci s **neznámou střední hodnotou μ a neznámým rozptylem σ^2**, použijeme k ověření předpokladu, že se střední hodnota (populační průměr) μ rovná určité hodnotě μ_0 jednovýběrový t-test.

Jednovýběrový t-test

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium $T(\boldsymbol{X})$	Nulové rozdělení	p-hodnota
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$	t_{n-1}	$F_0(x_{OBS})$
	$\mu > \mu_0$			$1 - F_0(x_{OBS})$
	$\mu \neq \mu_0$			$2min\{F_0(x_{OBS}); 1 - F_0(x_{OBS})\}$
Předpoklad testu: Populace má normální rozdělení s neznámým rozptylem.				

Jak postupovat pokud není splněn předpoklad normality?

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

1. Původní veličinu **transformujeme** (např. pomocí logaritmu, druhé odmocniny či převrácené hodnoty) na novou veličinu, pro kterou je model normálního rozdělení přijatelný.
2. Požadovanou analýzu potom provedeme **na transformované** veličině.
3. Výsledky analýzy (např. průměry či intervaly spolehlivosti) lze pro účely prezentace výsledků **zpětně transformovat**.

Pokud nenajdeme vhodnou transformaci na normální rozdělení, nabízí statistika jiné přístupy založené např. na tzv. **neparametrických (robustních) metodách**.

Neparametrické testy – testy, které nemají předpoklady ohledně typu rozdělení populace. Mají ale nižší sílu testu než jejich parametrické alternativy.

Neparametrický test střední hodnoty – kvantilový (mediánový) test

Kvantilový test umožňuje na základě výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ověřit předpoklad, že se $100 \cdot p\%$ kvantil x_p rovná určité hodnotě x_{p_0}.

Používáme jej zejména jako **mediánový test** v případech, kdy chceme testovat střední hodnotu populace, která **má výrazně zešikmené rozdílení**.

Jelikož tento test má malou sílu (pravděpodobnost chyby II. druhu je velká ve srovnání s jinými testy), je vhodné mít k dispozici výběr o větším rozsahu.

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Nechť náhodná veličina Y modeluje počet pozorování v náhodném výběru, u nichž je pozorovaná hodnota náhodné veličiny X menší než testována hodnota x_{p_0}, tj. $x_p < x_{p_0}$.

Neparametrický test střední hodnoty – kvantilový (mediánový) test

Je zřejmé, že platí-li nulová hypotéza, pak pravděpodobnost, že nějaké pozorování bude menší než x_{p_0} je p.

Počet pozorování v náhodném výběru, která jsou menší než x_{p_0}, má proto, za předpokladu platnosti nulové hypotézy, binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n, p)$.

Kvantilový test

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium $T(\boldsymbol{X})$	Nulové rozdělení	p-hodnota
$x_p = x_{p_0}$	$x_p < x_{p_0}$	Y, kde Y … počet pozorování v náhodném výběru, u nichž je $x < x_{p_0}$	$Bi(n; p)$	$F_0(x_{OBS})$
	$x_p > x_{p_0}$			$1 - F_0(x_{OBS})$
	$x_p \neq x_{p_0}$			$2min\{F_0(x_{OBS}); 1 - F_0(x_{OBS})\}$
Předpoklad testu: ---				

Neparametrický test střední hodnoty – Wilcoxonův test

Dalším příkladem neparametrického testu je Wilcoxonův test. Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ze **spojitého rozdělení** s hustotou f, která je **symetrická** kolem bodu a. Z toho plyne, že a musí být rovno mediánu $x_{0,5}$. Jednovýběrový Wilcoxonův test je určen k testování hypotézy $x_{0,5} = x_{0,5_0}$. Při volbě alternativní hypotézy máme opět tři možnosti: $x_{0,5} < x_{0,5_0}, x_{0,5} > x_{0,5_0}, x_{0,5} \neq x_{0,5_0}$.

