9 MATEMATICKÉ METODY OPTIMALIZACE PORTFOLIA

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

V této kapitole si zopakujete některé poznatky z oboru financí, konkrétně z tzv. matematiky cenných papírů, teorie portfolia a finančního modelování. V návaznosti na kapitolu o vícekriteriálním programování zformulujeme úlohu optimalizace PF jako dvojkriteriální úlohu VKMP. Úloha optimalizace PF spočívá v nalezení takových relativních podílů aktiv v PF, aby se maximalizoval očekávaný výnos PF a minimalizovalo se jeho riziko.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- sestavit úlohu optimalizace portfolia aktiv s využitím historických dat o jejich cenách,
- řešit úlohu optimalizace portfolia aktiv s použitím Excelu - Řešitele.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Optimalizace portfolia, výnos, riziko, efektivní hranice, eficientní portfolio, stochastický model portfolia.

9.1 Akciové analýzy

9.1.1 Fundamentální analýza

Fundamentální analýza

K analýze akcií lze přistupovat různě. **Fundamentální analýza** předpokládá, že každá akcie má v daném okamžiku určitou "vnitřní hodnotu". Předmětem zkoumání fundamentální analýzy je hledání podhodnocených cenných papírů k nákupu a nadhodnocených k prodeji (tzv. picking). Hledá významné faktory, které mohou podstatně ovlivňovat vnitřní hodnotu akcie.

Globální analýza

Odvětvová analýza

Fundamentální analýzu lze provádět na několika úrovních. **Globální analýza** zkoumá krátkodobé i dlouhodobé vlivy ekonomických makroagregátů na ceny akcií (inflace, hospodářského růstu, úrokových sazeb atd.). **Odvětvová analýza** měří citlivost odvětví na hospodářský cyklus, rozsah a způsob vládní regulace, sílu odborů, míru inovací v daném odvětví atd. Pomocí **finanční analýzy** jednotlivých titulů se pak stanoví odhad vnitřní hodnoty příslušné akcie.

Finanční analýza

Dividendový diskontní model

U společností ve fázi dospělosti (kdy lze lépe prognózovat některé veličiny) se pro účel stanovení vnitřní hodnoty akcie používají tzv. **dividendové diskontní modely**. Ty vychází z předpokladu, že vnitřní hodnota akcie je současnou hodnotou veškerých budoucích příjmů z akcie. Je to jistá analogie k oceňování dluhopisů. V případě akcií však neexistuje doba splatnosti, výplaty dividend jsou nejisté a jistina je nahrazena očekávanou prodejní cenou. Při stanovení požadované výnosové míry je třeba zahrnout i jakousi "prémii" za riziko a k tomu lze využít indexového modelu (viz další kapitola). Ke stanovení míry růstu dividend lze zase využít informace o míře zadrženého zisku na dosahovaném čistém zisku společnosti.

Ziskové modely

Na vyspělých trzích patří mezi často používané metody oceňování akcií tzv. **ziskové modely**. Jsou obvykle založeny na poměru P/E (tržní kurs/čistý zisk na akcii). P/E poměr je pozitivně ovlivněn růstovými příležitostmi trhu a negativně požadovanou výnosovou mírou, která je pozitivně ovlivněna především mírou inflace. Poptávka po akciích s růstem P/E poměru většinou klesá.

9.1.2 Psychologická analýza

Psychologická analýza

Psychologická analýza předpokládá, že kursy jsou v krátkém období silně ovlivněny psychologickými faktory (např. případ start-up firem). Předmětem zkoumání není kurs samotný, ale chování investorů. Teoretickým východiskem je mimo jiné známá Le Bonova práce "Psychologie davu". A. Kostolany razí filosofii "plout proti proudu" (uvádí max. 10% sofistikovaných investorů), a tak obelstít burzovní koloběh střídání cenových vzestupů a sestupů.

9.1.3 Technická analýza

Technická analýza

Technická analýza předpokládá, že kursy akcií se pohybují v trendech (bull - bear, akumulační a distribuční fáze apod.). Předmětem analýzy jsou časové řady tržních cen, objemů obchodů a různých indexů. Technický analytik se pokouší rozpoznat v pohybu kursu určitý tvar (formaci) a podle něj časuje nákup a prodej libovolného cenného papíru (timing). K tomu používají matematické modely, grafické metody (linie podpory a odporu, vlajky, prapory atd.) a další technické nástroje (např. klouzavé průměry, oscilátory ap.). V této kapitole budeme navazovat především na technickou analýzu akcií.

