

Podmíněná pravděpodobnost

Úplná pravděpodobnost a Bayesova věta



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

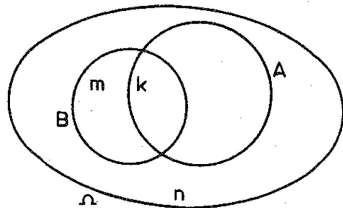
Petr Sedřa

Pravděpodobnost a statistika I
2025

Podmíněná pravděpodobnost

Definice 2.1: Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, necht' $B \in \mathcal{A}$ splňuje podmínku $P(B) > 0$. **Podmíněná pravděpodobnost** $P(A|B)$ (čti „pravděpodobnost, že nastane jev A za podmínky, že nastal jev B “) je definována vztahem $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Lze zapsat: $P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, kde n je počet všech možností (stejně pravděpodobných), počet prvků množiny B je m a z nich k patří zároveň do množiny A .



Z tohoto vztahu lze odvodit vztah pro pravděpodobnost průniku dvou jevů:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Je zřejmé, že pravděpodobnost průniku dvou jevů je rovna součinu podmíněné pravděpodobnosti a pravděpodobnosti podmínky.

Definice 2.2: Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Náhodné jevy A a B se nazývají **nezávislé**, když platí: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Náhodné jevy $A_1, A_2, \dots$ se nazývají **nezávislé**, jestliže pro každé $k \in \mathbb{N}$ a pro každou k -tici náhodných jevů $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ platí: $P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P\left(A_{i_j}\right)$.

Náhodné jevy $A_1, A_2, \dots$ se nazývají **po dvou nezávislé**, jestliže každé dva z nich jsou nezávislé.

Na rozdíl od neslučitelnosti náhodných jevů, což je množinový pojem, **nelze** pojem nezávislosti náhodných jevů **definovat bez zavedení pravděpodobnosti**.

Jsou-li jevy A a B nezávislé, pak $P(A|B) = P(A)$, čili nastoupení nebo nenastoupení jevu B nemá žádný vliv na nastoupení jevu A . Vzhledem k tomu, že ani výskyt jevu B nezávisí na výskytu jevu A , musí současně platit $P(B|A) = P(B)$.

Příklad 2.1: Jaká je pravděpodobnost, že na poctivé hrací kostce padne dvakrát po sobě jednička?

Řešení. Definujme si jevy A , B takto:

A – „padne jednička v prvním hoďu“,

B – „padne jednička ve druhém hoďu“.

Jestliže v prvním hoďu padne jednička, nijak to neovlivní pravděpodobnost, že jednička padne také ve druhém hoďu. Jevy A , B jsou nezávislé, proto je pravděpodobnost, že v obou hoďech padnou jedničky, součinem jednotlivých pravděpodobností.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,028.$$

Pravděpodobnost, že při dvou hoďech kostkou padnou dvě jedničky, je přibližně 3,00 %.

Příklad 2.2: 120 studentů absolvovalo zkoušky z matematiky a ze statistiky. 30 z nich nesložilo obě zkoušky, 8 nesložilo pouze zkoušku z matematiky a 5 nesložilo pouze zkoušku ze statistiky. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student:

- a) složil zkoušku z matematiky, víme-li, že nesložil zkoušku ze statistiky,
- b) složil zkoušku ze statistiky, víme-li, že nesložil zkoušku z matematiky,
- c) složil zkoušku z matematiky, víme-li, že složil zkoušku ze statistiky.

Řešení: Označme si možné jevy takto:

M – student složil zkoušku z matematiky,

S – student složil zkoušku ze statistiky.

Víme, že:

$$P(\bar{M} \cap \bar{S}) = \frac{30}{120},$$
$$P(\bar{M} \cap S) = \frac{8}{120},$$
$$P(M \cap \bar{S}) = \frac{5}{120}.$$

Ad a) $P(M|\bar{S})$ což určíme jednoduše podle definice podmíněné pravděpodobnosti

$$P(M|\bar{S}) = \frac{P(M \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(M \cap \bar{S})}{P(M \cap \bar{S}) + P(\bar{M} \cap \bar{S})},$$

kde pravděpodobnost, že student nesložil zkoušku ze statistiky, určujeme jako součet pravděpodobnosti, že student nesložil pouze zkoušku ze statistiky a pravděpodobnosti, že student nesložil obě zkoušky. Po vyčíslení tedy víme, že:

$$P(M|\bar{S}) = \frac{P(M \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(M \cap \bar{S})}{P(M \cap \bar{S}) + P(\bar{M} \cap \bar{S})} = \frac{\frac{5}{120}}{\frac{5}{120} + \frac{30}{120}} = \frac{5}{35} = 0,14.$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z matematiky, víme-li, že nesložil zkoušku ze statistiky je asi 14%.

Ad b) $P(S|\bar{M})$ což určíme obdobně jako při řešení předcházející úlohy:

$$P(S|\bar{M}) = \frac{P(S \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(S \cap \bar{M})}{P(S \cap \bar{M}) + P(\bar{S} \cap \bar{M})} = \frac{\frac{8}{120}}{\frac{8}{120} + \frac{30}{120}} = \frac{8}{38} = 0,21.$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku ze statistiky, víme-li že nesložil zkoušku z matematiky, je přibližně 21 %.