Je-li některá z veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rovna testované hodnotě $x_{0,5_0}$, obvykle toto pozorování z výběrového souboru vypustíme. Položme $Y_i = X_i - x_{0,5_0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Veličiny Y_i seřadíme vzestupně podle jejich absolutní hodnoty:

$$|Y_{(1)}| \leq |Y_{(2)}| \leq \cdots \leq |Y_{(n)}|.$$

Označme R_i^+ **pořadí veličiny** $|Y_{(i)}|$. Nechť $S^+ = \sum_{Y_i \geq 0} R_i^+$, $S^- = \sum_{Y_i < 0} R_i^+$.

Testová statistika má tvar: $T(X) = \min(S^+, S^-)$.

Neparametrický test střední hodnoty – Wilcoxonův test

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Je-li alternativní hypotéza ve tvaru $x_{0,5} \neq x_{0,5_0}$, pak, dle klasického testu, nulovou hypotézu zamítneme na hladině významnosti α v případě, že pozorovaná hodnota testového kritéria je menší nebo rovna tabelované hodnotě $\omega_n \alpha$ (viz další snímek).

Wilcoxonův test

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium $T(\boldsymbol{X})$	Kritický obor
$x_{0,5} = x_{0,5_0}$	$x_{0,5} \neq x_{0,5_0}$	$T(\boldsymbol{X}) = min(S^+; S^-)$ (viz výše)	$(0; \omega_n \alpha)$, kde $\omega_n \alpha$ najdete v tabulce T6
Předpoklad testu: symetrie hustoty f kolem mediánu			

Neparametrický test střední hodnoty – Wilcoxonův test

Kritické hodnoty jednovýběrového Wilcoxonova testu

n	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
6	0	-
7	2	-
8	3	0
9	5	1
10	8	3
11	10	5
12	13	7
13	17	9
14	21	12
15	25	15
16	29	19
17	34	23
18	40	27
19	46	3
20	52	37
21	58	42
22	65	48
23	73	54
24	81	61
25	89	68
26	98	75
27	107	83
28	116	91
29	126	100
30	137	109
31	147	118
32	159	128
33	170	138
34	182	148
35	195	159

n	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
36	208	171
37	221	182
38	235	194
39	249	207
40	264	220
41	279	233
42	294	247
43	310	261
44	327	276
45	343	291
46	361	307
47	378	322
48	396	339
49	415	355
50	434	373
51	453	390
52	473	408
53	494	427
54	514	445
55	536	465
56	557	484
57	579	504
58	602	525
59	625	546
60	648	567
61	672	589
62	697	611
63	721	634
64	747	657
65	772	681

Neparametrický test střední hodnoty – Wilcoxonův test

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Máme-li k dispozici výběr o dostatečně velkém rozsahu, využijeme toho, že S^+ má **asymptoticky normální rozdělení** s parametry:

$$\mathrm{E}(S^+) = \frac{1}{4}n(n+1), \qquad \mathrm{D}(S^+) = \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1).$$

Testová statistika pak má tvar:

$$T(X) = \frac{S^+ - \mathrm{E}(S^+)}{\sqrt{\mathrm{D}(S^+)}}.$$

a při platnosti nulové hypotézy má normované normální rozdìlení $\mathrm{N}(0;1)$.

Wilcoxonův test pro $n > 30$

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium $T(\boldsymbol{X})$	Nulové rozdělení	p-hodnota
$x_{0,5} = x_{0,5_0}$	$x_{0,5} < x_{0,5_0}$	$\frac{S^+ - E(S^+)}{\sqrt{D(S^+)}}$ (viz výše)	$N(0;1)$	$F_0(x_{OBS})$
	$x_{0,5} > x_{0,5_0}$			$1 - F_0(x_{OBS})$
	$x_{0,5} \neq x_{0,5_0}$			$2min\{F_0(x_{OBS}); 1 - F_0(x_{OBS})\}$
Předpoklad testu: symetrie hustoty f kolem mediánu				

Neparametrický test o parametru π alternativního rozdělení

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Předpokládejme, že v sérii n nezávislých opakování pokusu se nějaký náhodný jev A, který má stálou, ale neznámou pravděpodobnost, vyskytl X-krát.

Náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lze považovat za výběr z alternativního rozdělení $\mathrm{A}(\pi)$. Počet výskytu jevu A v takovéto skupině n opakování pokusu (náhodnou veličinu X) lze považovat za náhodnou veličinu s binomickým rozdělením $\mathrm{Bi}(n, \pi)$.

Na základě těchto údajů chceme ověřit předpoklad, že parametr π se rovná určité hodnotě π_0.

Neparametrický test o parametru π alternativního rozdělení

Neznámou pravděpodobnost odhadujeme výběrovou relativní četnosti p výskytu jevu A, tzn. podílem X/n. Jde nám o ověření, zda se pozorovaná relativní četnost (p) a předpokládaná pravděpodobnost (π_0) liší statisticky významně nebo zda lze jejich rozdíl přisoudit náhodným vlivům. Pro provedení tohoto testu musíme mít k dispozici výběr o dostatečném rozsahu n, tj. $n > \frac{9}{p(1-p)}$.

Test o parametru π alternativního rozdělení

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium $T(\boldsymbol{X})$	Nulové rozdělení	p-hodnota
$\pi = \pi_0$	$\pi < \pi_0$	$\frac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\sqrt{n}$	$N(0;1)$ (viz kap. 3.5)	$F_0(x_{OBS})$
	$\pi > \pi_0$			$1 - F_0(x_{OBS})$
	$\pi \neq \pi_0$			$2min\{F_0(x_{OBS}); 1 - F_0(x_{OBS})\}$
Předpoklad testu: $n > \frac{9}{p(1-p)}$				

Stručný přehled jednovýběrových testů

Jednovýběrové parametrické testy

Název testu	Testovaný parametr	Předpoklady testu	Testová statistika $T(X)$	Nulové rozdělení	Poznámka
Test o rozptylu	rozptyl σ^2 (směrodatná odchylka σ)	normalita populace, neznámé μ	$\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$	χ^2_{n-1}	Při čistém testu významnosti nelze použít oboustrannou alternativu.
Jednovýběrový z test	střední hodnota μ	normalita populace, známé σ^2	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$	$N(0;1)$	
Jednovýběrový t test		normalita populace, neznámé σ^2	$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$	t_{n-1}	

Stručný přehled jednovýběrových testů

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Jednovýběrové neparametrické testy

Název testu	Testovaný parametr	Předpoklady testu	Testová statistika $T(X)$	Nulové rozdělení	Poznámka
Test o parametru π alternativního rozdělení	Pravděpodob-nost π	$n > \frac{9}{p(1-p)}$	$\frac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\sqrt{n}$	$N(0;1)$	
Kvantilový test	$100p\%$ kvantil x_p		Y, kde Y modeluje počet pozorování v náhodném výběru, která jsou menší než x_{p_0}.	$Bi(n;p)$	V případě, že testujeme medián, tzn. pro $p = 0{,}5$, používáme pro tento test speciální označení - **mediánový test.**
Jednovýběrový Wilcoxonův test	medián $x_{0{,}5}$		$min(S^+;S^-)$, kde $S^+ = \sum_{Y_i \geq 0} R_i^+$, $S^- = \sum_{Y_i < 0} R_i^+$	Kritické hodnoty jsou tabelovány (Tab. T6)	Je-li pozorovaná hodnota testové statistiky menší nebo rovna kritické hodnotě, zamítáme H_0.
		$n > 30$	$\frac{S^+ - E(S^+)}{\sqrt{D(S^+)}}$, kde $E(S^+) = \frac{1}{4}n(n+1)$, $D(S^+) = \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)$	$N(0;1)$	