9.1.4 Finanční analýza

Z finančních výkazů akciové společnosti se počítají nejrůznější poměrové ukazatele, které jsou následně používány v rámci akciových analýz. Ukazatele rentability informují investora o

ROA
ROE
Debt ratio
Leverage ratio

výkonnosti společnosti. Nejpoužívanějšími jsou ukazatele **ROA** (čistý zisk/celková aktiva) a **ROE** (čistý zisk/vlastní jmění). O úrovni finančního rizika firmy mnohé vypovídají ukazatele zadluženosti. Jsou to např. **debt ratio** (cizí zdroje/celková aktiva) nebo **leverage ratio** (cizí zdroje/ vlastní jmění).

9.2 Teorie portfolia, výnos a riziko

Investoři na finančních trzích neinvestují celý svůj majetek jen do jediného finančního instrumentu, byť by byli přesvědčeni, že je to v danou chvíli nejvýhodnější. Zejména v případě akcií vytvářejí s dostupných investičních aktiv určité soubory splňující jejich představy, které nazýváme (investiční) portfolio.

Portfolio

V ekonomice je **portfolio (PF)** odborný termín mající význam: **souhrn akcií a ostatních aktiv držených investorem.** Někdy také v užším významu: skladba cenných papírů. Obecně se investor snaží vytvořit takové portfolio, aby minimalizoval možná rizika a maximalizoval zisk, což jsou protichůdné snahy.

Výnos akcie
Kapitál. výnos
Výnos z dividend

Výnos akcie je tvořen zpravidla dvěma složkami. **Kapitálový výnos** je rozdíl mezi nákupní a prodejní cenou akcie. Druhou složkou je **výnos z dividend**.

Riziko
Směrodatná odchylka

Rizikem investice (akcie, PF) budeme rozumět kolísání její hodnoty v čase. Riziko obvykle měříme **směrodatnou odchylkou** ("průměrné" vychýlení od průměru).

Rovina

Jednotlivá PF je pro názornost výhodné graficky znázorňovat v tzv. (σ,R)-**rovině**, v níž každému PF odpovídá bod s vodorovnou souřadnicí ve výši rizika a svislou souřadnicí ve výši výnosu PF.

Teorii portfolia lze charakterizovat jako hledání takové kombinace aktiv, při níž je dosažen požadovaný přiměřený výnos ve vztahu k přiměřenému riziku. Pozoruhodnou vlastností portfolií je možnost vytvářet portfolia s menším rizikem, než jsou rizika všech jednotlivých titulů zastoupených v portfoliu. Důvodem této vlastnosti PF jsou záporné kovarianční vazby mezi zastoupenými tituly (mnohdy stačí i slabé pozitivní kovariance/korelace). **Eficientní portfolio** je pak takové portfolio, které při daném výnosu minimalizuje riziko (resp. při daném riziku maximalizuje výnos). Výběr konkrétního portfolia záleží na vztahu investora k riziku. Jednotliví investoři se mohou lišit svými investičními preferencemi především stupněm své **averze vůči riziku**. Investor s mírnou (resp. silnou) averzí vůči riziku přistoupí na jednotkový nárůst rizika ve svém PF za malou (resp. velkou) prémii ve formě navýšení výnosu. **Indiferenční křivka** je množina portfolií v *(σ,R)*-rovině která, jsou z hlediska investorových preferencí stejně přijatelná (indiferentní), jinak řečeno, každý bod indiferenční křivky má pro investora stejný užitek. Indiferenční křivky jsou v *(σ,R)*-rovině navzájem paralelní. Čím je investor více averzní vůči riziku, tím jsou zřejmě jeho indiferenční křivky strmější. Pro udržení jednoduchosti nebudeme zpočátku uvažovat možnost vypůjčování a zapůjčování peněz pro účely okamžitého nákupu jiných aktiv - tzv. **krátký prodej** a existenci **bezrizikového aktiva,** tj. aktiva s nulovým rizikem.