Ad c) $P(M|S)$. Opět si napíšeme definiční vztah:

$$P(M|S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)},$$

k němuž můžeme přistoupit dvojím způsobem. Bud' se pokusíme tento vztah upravit na základě známých vztahů tak, abychom jej mohli prostřednictvím zadaných parametrů vyčíslit:

Podmíněná pravděpodobnost



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

$$\begin{aligned} P(M|S) &= \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{1 - P(\overline{M} \cap \overline{S})}{1 - P(\overline{S})} = \frac{1 - P(\overline{M} \cup \overline{S})}{1 - [P(M \cap \overline{S}) + P(\overline{M} \cap \overline{S})]} = \frac{1 - [P(\overline{S}) + P(\overline{M}) - P(\overline{M} \cap \overline{S})]}{1 - [P(M \cap \overline{S}) + P(\overline{M} \cap \overline{S})]} = \\ &= \frac{1 - [P(M \cap \overline{S}) + P(\overline{M} \cap \overline{S})] + [P(S \cap \overline{M}) + P(\overline{M} \cap \overline{S})] - P(\overline{M} \cap \overline{S})}{1 - [P(M \cap \overline{S}) + P(\overline{M} \cap \overline{S})]} = \\ &= \frac{1 - [P(M \cap \overline{S}) + P(S \cap \overline{M}) + P(\overline{M} \cap \overline{S})]}{1 - [P(M \cap \overline{S}) + P(\overline{M} \cap \overline{S})]} = \frac{1 - \left[\frac{5}{120} + \frac{8}{120} + \frac{30}{120} \right]}{1 - \left[\frac{5}{120} + \frac{30}{120} \right]} = \frac{\frac{77}{120}}{\frac{85}{120}} = 0,91. \end{aligned}$$

nebo se pokusíme potřebné pravděpodobnosti vyčíst přímo ze zadání. Zadané údaje si zapíšeme do tabulky a chybějící údaje v tabulce jednoduše dopočítáme.

	Složili zkoušku z matematiky	Nesložili zkoušku z matematiky	Celkem
Složili zkoušku ze statistiky		8	
Nesložili zkoušku ze statistiky	5	30	35
Celkem		38	120

Podmíněná pravděpodobnost



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Kolik studentů složilo zkoušku ze statistiky? To je celkový počet (120) mínus počet studentů, kteří zkoušku ze statistiky nesložili (35), což je 85. Obdobně určíme počet studentů, kteří složili zkoušku z matematiky, což je $120 - 38 = 82$. A konečně počet těch, kteří složili obě zkoušky určíme např. jako počet těch, kteří složili zkoušku z matematiky (82) mínus počet těch, kteří složili pouze zkoušku z matematiky (5), což je 77.

	Složili zkoušku z matematiky	Nesložili zkoušku z matematiky	Celkem
Složili zkoušku ze statistiky	77	8	85
Nesložili zkoušku ze statistiky	5	30	35
Celkem	82	38	120

Hledané pravděpodobnosti jsou:

$$P(M \cap S) = \frac{77}{120}, P(S) = \frac{85}{120} \Rightarrow P(M|S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{77}{120}}{\frac{85}{120}} = 0,91.$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z matematiky, víme-li že složil zkoušku ze statistiky, je přibližně 91 %. Podle údajů v tabulce bychom mohli snadno řešit i úkoly a) a b).

Věta o úplné pravděpodobnosti

Definice 2.3: Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Řekneme, že náhodné jevy $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ tvoří **úplný systém jevů**, jestliže platí $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$,
 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

Elementární jevy jsou také úplným systémem jevů, zřejmě tím nejjemnějším, o jakém lze v dané úloze uvažovat.

Věta 2.1 (o úplné pravděpodobnosti): Nechť $B_1, B_2, \dots$ je úplný systém jevů v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ takový, že platí: $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots$
Potom platí:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Důkaz: viz Zvára a Štěpán (2019), str. 28.

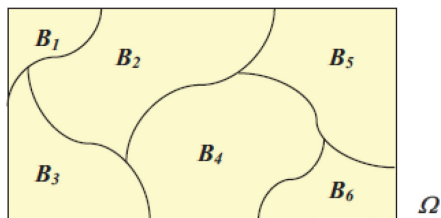
Úplná pravděpodobnost



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

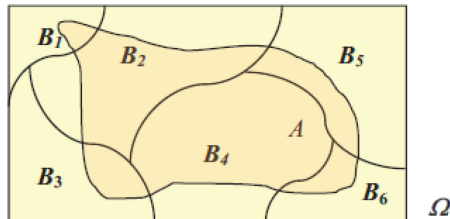
Odvození (de facto **důkaz**): Podmíněnou pravděpodobnost používáme k výpočtu pravděpodobnosti jevů, které jsou podmíněny nastoupením množiny vzájemně disjunktních jevů. Vztah pro pravděpodobnost nějakého jevu bez ohledu na podmiňující jevy udává věta o úplné pravděpodobnosti, kterou si nyní odvodíme.