Stručný přehled jednovýběrových testů

Typ proměnné	Požadovaný typ analýzy	Předpoklady	Testy, resp. intervalové odhady
Spojitá proměnná	Ověření variability	Normalita	Test o rozptylu (test o směr. odchylce)
			Intervalový odhad rozptylu (směr. odchylky)
	Ověření polohy	Normalita	Studentův t-test, (test o střední hodnotě)
			Intervalový odhad střední hodnoty
		Výběr většího rozsahu	Znaménkový test (test o mediánu)
		Symetrické rozdělení	Wilcoxonův test (test o mediánu)
Dichoto-mická proměnná (0-1)	Ověření shody relativní četnosti s očekávanou pravděpodobností	$n > \frac{9}{p(1-p)}$	Test o parametru π binomického rozdělení
			Intervalový odhad parametru π binomického rozdělení

Vybrané dvouvýběrové testy parametrických hypotéz

a) test o shodě rozptylů (F-test),

b) testy o shodě středních hodnot (z-test, t-test, Aspinové-Welchův test),

c) test o shodě mediánů (Mannův-Whitneyův test),

d) test o shodě parametrů dvou binomických rozdělení (test homogenity dvou binomických rozdělení),

e) párové testy (párový t-test).

Dvouvýběrový F-test

Mějme dva **nezávislé** výběry $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ a $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$, které pocházejí z populací, které mají rozdělení $\mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, resp. $\mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$. Parametry $\mu_x, \sigma_x^2, \mu_y, \sigma_y^2$ neznáme. Nejlepšími bodovými odhady neznámých rozptylů σ_x^2 a σ_y^2 jsou výběrové rozptyly: $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}{n_1 - 1}$, $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n_2 - 1}$.

Nulovou hypotézu formulujeme ve tvaru $\mathrm{H}_0\colon \sigma_x^2 = \sigma_y^2$

Při volbě alternativy máme tentokrát, podobně jako při testu o rozptylu, pouze dvě možnosti. Oboustranné alternativě se v případě čistého testu významnosti vyhneme, protože definovaný výpočet p-hodnoty pro oboustrannou alternativu je podmíněn tím, že nulové rozdělení testové statistiky je symetrické.

Protože testová statistika používaná pro F-test má **Fischerovo-Snedecorovo rozdělení** a to není symetrické, není tato podmínka splněna. Alternativní hypotéza má tvar $\mathrm{H_A}\colon \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ nebo $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Volba vhodné alternativy je dána vztahem mezi výběrovými rozptyly jednotlivých výběrů.

Testová statistika: $T(X,Y) = \dfrac{\frac{S_x^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$, která má za předpokladu platnosti nulové hypotézy

Fisher−Snedecorovo rozdělení s $n_1 - 1$ stupni volnosti pro čitatele a $n_2 - 1$ stupni volnosti pro jmenovatele.

Dvouvýběrové testy o shodě dvou středních hodnot

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Mějme dva **nezávislé** výběry $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ a $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$, které pocházejí z populací, které mají **rozdělení** $\mathbf{N(\boldsymbol{\mu_x}, \boldsymbol{\sigma_x^2})}$**, resp.** $\mathbf{N(\boldsymbol{\mu_y}, \boldsymbol{\sigma_y^2})}$. Označme výběrové průměry: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{n_1}$, $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n_2}$ a výběrové rozptyly: $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}{n_1 - 1}$, $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n_2 - 1}$.

Při volbě alternativy $\mathrm{H_A}$ máme **tři možnosti**:

a) $\mu_x < \mu_y$,

b) $\mu_x > \mu_y$,

c) $\mu_x \neq \mu_y$.

Volba vhodné alternativy bývá v tomto případě dána vztahem mezi průměry jednotlivých výběrů.

