

Náhodná veličina

Distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce a
funkce hustoty.



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Petr Sed'a

Pravděpodobnost a statistika I

2025

Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Výsledek náhodného pokusu popisujeme pomocí **základního prostoru** Ω , tj. množiny všech elementárních jevů, a jejich pravděpodobnosti. Chceme-li zpracovávat **výsledky náhodného pokusu**, musíme vytvořit model popisující více či méně dobře realitu. Tímto modelem je tzv. **náhodná veličina** (též náhodná proměnná).

- Co je to **náhodný pokus**?

Děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

- Co je to **náhodný jev**?

Tvrzení o výsledku náhodného pokusu, přičemž o pravdivosti tohoto tvrzení lze po ukončení pokusu rozhodnout.

Náhodná veličina (NV)

Náhodná veličina – číselné vyjádření výsledku náhodného pokusu.

a) X ... výsledek hodu kostkou

Náhodný pokus: Hod kostkou



Náhodný jev: Padne sudé číslo. ($X \in \{2,4,6\}$)

b) X ... počet dívek mezi 1 000 náhodně vybranými dětmi

Náhodný pokus: Náhodný výběr 1 000 dětí a zjištění počtu dívek mezi nimi.

Náhodný jev: Mezi 1 000 náhodně vybranými dětmi bude více než 500 dívek.



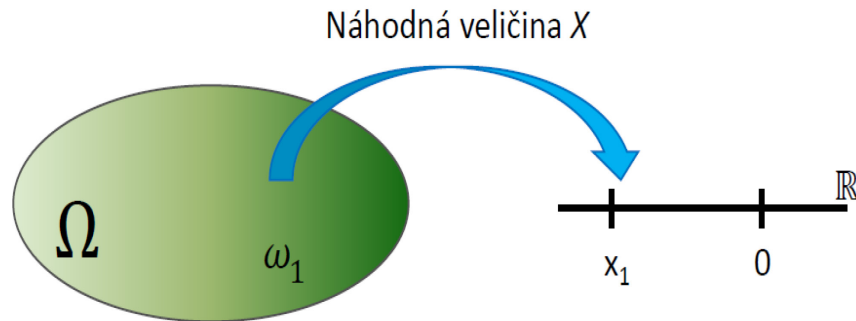
I v případech náhodných pokusů, jejichž výsledek je kategoriální povahy (např. pohlaví narozeného dítěte, ukončené vzdělání apod.), se při popisu výsledků mnohdy snažíme přiřadit každému výsledku reálné číslo. Výsledek náhodného pokusu vyjádřený reálným číslem budeme považovat za hodnotu náhodné veličiny.

Náhodná veličina

Náhodná veličina (NV) je funkce, která zobrazuje elementární jevy $\omega \in \Omega$ na reálná čísla.

- NV obvykle značíme velkými písmeny X, Y, Z .
- NV přiřadí každému elementárnímu jevu ω reálné číslo (převádí elementární jevy (abstraktními objekty) na čísla).
- Hodnota $X(\omega)$ NV X závisí na tom, který elementární jev ω nastal.
- Víme-li, který elementární jev ω nastal, známe hodnotu $X(\omega)$ NV X .

Náhodná veličina X :



V modelu s pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ můžeme náhodnou veličinu X zavést jako reálnou funkci definovanou na náhodných jevech, tedy podmnožinách z Ω , které jsou prvky $\mathcal{A}$. Je nutné zajistit možnost přiřazení pravděpodobnosti všem rozumným množinám reálných čísel.

Od dvojice $(\Omega, \mathcal{A})$ proto přejdeme k podobné dvojici $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, kde $\mathbb{R}$ je reálná přímka, tak, aby podmnožinám $\mathbb{R}$, které jsou v σ -algebře $\mathcal{B}$, bylo možno přiřadit pravděpodobnost odvozenou z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Při konstrukci σ -algebry na reálné přímce je vhodné zajistit, aby do $\mathcal{B}$ patřily všechny intervaly tvaru $\langle a, b \rangle, [a, b], (a, b), (-\infty, b), (-\infty, b], (a, \infty), \langle a, \infty)$. Nejmenší σ -algebra podmnožin $\mathbb{R}$, která obsahuje všechny intervaly zmíněných typů, se nazývá **borelovská σ -algebra**.

Definice 4.1: Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Reálná funkce X definovaná na Ω , pro kterou platí $x \in \mathbb{R} \Rightarrow [X < x] \in \mathcal{A}$, se nazývá **náhodná veličina**.