Nechť je dána úplná množina (úplný systém) vzájemně disjunktních jevů $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ pro $n = 6$.



Obr.: Úplná množina vzájemně disjunktních jevů

Je zřejmé, že libovolný jev A , ($A \subset \Omega$) je sjednocením disjunktních jevů $(A \cap B_1), (A \cap B_2), \dots, (A \cap B_n)$.



Obr.: Jevo A (nad úplnou množinou disjunktních jevů)

Úplná pravděpodobnost

Tedy $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$.

Jelikož jde o sjednocení disjunktních jevů, musí platit, že pravděpodobnost tohoto sjednocení je dána součtem jednotlivých pravděpodobností:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i).$$

Z definice podmíněné pravděpodobnosti pak dostáváme:

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Z čehož již plyne věta o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Při nastoupení jevu A ($P(A) \neq 0$) se naskýtá přirozená otázka, který z jevů B_i vedl k nastoupení jevu A , tzn. jaká je pravděpodobnost $P(B_j|A)$.

Věta 2.2 (Bayesova věta): Necht' $B_1, B_2, \dots$ je úplný systém jevů v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ takový, že platí: $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots$

Jestliže platí: $P(A) > 0$, pak:
$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}, j = 1, 2, \dots$$

Bayesův vzorec udává, jakým způsobem vypočítáme **aposteriorní pravděpodobnosti** (a posteriori = na základě zkušenosti). $P(B_j|A)$ jevu B_j za podmínky, že nastal jev A , jestliže známe **apriorní** (a priori = z předchozího, prvotní) **pravděpodobnosti** $P(B_i)$ a podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_i)$ pro všechny jevy $B_i, i = 1, 2, \dots$

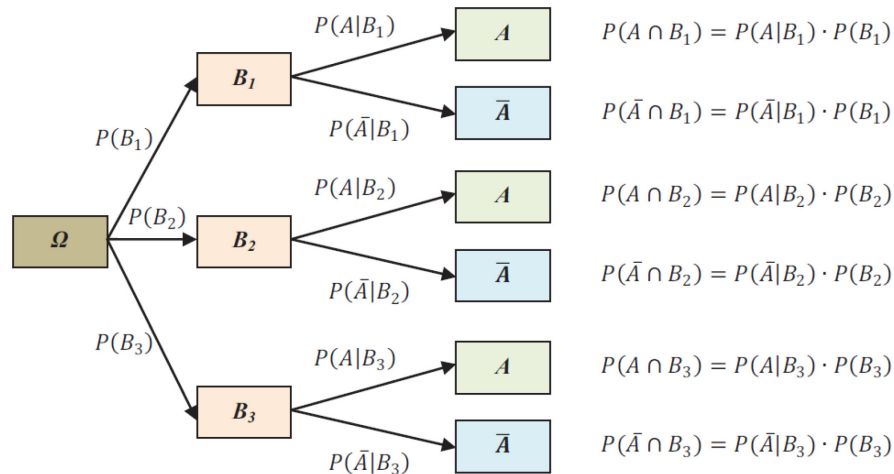
Důkaz: viz Zvára a Štěpán (2019), str. 29.

Řešení úloh vedoucích na aplikaci věty o úplné pravděpodobnosti nebo Bayesovy věty mnohdy usnadní vhodný grafický záznam úlohy. Rozhodovací proces, který odpovídá řešení těchto úloh, lze graficky znázornit pomocí **rozhodovacího stromu**.

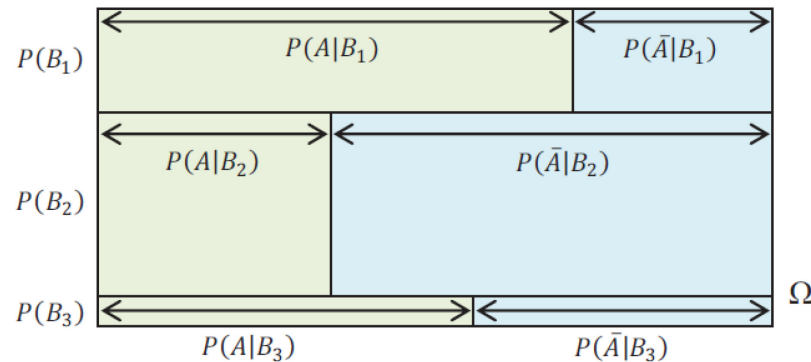
Rozhodovací strom zobrazuje okamžiky rozhodování jako uzly větvení, větve pak představují všechny jednotlivé varianty řešení. Každá větev v rozhodovacím stromu je ohodnocena pravděpodobností, že bude příslušná varianta vybrána. Vynásobíme-li všechny pravděpodobnosti na cestě mezi dvěma uzly, získáme pravděpodobnost, že se z počátečního uzlu dostaneme do uzlu koncového.