Při výběru testu vhodného pro ověření shody dvou středních hodnot hraje důležitou roli, jaké máme informace o rozptylech populací, z nichž byly náhodné výběry pořízeny. Testové kritérium vybíráme na základě splnění některého ze **tří předpokladů**:

a) Známe rozptyly obou populací,

b) Rozptyly populací neznáme, ale předpokládáme, že jsou shodné.

c) Rozptyly populací neznáme, a nemůžeme předpokládat, že jsou shodné.

Dvouvýběrový z-test

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Známe-li rozptyly $\boldsymbol{\sigma_x^2}, \boldsymbol{\sigma_y^2}$, použijeme jako testové kritérium statistiku:

$$T(X,Y) = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1}+\frac{\sigma_y^2}{n_2}}},$$

která má za předpokladu platnosti nulové hypotézy **normované normální rozdělení $\mathbf{N(0,1)}$**.

Dále postupujeme dle čistého testu významnosti. Zdůrazněme, že podobně jako s jednovýběrovým z-testem, ani s dvouvýběrovým z-testem se v praxi běžně nesetkáváme.

Dvouvýběrový t-test

Pro porovnání středních hodnot **dvou normálních populací s neznámými**, avšak **shodnými rozptyly** používáme dvouvýběrový t-test. Za testové kritérium volíme statistiku:

$$T(X,Y) = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_x^2+(n_2-1)S_y^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}},$$

která má za předpokladu platnosti nulové hypotézy **Studentovo rozdělení** s $v = n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti.

Dále postupujeme dle čistého testu významnosti.

Dvouvýběrový Aspinové-Welchův test

V případě, že **rozptyly normálně rozdělených populací neznáme** a **nemůžeme předpokládat, že jsou shodné** lze použít pro ověření shody středních hodnot například Aspinové-Welchův test. Za **testové kritérium** volíme statistiku:

$$T(X,Y) = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_1}+\frac{S_y^2}{n_2}}},$$

která má za předpokladu platnosti nulové hypotézy **Studentovo rozdělení** s v stupni volnosti, kde

$$v \doteq \frac{\left(\frac{S_x^2}{n_1}+\frac{S_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_x^2}{n_1}\right)} + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S_y^2}{n_2}\right),^2$$

kde v je nutno zaokrouhlit na celé číslo.

Dále postupujeme dle čistého testu významnosti.

Dvouvýběrový Mannův-Whitneyův test

Mannův-Whitneyův test je **neparametrickým testem o shodě mediánů**. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ jsou dva nezávislé výběry ze spojitých rozdělení se **stejným rozptylem a tvarem**. Označení výběrů se volí tak, aby platilo $n_1 \geq n_2$.

Testujeme nulovou hypotézu o **shodě mediánů**, tj. $\mathrm{H}_0\colon x_{0,5} = y_{0,5}$.

Při volbě alternativy H_A máme **tři možnosti**:

a) $x_{0,5} < y_{0,5}$,
b) $x_{0,5} > y_{0,5}$,
c) $x_{0,5} \neq y_{0,5}$.

Volba vhodné alternativy je v tomto případě dána vztahem mezi mediány jednotlivých výběrů.

Dvouvýběrový Mannův-Whitneyův test

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Postup výpočtu testového kritéria:

1. Všech $n_1 + n_2$ hodnot získaných z výběrů $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ uspořádáme vzestupně a jednotlivým hodnotám přiřadíme pořadí. Nejnižší hodnotě je přiřazena hodnota 1, nejvyšší hodnotě je přiřazena hodnota $n_1 + n_2$, pokud soubor obsahuje několik pozorování se stejnou hodnotou, je těmto hodnotám přirazeno tzv. průměrné pořadí.

2. Označíme T_1 součet pořadí hodnot $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ a T_2 součet pořadí hodnot $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$. Platí, že $T_1 + T_2 = \frac{1}{12}(n_1 + n_2)\,(n_1 + n_2 + 1)$.