Eficientní portfolio

Averze proti riziku

Indiferenční křivka

Krátký prodej

Bezriziková aktiva

9.3 Klasický stochastický model PF – historicý přístup

V tomto odstavci zformulujeme **klasický stochastický model PF** jakožto problém dvojkriteriálního matematického programování. Cílem modelu je nalezení takové skladby PF na zadané trvání *N* časových jednotek z daných *M* aktiv, aby se maximalizoval výnos PF měřený jeho střední hodnotou a minimalizovalo se riziko měřené směrodatnou odchylkou. K dispozici jsou přitom časové řady cen jednotlivých aktiv na *T* časových jednotek, přitom *T* je mnohem větší než *N*. V tomto období se předpokládají konstantní vnější podmínky, a proto je možné předpokládat, že výnos každého aktiva je náhodná veličina, jejíž realizace se projevuje v každé časové jednotce. Stejně tak výnos celého PF je náhodná veličina vzniklá jako vážený průměr individuálních výnosů, přičemž váhy jsou tvořeny relativními podíly uvažovaných aktiv. K formulaci modelu budeme používat následující symboly, označení a předpoklady:

Klasický stochastický model PF

M - počet aktiv (AK) v portfoliu PF (např. akcií),
N - počet časových jednotek trvání PF,
T - počet časových jednotek - délka časové řady $N < T$,
c_{it} - tržní cena i-tého AK v čase $t = 1,2,...,T$,
Z_i - relativní podíl i-tého AK v PF, přitom $\sum Z_i = 1$,
X_i - výnos i-tého AK za dobu trvání PF, tj. N, je **náhodná veličina**,
$R_i = E(X_i)$ - očekávaný výnos i-tého AK za dobu N je střední hodnota výnosu,
$X_{PF} = \sum Z_i X_i$ - výnos PF za dobu N (při rel. podílech aktiv Z_i) je náhodná veličina,
$R_{PF} = E(X_{PF}) = \sum R_i Z_i$ - očekávaný výnos PF za dobu N je střed. hodnota výnosu,
x_{it}- realizace náhod. veličiny X_i v čase t, $t = N+1, N+2,...,T$ (výnos i-tého AK v %),

$$x_{it} = \frac{c_{it} - c_{i(t-N)}}{c_{i(t-N)}} \qquad (9\text{-}1)$$

- výnos i-tého AK v čase t,

$$\hat{R}_i = \frac{1}{T\text{-}N} \sum_{i=N+1}^{T} x_i \qquad (9\text{-}2)$$

- odhad náhodné veličiny R_i, tj. odhad očekávaného výnosu i-tého AK,

$$\hat{R}_{PF} = \sum \hat{R}_i Z_i \qquad (9\text{-}3)$$

- odhad očekávaného výnosu PF.

Dále označíme

$\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ - kovariance výnosu i-tého a j-tého AK,

$\sigma_i = \sqrt{Var(X_i)}$

$\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = Cov(X_i, X_i) = Var(X_i)$ - rozptyl výnosu i-tého AK, - riziko výnosu i-tého AK,

$$\sigma_{PF} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_{ij} Z_i Z_j}$$

- riziko PF,

$$s_{ij} = \frac{1}{T - N} \sum_{t=N+1}^{T} (x_{it} - \hat{R}_i)(x_{jt} - \hat{R}_j) \qquad (9\text{-}4)$$

- odhad kovariance σ_{ij},

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{T - N} \sum_{t=N+1}^{T} (x_{it} - \hat{R}_i)^2} \qquad (9\text{-}5)$$

- odhad rizika výnosu i-tého AK za dobu trvání PF, tj. N,

$$s_{PF} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{M} s_{ij} Z_i Z_j} \qquad (9\text{-}6)$$

- odhad rizika výnosu PF za dobu trvání PF, tj. N.

Úloha optimalizace PF spočívá v nalezení takových podílů Z_i, $i = 1,2,...,M$, (relativní podíl i-tého AK v PF), při kterých $\sum Z_i = 1$, $Z_i \geq 0$, $i = 1,2,...,M$, takových, aby se maximalizoval očekávaný výnos PF (9-3) a minimalizovalo se riziko PF (9-6), tj.

$$R = \sum \hat{R}_i Z_i \to \text{MAX};$$
$$s = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{M} s_{ij} Z_i Z_j} \to \text{MIN}; \qquad (9\text{-}7)$$