Alternativou k rozhodovacímu stromu je pravoúhlý **Vennův diagram**, v němž obsahy jednotlivých obdélníků odpovídají pravděpodobnostem:

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$



Obr. 2.14: Příklad rozhodovacího stromu



Obr. 2.15: Příklad pravoúhlého Vennova diagramu

Využití Bayesovy věty v diagnostice



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

- **Etiologické studie** (hledání a výklad příčin vzniku nemocí),
- **Matematické modely** diagnostického nebo prognostického rozhodování,
- **Screeningové testování** (vyvážit klady včasné detekce nemoci u osob, které nemoc skutečně mají a nepříznivé důsledky, které vzniknou tím, že test určí jako nemocné i ty osoby, které sledovanou nemoc nemají).

Využití Bayesovy věty v diagnostice

Označme:

N^+	nemoc se u pacienta vyskytuje
N^-	nemoc se u pacienta nevyskytuje
T^+	test vyšel pozitivní
T^-	test vyšel negativní

Předpokládejme, že známe:

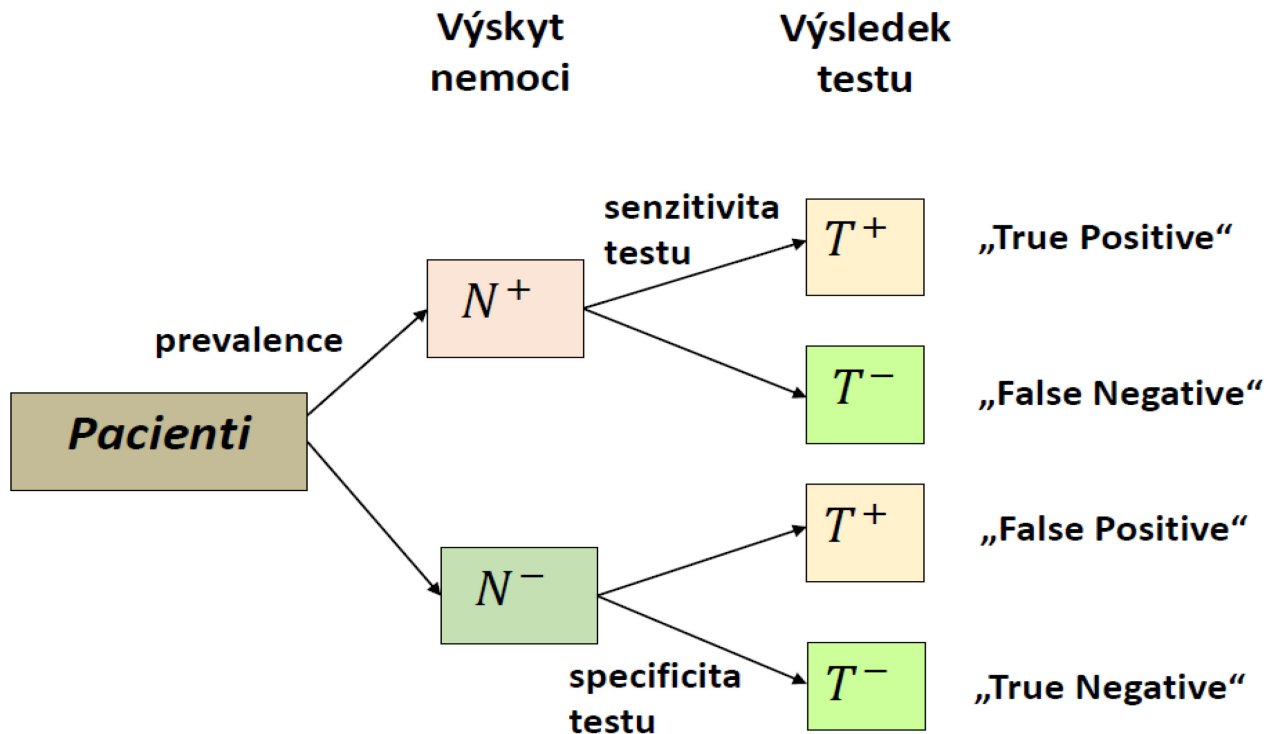
$P(N^+)$	p -st výskytu nemoci v populaci (prevalence – apriorní p -st)
$P(TP) = P(T^+ N^+)$	p -st, že test je pozitivní u nemocné osoby (senzitivita testu)
$P(TN) = P(T^- N^-)$	p -st, že test je negativní u osoby, která nemoc nemá (specifická testu)

- Senzitivita a specifická jsou parametry testu, vypovídají o jeho kvalitě.
- Senzitivita a specifická testu se určují na základě pilotního projektu (udává je výrobce), ale je velmi vhodné je ověřovat i v reálných podmínkách používání testu.