3. Vypočteme statistiky: $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1$, $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2$. Platí, že $U_1 + U_2 = n_1 n_2$.

4. Vypočteme **testové kritérium** jako: $T(X, Y) = \min\,(U_1, U_2)$, které má za předpokladu platnosti $\mathrm{H_0}$ rozdělení, jehož kritické hodnoty jsou tabelovány (viz další snímek).

5. Pokud je pozorovaná hodnota testového kritéria menší nebo rovna příslušné kritické hodnotě, **nulová hypotéza se zamítá**.

Dvouvýběrový Mannův-Whitneyův test

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

T7. Kritické hodnoty Mannova-Whitneyova testu

$\alpha = 0{,}05$	n																		
m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	-	-	0																
5	-	0	1	2															
6	-	1	2	3	5														
7	-	1	3	5	6	8													
8	0	2	4	6	8	10	13												
9	0	2	4	7	10	12	15	17											
10	0	3	5	8	11	14	17	20	23										
11	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30									
12	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37								
13	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45							
14	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55						
15	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64					
16	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75				
17	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87			
18	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99		
19	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	
20	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127
21	2	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119	126	134
22	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141
23	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132	140	149
24	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138	147	156
25	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145	154	161
26	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151	161	171
27	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158	168	178
28	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164	175	186
29	4	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171	182	193
30	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177	189	200

Dvouvýběrový Mannův-Whitneyův test

Pro velká n_1 a n_2 (v praxi pro $n_1 > 30$, $n_2 > 20$) lze použít **testové kritérium**:

$$T(X,Y) = \frac{\left(\min\,(U_1, U_2) - \frac{n_1 n_2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}},$$

které má za předpokladu platnosti nulové hypotézy **normované normální rozdělení** $\mathbf{N(0,1)}$.

Dále pak postupujeme dle obecného schématu čistého testu významnosti.

Dvouvýběrový test o shodě parametrů dvou binomických rozdělení

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Jednou z nejstarších a ve statistice stále se velmi často vyskytujících úloh je srovnání homogenity dvou binomických rozdělení.

Předpokládejme, že v sérii n_1 nezávislých opakování pokusu se nějaký náhodný jev A vyskytl X-krát.

Pak se pokusy nezávisle opakují za jiných podmínek tak, že v sérii n_2 opakování pokusu se náhodný jev A vyskytne Y-krát.

Počet výskytu jevu A ve skupině n_1 opakování pokusu (náhodnou veličinu X) lze považovat za náhodnou veličinu s rozdělením $\mathrm{Bi}(n_1, \pi_1)$, počet výskytů jevu A ve skupině n_2 opakování pokusu (náhodnou veličinu Y) pak lze považovat za náhodnou veličinu s rozdělením $\mathrm{Bi}(n_2, \pi_2)$), kde π_1, π_2 jsou neznámé pravděpodobnosti.

Na základě těchto údajů chceme testovat hypotézu: $\mathrm{H}_0\colon \pi_1 = \pi_2$.

Při volbě alternativy H_A máme **tři možnosti**:

a) $\pi_1 < \pi_2$,

b) $\pi_1 > \pi_2$,

c) $\pi_1 \neq \pi_2$.

Dvouvýběrový test o shodě parametrů dvou binomických rozdělení

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Označme $p_1 = \frac{X}{n_1}$ bodový odhad pravděpodobnosti π_1 a $p_2 = \frac{Y}{n_2}$ bodový odhad pravděpodobnosti π_2.

Volba vhodné alternativy je pak dána vztahem mezi relativními četnostmi jevu A v jednotlivých výběrech.

Pro provedení tohoto testu musíme mít k dispozici výběry o dostatečném rozsahu n_1, resp. n_2.

Rozsahy jednotlivých výběrů lze považovat za dostatečné, pokud jsou splněny podmínky: $n_1 > \frac{9}{p_1(1-p_1)}$ a $n_2 > \frac{9}{p_2(1-p_2)}$.