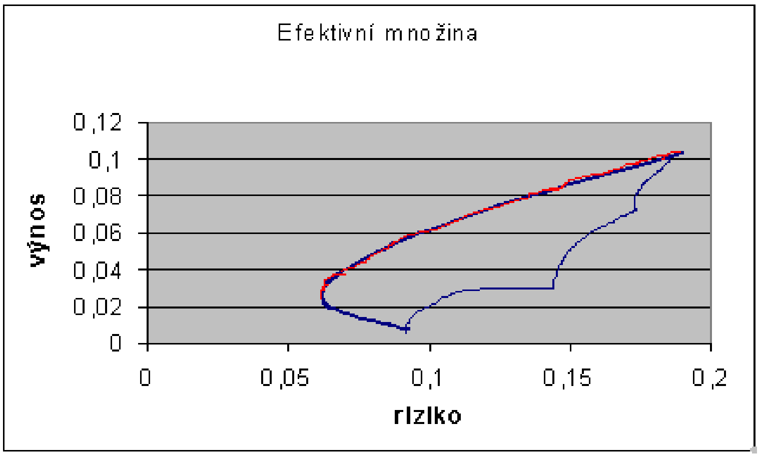
za podmínek

$$\sum Z_i = 1,\ Z_i \geq 0,\ i = 1,2,...,M. \qquad (9\text{-}8)$$

Úloha optimalizace PF je tedy úlohou dvojkriteriálního nelineárního matematického programování (účelová funkce s je totiž nelineární, ostatní funkce jsou lineární!). Obraz množiny všech nedominovaných (Paretovských) řešení úlohy (9-7), (9-8) v dvojrozměrném kriteriálním prostoru o souřadných osách σ a R má v teorii PF speciální název – nazývá se **efektivní hranice** portfolia. Množina všech přípustných PF vytváří v rovině σ - R útvar s charakteristickým tzv. deštníkovým tvarem (anglicky „umbrella shape“), viz Obr. 9.1. Příklad efektivní hranice PF je na Obr. 9.1. znázorněna červenou barvou. Každý bod křivky efektivní hranice představuje dvojici $s, R,$ která odpovídá **eficientnímu portfoliu**, což je nedominované (Paretovské) řešení úlohy (9-7), (9-8). Eficientní portfolio představuje určité relativní podíly Z_i, $i = 1,2,...,M,$ nedominovanost tohoto řešení znamená, že neexistují jiné relativní podíly Z'_i, $i = 1,2,...,M,$ takové, že pro odpovídající s',R' platí buď $s' \leq s,\ R' > R,$ nebo $s' < s,\ R' \geq R.$ Jinak řečeno, chceme-li získat eficientní portfolio s nižším rizikem, musíme akceptovat nižší výnos a naopak, chceme-li eficientní portfolio s vyšším výnosem, musíme akceptovat i vyšší riziko. Takto se projevuje princip paretovského řešení.

Efektivní hranice portfolia

Eficientní portfolio



Obr. 9.1. Efektivní hranice

Nyní jde o to, která dvojice riziko – výnos nejlépe odpovídá danému investorovi. Investor vyjádří svůj postoj k riziku např. pomocí **indiferenčních přímek**

Indiferenční přímky

$R = ks + q,$ (9-9)

kde

k - představuje přírůstek výnosu PF, který je pro investora indiferentní se zvýšením rizika o jednotku,

q -výnos, který je pro investora indiferentní s nulovým rizikem (pro tzv. bezrizikové aktivum).

Pro výše uvedeného investora získáme proto eficientní PF řešením následující skalrizované dvojkriteriální úlohy

$$\sum_{i=1}^{M} \hat{R}_i Z_i - k\sqrt{\sum_{i,j=1}^{M} s_{ij} Z_i Z_j} \rightarrow \text{MAX}; \qquad (9\text{-}10)$$

za podmínek

$$\sum Z_i = 1,\ Z_i \geq 0,\ i = 1,2,...,M. \qquad (9\text{-}11)$$

Dalším rozšířením množiny přípustných portfolií určených podmínkami (9-11) je připustit možnost záporných hodnot Z_i. Je-li totiž $Z_i < 0$, pak tuto situaci interpretujeme tak, že si investor půjčuje určité množství i-té akcie za úrokovou míru odpovídající výnosu R_i této akcie. Tato výpůjčka, jejíž výše bývá zpravidla omezena, se označuje jako **krátký prodej** (angl. short selling). V jeho rámci investor inkasuje finanční prostředky z prodeje cenných papírů patřících jinému