Využití Bayesovy věty v diagnostice



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ



Využití Bayesovy věty v diagnostice



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Předpokládejme, že známe:

$P(N^+)$	p -st výskytu nemoci v populaci (prevalence – apriorní p -st)
$P(TP) = P(T^+ N^+)$	p -st, že test je pozitivní u nemocné osoby (senzitivita testu)
$P(TN) = P(T^- N^-)$	p -st, že test je negativní u osoby, která nemoc nemá (specifita testu)

Co nás zajímá:

$P(FN) = P(T^- N^+)$	p -st, že test je negativní u nemocné osoby (falešná negativita testu)
$P(FP) = P(T^+ N^-)$	p -st, že test je pozitivní u osoby, která nemoc nemá (falešná pozitivita testu)
$P(PNT) = P(N^- T^-)$	p -st, že osoba, u níž je test negativní, skutečně nemoc má (prediktivní hodnota negativního testu)
$P(PPT) = P(N^+ T^+)$	p -st, že osoba, u níž je test pozitivní, skutečně nemoc má (prediktivní hodnota pozitivního testu)
$A = P(N^+ \cap T^+) + P(N^- \cap T^-)$	p -st, že test dává správné výsledky (přesnost testu)

Úplná pravděpodobnost a Bayesova věta

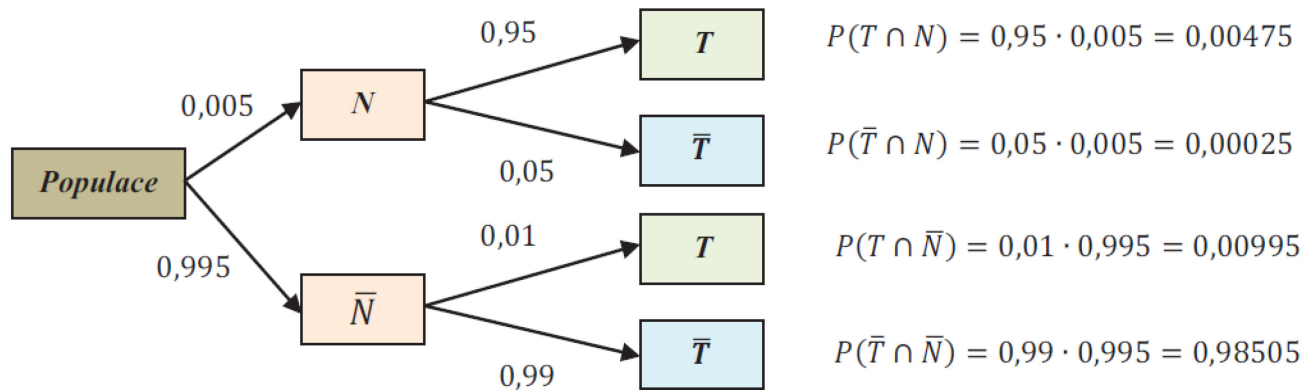
Příklad 2.3: Laboratoř, která provádí rozborů vzorků, potvrdí s pravděpodobností 95% existencí protilátek na virus nemoci COVID-19, jestliže jí pacient skutečně trpí. Zároveň test určí jako pozitivní 1% osob, které však touto nemocí netrpí. Jestliže 0,5% populace trpí zmíněnou nemocí, jaká je pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má?

Řešení: Takovéto problémy směřují k řešení pomocí věty o úplné pravděpodobnosti, popř. pomocí Bayesovy věty. Pro přehledný zápis situace použijeme rozhodovací strom.

Označme si:

N ... pacient trpí
nemocí COVID-19

T ... test na
protilátky vyšel
pozitivní



Úplná pravděpodobnost a Bayesova věta

Na spojnice prvního větvení zapisujeme pravděpodobnosti výskytu daného stavu, tj. $P(N)$ a $P(\bar{N})$, přičemž součet pravděpodobností v jednom větvení dává vždy 1 (100%). V našem případě tedy $P(N)$ známe ze zadání a $P(\bar{N})$ určíme jako $1 - P(N)$.

Na spojnice druhého větvení se pak zapisují podmíněné pravděpodobnosti – „výsledek testu“ za předpokladu „daný stav“. V našem případě jsou to pravděpodobnosti: $P(T|N)$, $P(\bar{T}|N)$, $P(T|\bar{N})$ a $P(\bar{T}|\bar{N})$. Opět platí, že součet pravděpodobností v jednom větvení dává vždy 1. Ze zadání známe $P(T|N)$ a $P(T|\bar{N})$ zbylé dvě podmíněné pravděpodobnosti dopočítáme jako doplňky do 1.

Chceme-li určit, jaká je pravděpodobnost toho, že nastal „daný stav“ a zároveň „výsledek testu“, stačí vynásobit hodnoty uvedené u příslušné větve. Např.: pravděpodobnost toho, že pacient trpí nemocí COVID-19 a zároveň mu vyšel negativní test je 0,00025 ($P(N \cap T) = P(T|N) \cdot P(N) = 0,05 \cdot 0,005 = 0,00025$). Příslušné pravděpodobnosti jsou uvedeny ve sloupci vedle rozhodovacího stromu.

Úplná pravděpodobnost a Bayesova věta

Pravděpodobnosti toho, že dojde k určitému výsledku testu, se určují prostřednictvím věty o úplné pravděpodobnosti. My je okamžitě vyčteme ze sloupce uvedeného vedle rozhodovacího stromu. Např. $P(T) = P(N \cap T) + P(\bar{N} \cap T) = 0,00475 + 0,00995 = 0,0147$.

