Zápočtové příklady - Algebra I

2019

1. Jsou zadány dvě algebraické struktury $(S, +), (L, \star)$, kde S značí množinu všech celých sudých čísel, L množinu všech celých lichých čísel, $+$ značí sčítání a operace $\star$ je definována $a \star b = a + b + 1$.
   Určete o jaké nejvyšší algebraické struktury se jedná.

2. Jsou zadány matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Zjistěte, které z těchto matic mají stejnou řádkovou hodnost.

3. Najděte normovaného největšího společného dělitele polynomů $f(x) = x^4 + 128x^3 + 187x^2 - 128x - 188$ a $g(x) = x^4 + 59x^2 - 60$.

4. Je zadána pologrupa $(\mathbb{Z}, \star)$, kde $a \star b = a + b + 2$. Najděte na ní neutrální prvek (pokud existuje).

5. Najděte normovaného největšího společného dělitele polynomů $f(x) = x^3 + 2x^2 - 21x + 18$ a $g(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$.

6. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte následující soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 11 \\ -x_2 + x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

7. Jsou zadány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Vypočítejte následující matice (pokud existují):
   - $D = B^T \cdot C + A$,
   - $E = A \cdot C^T \cdot B$,
   - $F = (C \cdot B)^T + C$,
   - $G = A^2 \cdot (B \cdot C)^T$,
   - $H = ((B^T)^2)^T$.

8. Nalezněte inverzní matici k matici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Jaké hodnoty musí nabývat parametr φ, aby byl $\det D = 0$?

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$