Reálná funkce X splňující definici 4.1 se nazývá **měřitelná**, prvky σ -algebry $\mathcal{B}$ se nazývají **měřitelné množiny**.

Jednotlivé realizace náhodné veličiny, tj. $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, značíme malými písmeny $(a, b, x, y, \dots)$. Budeme používat následující zápisy:

$$\begin{aligned}[X < x] &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}, \\[a < X < x] &= \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < x\}, \\[X = x] &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}.\end{aligned}$$

Definice 4.1 zaručuje možnost určit pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty z intervalu tvaru $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Protože $\mathcal{B}$ je (nejmenší) σ -algebra nad těmito intervaly, ke každé množině $B \in \mathcal{B}$ existuje její vzor v $\mathcal{A}$:

$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Proto pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$ určuje náhodná veličina X pravděpodobnost $P_X(B)$ náhodného jevu B pomocí vztahu: $P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B))$.

Jedním z úkolů teorie pravděpodobnosti je vybudovat **matematický aparát**, který přiřadí všem zajímavým **podmnožinám** množiny reálných čísel příslušné **pravděpodobnosti**. Pravidlo, které každé hodnotě (popř. každému intervalu hodnot) přiřazuje pravděpodobnost, že NV nabude této hodnoty (popř. hodnoty z tohoto intervalu), nazýváme **rozdělením pravděpodobnosti NV**. NV je tedy z pravděpodobnostního hlediska úplně popsána, jestliže známe všechny hodnoty, kterých může NV nabýt a pravděpodobnosti těchto hodnot.

Definice 4.2: Množinová funkce $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$, kde se $B \in \mathcal{B}$ nazývá **rozdělení pravděpodobnosti** náhodné veličiny X .

Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X je zřejmě určeno systémem pravděpodobností $P[X < x]$, $x \in \mathbb{R}$.

Jak popsat chování náhodné veličiny?



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - předpis, který jednoznačně určuje všechny pravděpodobnosti typu:

$$P(X \in M), \text{ kde } M \subset \mathbb{R}.$$

$$(\text{tj. } P(X = a), P(X < a), P(X > a), P(a < X < b), \text{ kde } a, b \in \mathbb{R})$$

Jak zadat rozdělení pravděpodobnosti?

- **funkcí** zadanou analyticky,
- **výčtem hodnot** NV a příslušných pravděpodobností.

Přesněji:

- distribuční funkcí,
- pravděpodobnostní funkcí (diskrétní NV),
- hustotou pravděpodobnosti (spojitá NV).

Distribuční funkce $F(x)$



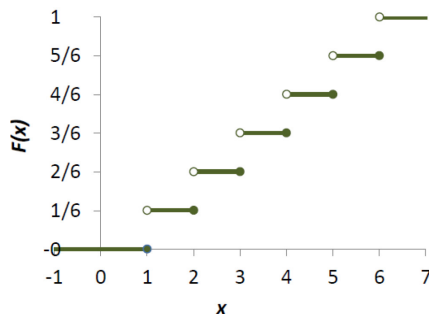
Definice 4.3: Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Reálná funkce $F_X(x) = P[X < x]$ se nazývá **distribuční funkce** náhodné veličiny X .

Distribuční funkce $F(x)$ jednoznačně

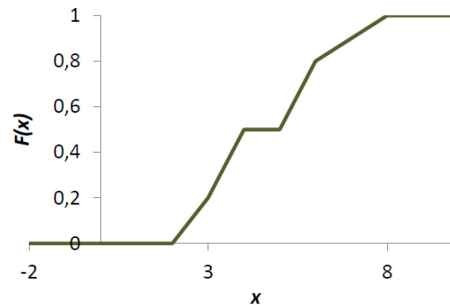
určuje rozdělení NV, tj. známe-li distribuční funkci, umíme určit pravděpodobnost $P(X \in M)$ pro libovolnou $M \subset \mathbb{R}$.

Pozn. dolní index se v označení distribuční funkce zpravidla vynechává.

Distribuční funkce $F(x)$ udává pravděpodobnost, že náhodná veličina X bude menší než dané reálné číslo x : $F(x) = P(X < x)$.



Ukázka distribuční funkce
diskrétní náhodné veličiny



Ukázka distribuční funkce
spojité náhodné veličiny

Věta 4.1: vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

- a) $0 \leq F(x) \leq 1$,
- b) $\forall x_1, x_2$, pokud je $x_1 < x_2$: $F(x_1) \leq F(x_2)$, tzn. je neklesající,
- c) $\forall a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow a-} F(x) = F(a)$, tzn. $F(x)$ je zleva spojitá,
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ („začíná“ v 0),
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ („končí“ v 1).