A nyní již přejdeme k naší otázce: Měli jsme určit, jaká je pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má – neboli $P(N|T)$.

Tuto podmíněnou pravděpodobnost z rozhodovacího stromu přímo nevyčteme, pro její určení použijeme Bayesovu větu:

$$P(N|T) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)},$$

do které stačí dosadit hodnoty vyčtené z rozhodovacího stromu.

$$P(N|T) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)} = \frac{0,00475}{0,0147} = 0,323.$$

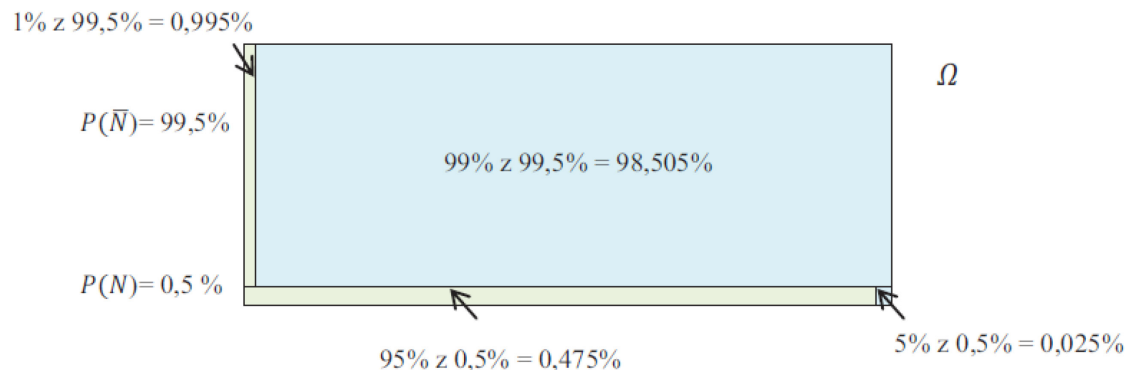
Úplná pravděpodobnost a Bayesova věta



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Pravděpodobnost toho, že osoba, jejíž test vyšel pozitivní, skutečně onu nemoc COVID-19 má je asi 32,3%. Zamyslete se nad tím, co by znamenalo, kdyby lékař pouze na základě jednoho pozitivního výsledku testu označil člověka za nemocného.

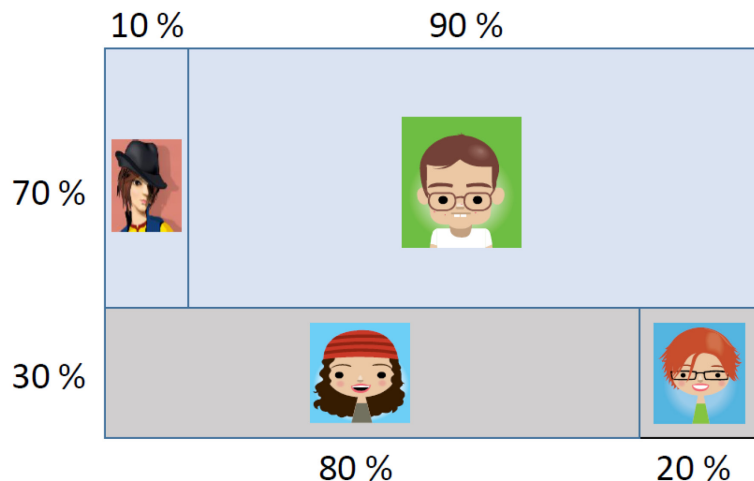
A na závěr si ukážeme, jak problém znázornit pomocí pravoúhlého Vennova diagramu. V Obr. představuje základní prostor celou lidskou populaci, zelená výplň odpovídá pozitivnímu výsledku testu, modrá výplň odpovídá negativnímu výsledku testu.