Krátký prodej

investorovi s tím, že se zaváže tyto cenné papíry opět vrátit do stanoveného data. Stejně tak může být např. podmínkami burzy shora omezen podíl jednoho druhu aktiv v PF. Namísto podmínek (9-11) potom obdržíme komplikovanější podmínky

$$\sum Z_i = 1,\ h_i \geq Z_i \geq d_i,\ i = 1,2,\ldots,M, \qquad (9\text{-}12)$$

kde h_i, d_i jsou stanovené horní dolní hranice podílů aktiv v PF.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9-1

Vypočítejte eficientní PF sestavované na 5 časových jednotek (obchodovatelných dnů), tvořené 4 aktivy (akcie A, B, C, D na PBCP), přičemž k dispozici jsou časové řady cen těchto akcií za období 32 dnů, viz Tab. 9-1. Indiferenční investorova přímka má rovnici

$R = 0{,}5.s + q$.

Tuto rovnici lze interpretovat následovně: investor je ochoten „vyměnit“ (nebo „považuje za ekvivalentní“) přírůstek 2 jednotek rizika (tj. s) za přírůstek jedné jednotky výnosu (tj. R). Investor je tedy „poměrně silně averzní vůči riziku“.

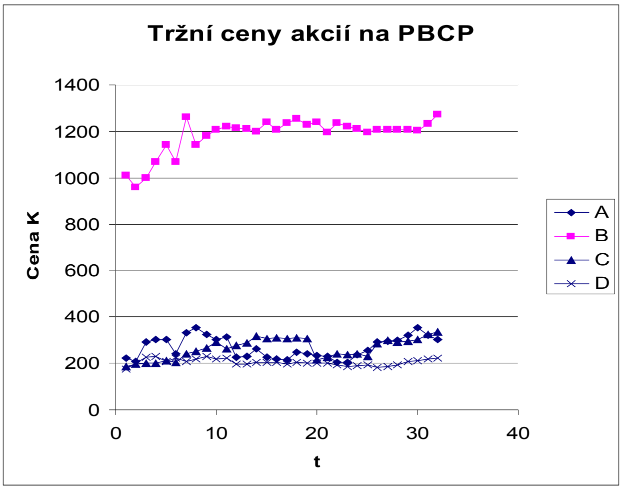
Tržní ceny c_{it} akcií na PBCP:				
Č.obch.dne= t	A	B	C	D
1	221	1010	187	175
2	208	960	197	199
3	290	1000	202	225
4	301	1070	200	230
5	302	1140	211	206
6	240	1070	205	224
7	331	1260	240	207
8	355	1140	253	220
9	325	1180	266	229
10	301	1205	290	220
11	315	1220	263	224
12	227	1215	277	198
13	230	1210	288	198
14	263	1200	316	204
15	227	1240	306	203
16	220	1205	311	205
17	216	1235	306	198
18	247	1255	310	203
19	240	1230	308	202
20	235	1240	215	200
21	230	1195	225	202
22	205	1235	242	195
23	205	1220	238	187
24	236	1210	239	190
25	256	1195	231	194
26	290	1206	285	184
27	294	1205	298	187
28	298	1205	291	192
29	322	1208	296	207
30	353	1204	303	210
31	320	1234	326	219
32	301	1271	334	224

Tab. 9.1. Časové řady cen akcií A, B, C, D

Řešení:

Počet AK: $M = 4$
Počet údajů čas. řad: $T = 32$
Počet čas. intervalů trvání PF: $N = 5$

Na Obr. 9.2. jsou znázorněny časové řady cen akcií A, B, C, D.



Obr. 9.2. Ceny akcií A, B, C, D

Nejprve výpočítáme 5-tidenní výnosy AK pro t = 6,7,..., 32, i = A,B,C,D, a zároveň jejich průměry – očekávané výnosy podle (9-2), tj.:

$$\hat{R}_i = \frac{1}{27}\sum_{t=6}^{32} x_{it}$$

kde

$$x_{it}=\frac{c_{it}-c_{i(t-5)}}{c_{i(t-5)}}$$

5-tidenní výnosy [%]:

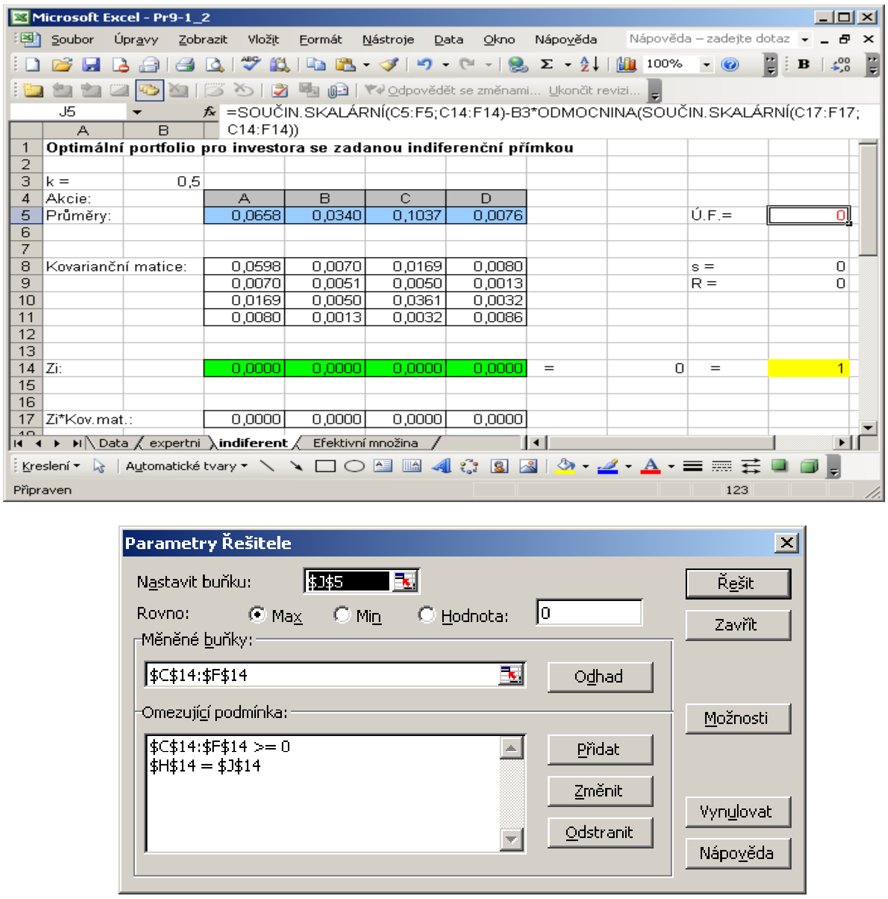
t	A	B	C	D
6	0,086	0,059	0,096	0,280
7	0,591	0,313	0,218	0,040
8	0,224	0,140	0,252	-0,022
9	0,080	0,103	0,330	-0,004
10	-0,003	0,057	0,374	0,068
11	0,313	0,140	0,283	0,000
12	-0,314	-0,036	0,154	-0,043
13	-0,352	0,061	0,138	-0,100
14	-0,191	0,017	0,188	-0,109
15	-0,246	0,029	0,055	-0,077
16	-0,302	-0,012	0,183	-0,085
17	-0,048	0,016	0,105	0,000
18	0,074	0,037	0,076	0,025
19	-0,087	0,025	-0,025	-0,010
20	0,035	0,000	-0,297	-0,015
21	0,045	-0,008	-0,277	-0,015
22	-0,051	0,000	-0,209	-0,015
23	-0,170	-0,028	-0,232	-0,079
24	-0,017	-0,016	-0,224	-0,059
25	0,089	-0,036	0,074	-0,030
26	0,261	0,009	0,267	-0,089
27	0,434	-0,024	0,231	-0,041
28	0,454	-0,012	0,223	0,027
29	0,364	-0,002	0,238	0,089
30	0,379	0,008	0,312	0,082
31	0,103	0,023	0,144	0,190
32	0,024	0,055	0,121	0,198
Průměry:	0,066	0,034	0,104	0,008

Výpočet odhadu kovarianční matice $S = \{s_{ij}\}$ podle (9-4), tj. pro t = 6,7,..., 32 , i,j = A,B,C,D:

$$s_{ij} = \frac{1}{27}\sum_{t=6}^{32}(x_{it} - \hat{R}_i)(x_{jt} - \hat{R}_j)$$

0,0598	0,0070	0,0169	0,0080
0,0070	0,0051	0,0050	0,0013
0,0169	0,0050	0,0361	0,0032
0,0080	0,0013	0,0032	0,0086

V Excelu vytvoříme přípravná data pro řešení pomocí Řešitele např. podle Obr. 9.3.