Další obecné vlastnosti distribuční funkce uvádí následující tvrzení, v němž symbolem $F(x + 0)$ značíme limitu zprava funkce F v bodě x .

Věta 4.2: Pro distribuční funkci $F(x)$ platí: $P(X = x) = F(x + 0) - F(x)$, pro $x \in \mathbb{R}$.

Z věty vyplývá, že distribuční funkce je v bodě x spojitá, právě když je $P(X = x) = 0$.

Důkazy obou vět: viz Zvára a Štěpán (2019), str. 63 a 64.

Základní typy náhodných veličin



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Diskrétní NV – mohou nabývat spočetně mnoha hodnot.

Příklady: počet dní hospitalizace, počet dopravních nehod, počet dní dovolené, počet zákazníků v supermarketu během jednoho dne, ...

DNV X s distribuční funkcí $F(x)$ je charakterizována **pravděpodobnostní funkcí** $P(X = x_i)$.

Spojitě NV – mohou nabývat všech hodnot na nějakém intervalu (mají spojitou distribuční funkci).

Příklady: doba do poruchy televizoru, výška, váha, BMI, IQ, vitální kapacita plic, chyba měření, ...

SNV X s distribuční funkcí $F(x)$ je charakterizována **hustotou pravděpodobností** $f(x)$.

Definice 4.4: Řekneme, že náhodná veličina X má **diskrétní rozdělení pravděpodobnosti** právě tehdy, když nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot $\{x_1, x_2, \dots\}$ tak, že platí

$$P(X = x_i) \geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1.$$

DNV lze charakterizovat: **pravděpodobnostní funkcí a distribuční funkcí** (viz definice 4.3).

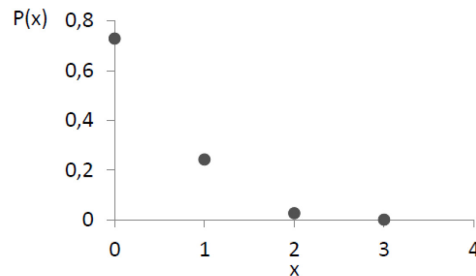
Definice 4.5: Funkci $P(X = x_i) = P(x_i)$ nazýváme **pravděpodobnostní funkcí** náhodné veličiny X .

Pro popis diskrétní náhodné veličiny se tato funkce používá častěji než funkce distribuční.

Lze ji zadat:

- předpisem, $\forall x \in \{0,1,2,3\}: P(X = x_i) = \binom{3}{x} \cdot 0,1^x \cdot 0,9^{3-x}$
- tabulkou,
- grafem.

x	0	1	2	3
P(x)	0,729	0,243	0,027	0,001



Definice 4.6: Distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny můžeme vyjádřit pomocí pravděpodobnostní funkce jako $F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i)$, tj. jako součet pravděpodobností těch x_i , která jsou menší než x .

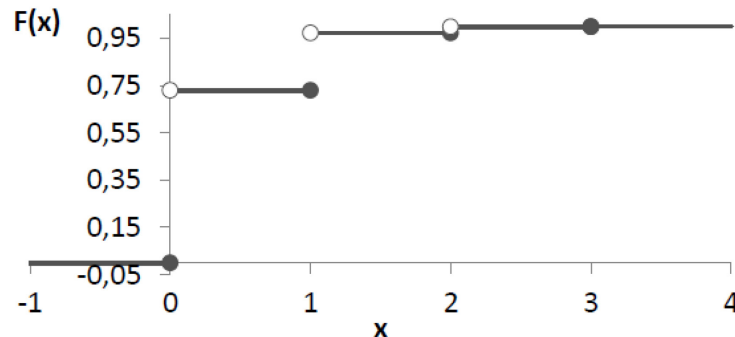
Lze ji zadat:

▪ předpisem,
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0,729 & 0 < x \leq 1 \\ 0,972 & 1 < x \leq 2 \\ 0,999 & 2 < x \leq 3 \\ 1 & 3 < x \leq \infty \end{cases}$$

▪ tabulkou,

x	$F(x)$
$(-\infty; 0)$	0
$(0; 1)$	0,729
$(1; 2)$	0,972
$(2; 3)$	0,999
$(3; \infty)$	1

▪ grafem.



Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny je „schodovitá“ funkce, která je nespojitá v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová. Je tedy zřejmé, že „**velikosti skoků**“ v **bodech nespojitosti** distribuční funkce udávají **hodnotu pravděpodobnosti** v těchto bodech.

Vztah mezi pravděpodobnostní a distribuční funkcí DNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Věta 4.3: Pro pravděpodobnostní funkci $P(x)$, distribuční funkci $F(x)$ a $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ platí:

a) $P(X < a) = F(a) = \sum_{x_i < a} P(x_i),$

b) $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a) = \sum_{x_i \geq a} P(x_i),$

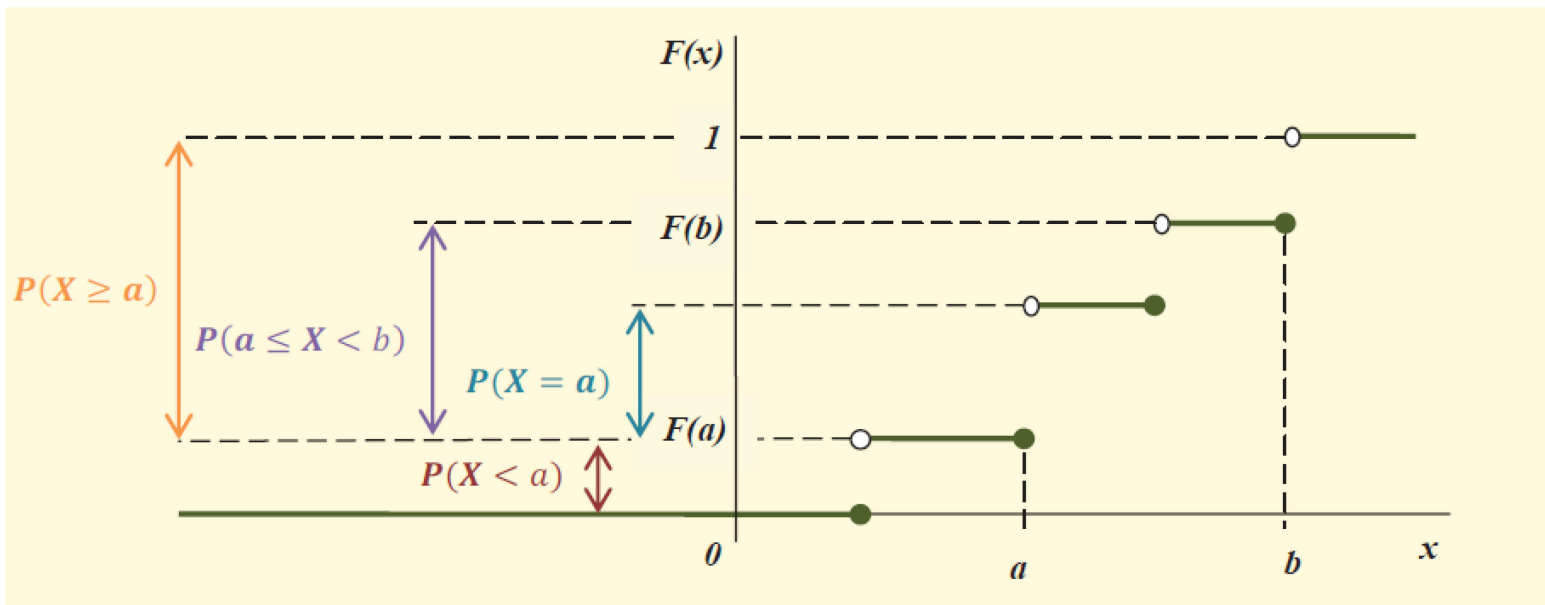
c) $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a) = \sum_{a \leq x_i < b} P(x_i),$

d) $P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a).$

Vztah mezi pravděpodobností a distribuční funkcí DNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