Obr.: Pravoúhlý Vennův diagram pro výsledek testování populace

Úplná pravděpodobnost

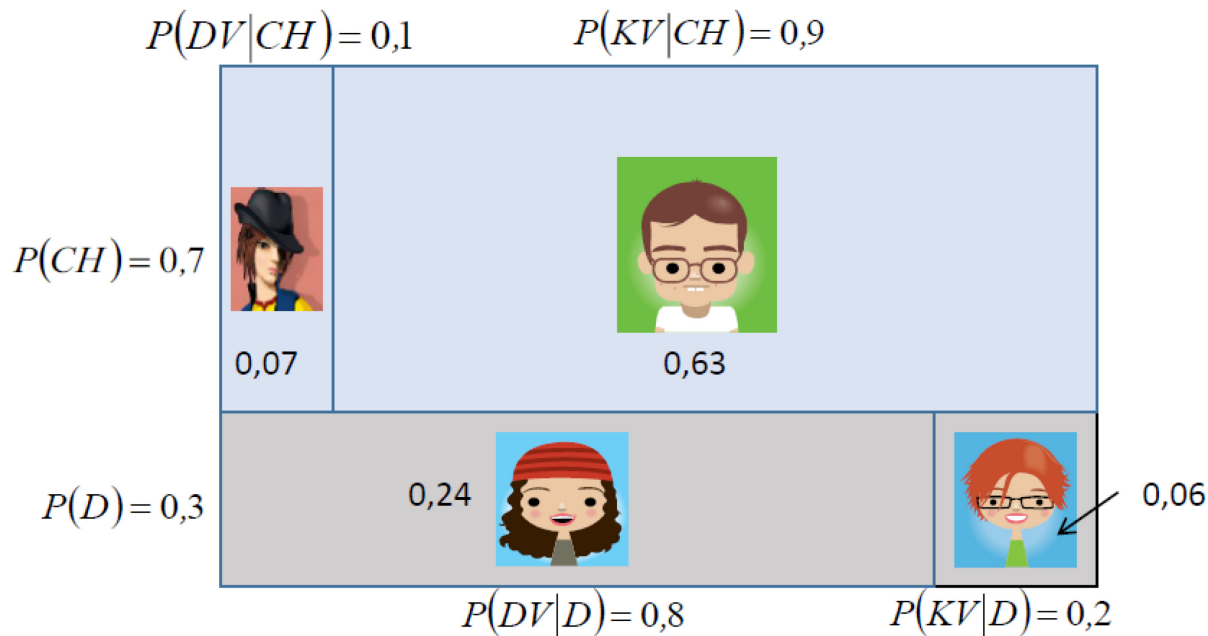
Příklad 2.4: Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?



Úplná pravděpodobnost

$$P(DV) = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$

$$P(DV) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,31$$



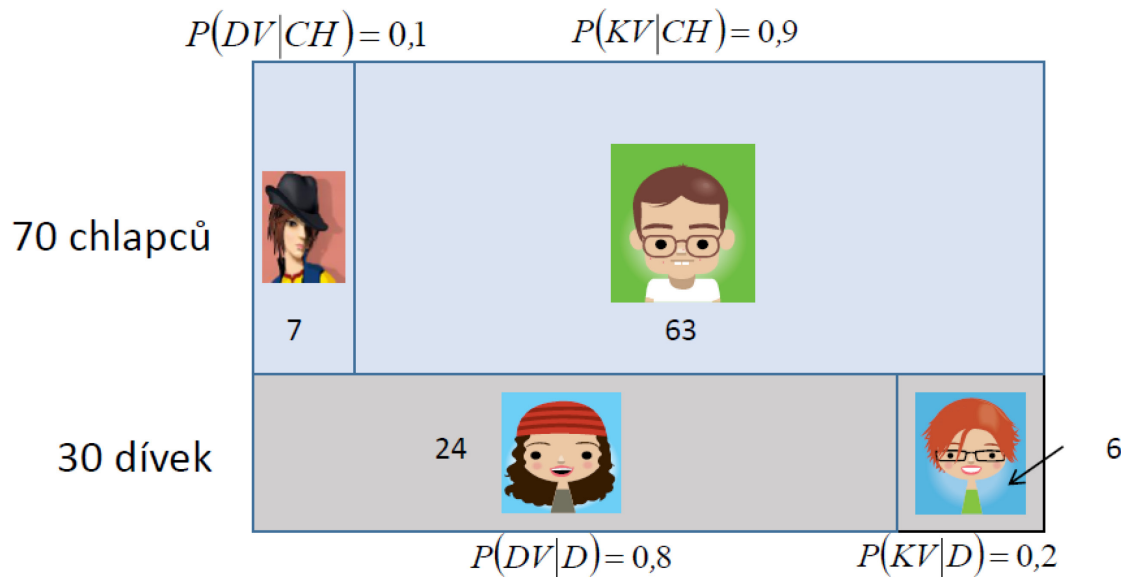
Úplná pravděpodobnost



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Představme si reálnou třídu (100 studentů), která splňuje dané podmínky...

$$\begin{aligned}P(DV) &= \frac{24 + 7}{100} = 0,31 = \frac{24}{100} + \frac{7}{100} = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) \\&= P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)\end{aligned}$$