Obr. 9.3. Data a parametry Řešitele

Eficientní PF pro investora, pro kterého je indiferentní přírůstek výnosu 0,5 se zvýšením rizika o 1, je složeno z 0,56% titulu A, 47,07% titulu B a 2,13% titulu C. Titul D v eficientním porfoliu chybí. Přitom je výnos tohoto PF 7,07% a jeho riziko je 11,67%, viz Obr. 9.4.

Optimální portfolio pro investora se zadanou indiferenční přímkou

k =	0,5									
Akcie:		A	B	C	D					
Průměry:		0,0658	0,0340	0,1037	0,0076			Ú.F.=		0,012314
Kovarianční matice:		0,0598	0,0070	0,0169	0,0080			s =		0,116686
		0,0070	0,0051	0,0050	0,0013			R =		0,070657
		0,0169	0,0050	0,0361	0,0032					
		0,0080	0,0013	0,0032	0,0086					
Zi:		0,0056	0,4707	0,5237	0,0000	=	1	=		1
Zi*Kov.mat.:		0,0125	0,0051	0,0213	0,0023					

Obr. 9.4. Eficientní portfolio

9.4 Klasický stochastický model PF – expertní přístup

Klasický stochastický model PF - historický přístup nerespektuje očekávání investorů o budoucích výnosech aktiv. Střední hodnoty (očekávané hodnoty) výnosů aktiv (akcií) a tedy i PF složeného z těchto aktiv, které se uvažují v historickém přístupu, nemusí být totiž v souladu s názory expertů, které vycházejí především z fundamentální analýzy akcií. Proto se historický přístup rozšiřuje o názory expertů, které doplňují nebo nahrazují očekávané výnosy akcií, případně kovariance mezi aktivy. Do modelu vstupují nové veličiny:

n_e - počet expertů,

c_i - tržní cena (TC) *i*-tého AK v okamžiku vzniku PF,

e_{ik} - TC *i*-tého AK v okamžiku realizace PF, stanovena *k*-tým expertem,

d_{ik} - dividenty a další požitky z *i*-tého AK během trvání PF stanovené *k*-tým expertem,

$$y_{ik} = \frac{e_{ik} + d_{ik} - c_i}{c_i}$$

- výnos *i*-tého AK v okamžiku realizace PF stanovena *k*-tým expertem,

$$R_i^e = \frac{1}{n_e} \sum_{k=1}^{n_e} y_{ik}$$

- experty očekávaný výnos *i*-tého AK v okamžiku realizace PF,

$$R_{PF}^e = \sum_{i=1}^{M} R_i^e Z_i$$

- odhad experty očekávaného výnosu PF.

Dále se používá expertní odhad rizika PF:

$$s_{ij}^e = \frac{1}{n_e} \sum_{k=1}^{n_e} (y_{ik} - R_i^e)(y_{jk} - R_j^e)$$

- expertní odhad kovariance, speciálně

$$s_i^e = \sqrt{\frac{1}{n_e} \sum_{k=1}^{n_e} (y_{ik} - R_i^e)^2}$$

- expertní odhad rizika výnosu *i*-tého Ak za dobu trvání PF, tj. *N*,

$$s_{PF}^e = \sqrt{s_{ij}^e Z_i Z_j}$$

- expertní odhad rizika výnosu PF.

Úloha optimalizace PF je opět úlohou dvojkriteriálního nelineárního matematického programování (9-7), (9-8), resp. (9-7), (9-12)

Poznámka: Je zřejmé, že expertní přístup a historický přístup je možné podle situace vhodně kombinovat.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9-2

Uvažujme stejnou úlohu jako byla řešená úloha 9-1 s tím rozdílem, že se 2 (stejně důvěryhodní) experti nezávisle na sobě vyjádřili k hodnotám 5-tidenních výnosů akcií A, B, C, D. Jsou uvedeny v následující tabulce, včetně (váženého) průměru jejich odhadů:

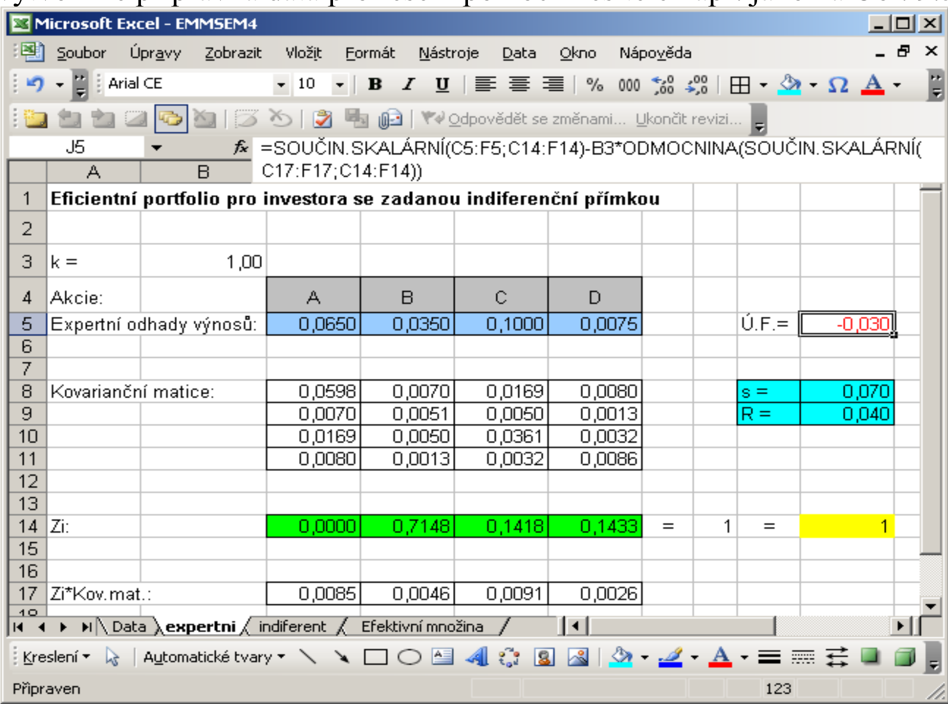
	A	B	C	D
$y_{i1} =$	0,06	0,04	0,11	0,01
$y_{i2} =$	0,07	0,03	0,09	0,005
$R^e_i =$	0,0650	0,0350	0,1000	0,0075

Kovarianční matici uvažujeme stejnou jako v úloze 9-1, tedy vypočítanou na základě historického přístupu. Dále uvažujeme rizikově neutrálního investora (k = 1), tedy indiferenční investorova přímka má rovnici

$$R = s + q.$$

Řešení:

V Excelu vytvoříme přípravná data pro řešení pomocí Řešitele např. jako na Obr. 9.5.



Obr. 9.5. Data pro Řešitele včetně řešení

Eficientní PF pro investora, který je indiferentní vůči riziku, je složeno z akcií B (71,48%), C (14,18%) a D (14,33%), jak je zřejmé z Obr. 9.5.

SHRNUTÍ KAPITOLY

V této kapitole jste si zopakovali některé poznatky z oboru financí, konkrétně z tzv. „matematiky cenných papírů“, teorie portfolia a finančního modelování. V návaznosti na kapitolu o vícekriteriálním programování jste formulovali úlohu optimalizace PF jako dvojkriteriální úlohu VKMP. Úloha optimalizace PF spočívá v nalezení takových relativních podílů aktiv v PF, aby se maximalizoval očekávaný výnos PF a minimalizovalo se jeho riziko. Obraz množiny všech nedominovaných (Paretovských) řešení této úlohy v dvojrozměrném kriteriálním prostoru o souřadných osách σ a R se nazývá efektivní hranice PF. Každý bod křivky efektivní hranice představuje dvojici $\sigma, R,$ která odpovídá eficientnímu portfoliu, což je nedominované řešení této úlohy. Chceme-li získat eficientní portfolio s nižším rizikem, musíme akceptovat nižší výnos a naopak, chceme-li eficientní portfolio s vyšším výnosem, musíme akceptovat i vyšší riziko. To, která dvojice riziko – výnos nejlépe odpovídá danému investorovi, lze vyjádřit jeho postojem k riziku např. pomocí indiferenčních křivek (např. přímek). S využitím tzv. stochastického historického přístupu jste se na příkladech naučili řešit úlohu nalezení eficientního PF pomocí Řešitele v Excelu.