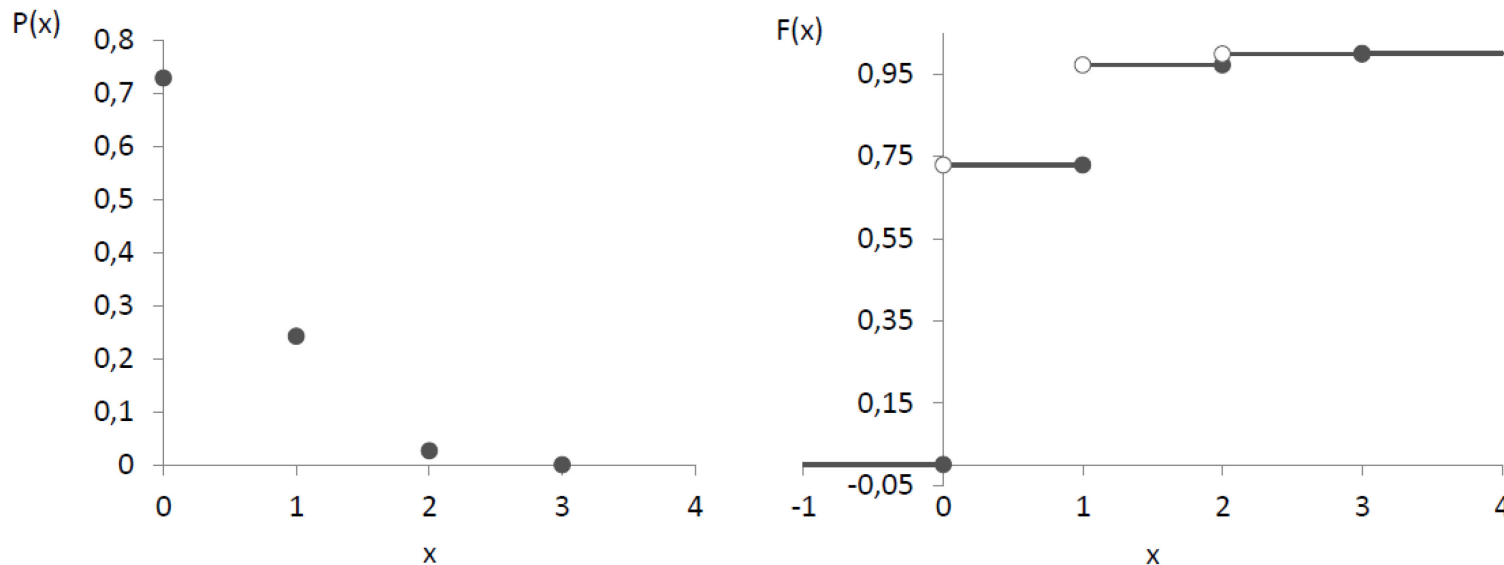


$$P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a)$$

Vztah mezi pravděpodobnostní a distribuční funkcí DNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

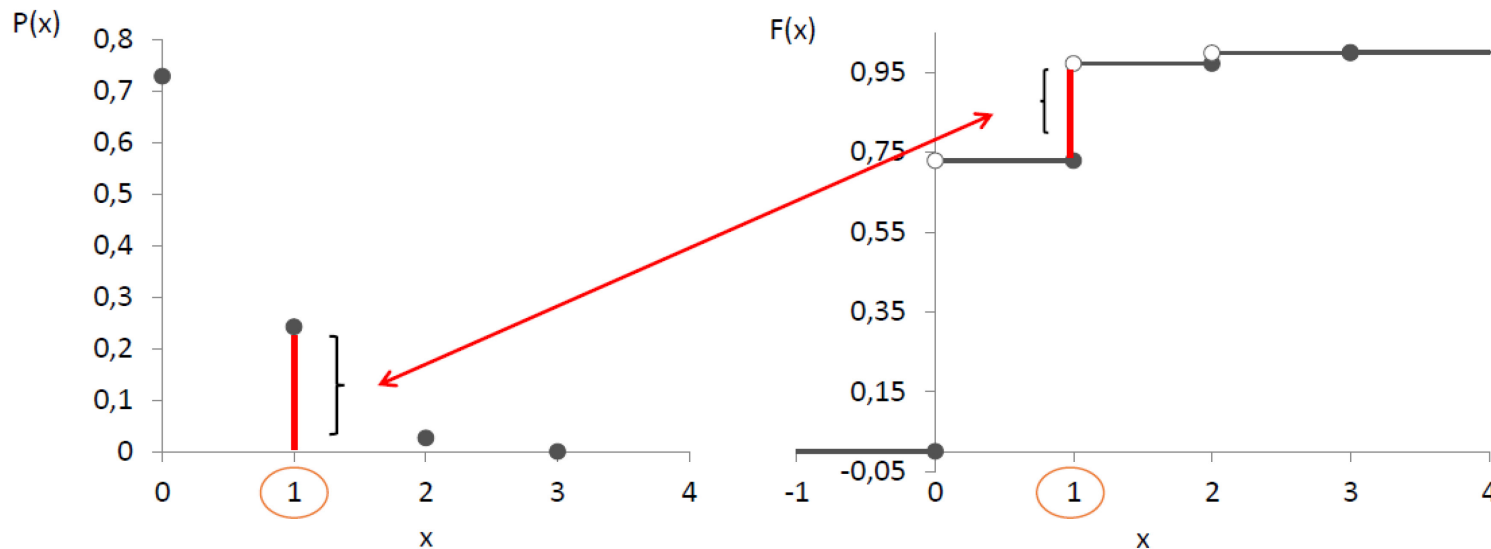


- **Body nespojitosti** distribuční funkce jsou body, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová.
- $P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a)$