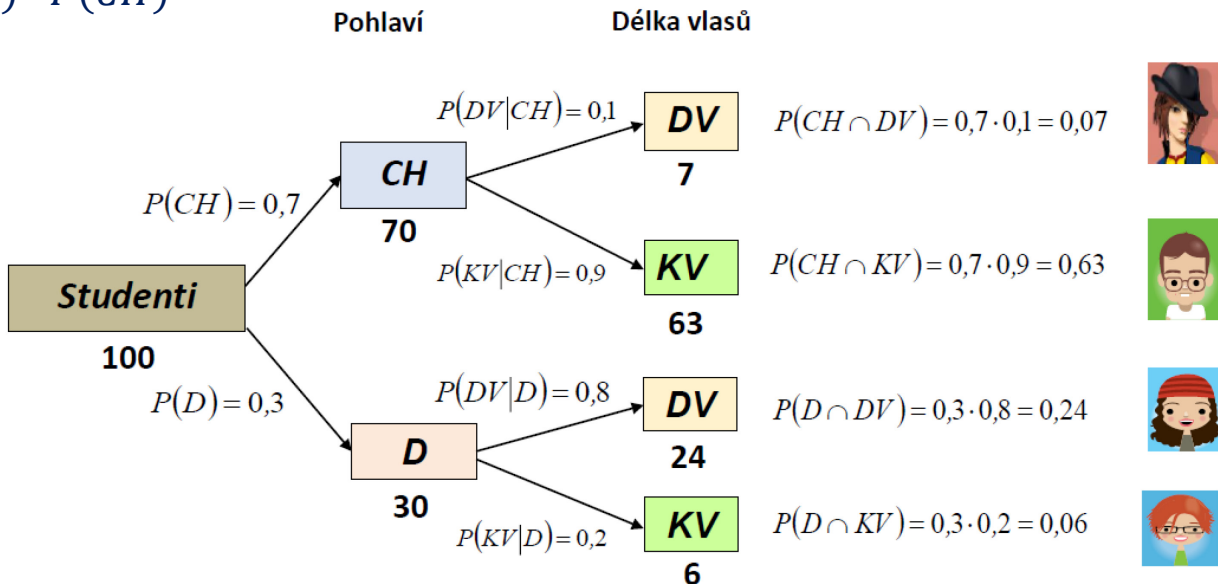


Úplná pravděpodobnost

$$P(DV) = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$

$$P(DV) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,31$$

$$P(DV) = \frac{24+7}{100} = 0,31 = \frac{24}{100} + \frac{7}{100} = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$



Příklad 2.5: Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

70% - Apriorní pravděpodobnost

b) Náhodně vybraný student má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

$P(CH|DV) = ?$ - Aposteriorní pravděpodobnost

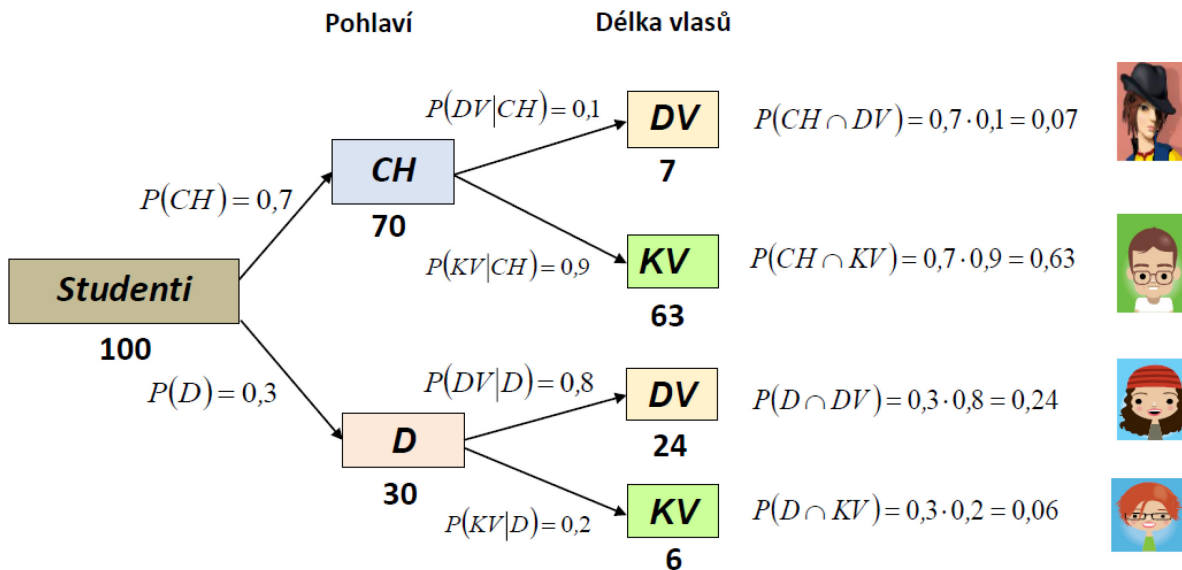
Bayesova věta



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

$$P(CH|DV) = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV)} = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV \cap D) + P(DV \cap CH)} = \frac{P(DV|CH) \cdot P(CH)}{P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)} = 0,226$$

$$P(CH|DV) = \frac{7}{24+7} = 0,226 = \frac{0,07}{0,24+0,07} = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV \cap D) + P(DV \cap CH)} = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV)}$$



a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

70% - Apriorní pravděpodobnost

b) Náhodně vybraný student má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

22,6% - Aposteriorní pravděpodobnost



změna vnímání reality
ve světle nových
informací

1. K. Zvára, J. Štěpán. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Praha: MatfyzPress, 2019. ISBN 978-80-7378-388-4. **(kapitola 2)**.
2. Z. Riečanová a kol. *Numerické metody a matematická statistika*. Bratislava: Alfa, 1987. ISBN 063-559-87. **(kapitola 1)**.



Děkuji za pozornost.