Testovým kritériem je statistika: $T(X,Y) = \frac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$, která má v případě platnosti nulové hypotézy přibližně normované normální rozdìlení $\mathrm{N}(0;1)$.

Dále pokračujeme podle obecného schématu čistého testu významnosti.

Párový t-test

Doposud jsme se věnovali dvouvýběrovým testům, které umožnují na základě **dvou nezávislých výběrů** porovnat neznámé parametry dvou populací.

V praxi se však často stává také to, že u každé z n statistických jednotek zjišťujeme hodnoty nějakých **dvou spolu souvisejících znaků** (např. tlak krve před a po podání určitého léku, ostrost vidění levého a pravého oka, rychlost zavírání dveří automobilu měřena dvěma různými metodami, . . .).

Výsledkem zjišťování jsou pak **dvojice náhodných veličin** $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$, které tvoří **páry závislých pozorování** (jde o veličiny zjišťované na stejné statistické jednotce).

Můžeme chtít ověřit, zda výběry $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ pocházejí z rozdělení se stejnými středními hodnotami μ_x a μ_y, čili testovat hypotézu H_0: $\mu_x = \mu_y$.

Při volbě alternativy H_A máme **tři možnosti**:

a) $\mu_x < \mu_y$,

b) $\mu_x > \mu_y$,

c) $\mu_x \neq \mu_y$.

Párový t-test

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Definujme soubor rozdílů (diferencí) $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$, kde $D_i = X_i - Y_i$.

Lze předpokládat, že **náhodné veličiny** $(\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \ldots, \boldsymbol{D_n})$ **jsou nezávislé** a že mají stejné rozdělení se střední hodnotou $\mu = \mu_x - \mu_y$.

Test o **shodě dvou středních hodnot** prováděný na základě **dvou závislých výběrů** můžeme převést na **jednovýběrový test střední hodnoty** aplikovaný na soubor diferencí (rozdílů) D, tzn. můžeme testovat hypotézu $\mathrm{H}_0\colon \mu = 0$.

Lze-li předpokládat **normální rozdělení** veličin $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$, můžeme použít jednovýběrový t-test, nazývaný v tomto případě **párový t-test**.

Testovým kritériem je statistika: $T(X) = \frac{\bar{d}-\mu}{s_D}\sqrt{n}$, kde $\bar{d}$ je průměrný výběrový rozdíl a

$$s_D = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}}{n-1}.$$

Párový t-test

Statistika $T(X)$ má v případě platnosti nulové hypotézy Studentovo rozdělení s $n-1$ stupni volnosti.

Vzhledem k tvaru alternativní hypotézy určíme p-hodnotu podle vztahu p-hodnota $= 1 - F_0(x_{obs})$, kde $F_0(x)$ je distribuční funkce Studentova rozdělení s $n-1$ stupni volnosti.

Mají-li veličiny $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ **spojité rozdělení** s hustotou **symetrickou kolem mediánu**, pak hypotézu o tomto mediánu můžeme testovat **jednovýběrovým Wilcoxonovým testem** (tzv. **párový Wilcoxonův test**), popřípadě **mediánovým testem**, kterému v případě párového testu říkáme **test znaménkový**.

Stručný přehled dvouvýběrových testů

Dvouvýběrové parametrické testy pro nezávislé výběry

Název testu	Testované parametry	Předpoklady testu	Testová statistika $T(X,Y)$	Nulové rozdělení	Poznámka
test o shodě rozptylů	rozptyly σ_1^2, σ_2^2 (sm. odch. σ_1, σ_2)	nezávislé výběry, normalita populací, neznámé μ_1, μ_2	$\dfrac{\frac{S_X^2}{\sigma_X^2}}{\frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2}}$	F_{n_1-1,n_2-1}	Při čistém testu významnosti nelze použít oboustran. alternativu.
dvouvýběrový z test		nezávislé výběry, normalita populací, známé σ_1^2, σ_2^2	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_1}+\frac{\sigma_Y^2}{n_2}}}$	$N(0;1)$	
dvouvýběrový t test	střední hodnoty μ_1, μ_2	nezávislé výběry, normalita populací, neznámé σ_1^2, σ_2^2, $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_X^2+(n_2-1)s_Y^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$t_{n_1+n_2-1}$	
Aspinové – Welchův test		nezávislé výběry, normalita populací, neznámé σ_1^2, σ_2^2, $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$\dfrac{(\bar{X}_{TAB}-\bar{X}_{NIK})-(\mu_{TAB}-\mu_{NIK})}{\sqrt{\frac{S_{TAB}^2}{n_{TAB}}+\frac{S_{NIK}^2}{n_{NIK}}}}$	t_ν kde, $\nu=\dfrac{\left(\frac{S_{TAB}^2}{n_{TAB}}+\frac{S_{NIK}^2}{n_{NIK}}\right)^2}{\frac{1}{n_{TAB}-1}\left(\frac{S_{TAB}^2}{n_{TAB}}\right)^2+\frac{1}{n_{NIK}-1}\left(\frac{S_{NIK}^2}{n_{NIK}}\right)^2}$	

Stručný přehled dvouvýběrových testů

Dvouvýběrové neparametrické testy pro nezávislé výběry

Název testu	Testovaný parametr	Předpoklady testu	Testová statistika	Nulové rozdělení	Poznámka
Mannův-Whitneyův test	mediány $x_{0,5}$, $y_{0,5}$	nezávislé výběry ze spojitých rozdělení se stejným rozptylem a tvarem.	$min(U_1, U_2)$, kde $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1$, $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2$	Kritické hodnoty rozdělení jsou uvedeny v tabulce	Označení výběrů se volí tak, aby platilo $n_1 \geq n_2$. Je-li pozorovaná hodnota testové statistiky menší nebo rovna kritické hodnotě, zamítáme H_0.
test homogenity dvou binomických rozdělení	pravděpodobnosti π_1, π_2	$n_1 > \frac{9}{p_1(1-p_1)}$, $n_2 > \frac{9}{p_2(1-p_2)}$	$\dfrac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$	$N(0;1)$	

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Stručný přehled dvouvýběrových testů

SLEZSKÁ UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV V OPAVĚ

Typ proměnné	Požadovaný typ analýzy	Předpoklady		Testy, resp. intervalové odhady
Dvě nezávislé spojité proměnné	Ověření shody rozptylů (homoskedasticity)	Normalita		F-test (test shody rozptylů)
				Intervalový odhad *poměru* rozptylů, resp. směr. odchylek
		—		Leveneův test
	Ověření shody měr polohy (středních hodnot, resp. mediánů)	Normalita	Shoda rozptylů (homoskedasticita)	Dvouvýběrový Studentův t-test (test shody stř. hodnot)
				Intervalový odhad rozdílu stř.hodnot
			Různé rozptyly (heteroskedasticita)	Aspinové-Welchův test (test shody stř. hodnot)
				Intervalový odhad rozdílu stř.hodnot
		—		Mannův-Whitneyův test test shody mediánů
Párová (spojitá) data	Ověření shody úrovně párových dat	Normalita		Párový studentův t-test
				Intervalový odhad střední hodnoty rozdílů
		Výběry většího rozsahu		Párový znaménkový test
		Symetrické rozdělení		Wilcoxnův párový test
Dvě dichotomické proměnné	Ověření shody pravděpodobností	$n_i > \frac{9}{p_i(1-p_i)}, i = 1,2$		Test homogenity dvou binomických rozdělení
				Intervalový odhad rozdílu parametru binomických rozdělení

Literatura

1. HENDL, Jan. *Přehled statistických metod zpracování dat.* Praha: Portál, 2004. ISBN 80-7178-820-1. **(kapitola 6).**

Děkuji za pozornost.