Vztah mezi pravděpodobnostní a distribuční funkcí DNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ



- **Body nespojitosti** distribuční funkce jsou body, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová.
- $P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a)$, tj. velikost „skoku“ distribuční funkce v bodech nespojitosti je rovna příslušným hodnotám pravděpodobnostní funkce.

Příklad 4.1: Při ověřování kvality výroby v podniku Opavia jsou náhodně vybrány dva výrobky a je testována jejich kvalita. Počet vadných výrobků mezi vybranými modelujeme náhodnou veličinou X . Z dlouhodobého pozorování jsou známy údaje uvedené v následující tabulce.

Počet vadných výrobků	Pravděpodobnost
0	0,25
1	0,50
2	0,25

- a) určete **pravděpodobnostní funkci** počtu vadných výrobků v testovaném vzorku,
- b) určete **distribuční funkci** počtu vadných výrobků v testovaném vzorku.

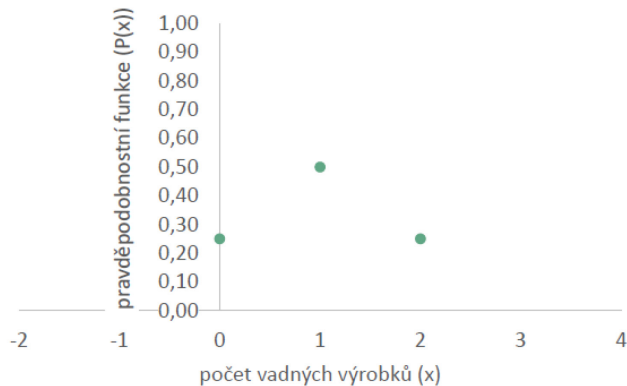
Diskrétní náhodná veličina



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

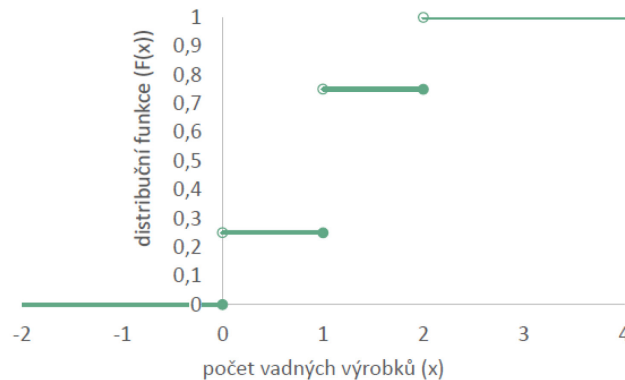
Ad a)

Počet vadných výrobků x	Pravděpodobnost $P(x)$
0	0,25
1	0,50
2	0,25
Celkem	1,00



Ad b)

Počet vadných výrobků x	Distribuční funkce $F(x) = P(X < x)$
$(-\infty; 0)$	0,00
$(0; 1)$	0,25
$(1; 2)$	0,75
$(2; \infty)$	1,00



Definice 4.7: Náhodná veličina X má **spojité rozdělení pravděpodobnosti** právě tehdy, jestliže existuje funkce f , pro kterou platí: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Z definice vyplývá, že v případě spojité náhodné veličiny nemá smysl jednotlivým realizacím náhodné veličiny přiřazovat hodnotu pravděpodobnosti, protože pravděpodobnostní funkce je nulová.

SNV lze charakterizovat: **hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí.**

Proč se pro popis SNV nepoužívá
pravděpodobnostní funkce?

SNV má spojitou distribuční funkci
a proto: $\forall a \in \mathbb{R}: P(x) = 0$.

Pomocí jakých nástrojů tedy můžeme spojitou náhodnou veličinu popsat? U spojitě náhodné veličiny můžeme stanovit pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny v libovolném intervalu. To znamená, že pro její popis můžeme použít **distribuční funkci**.

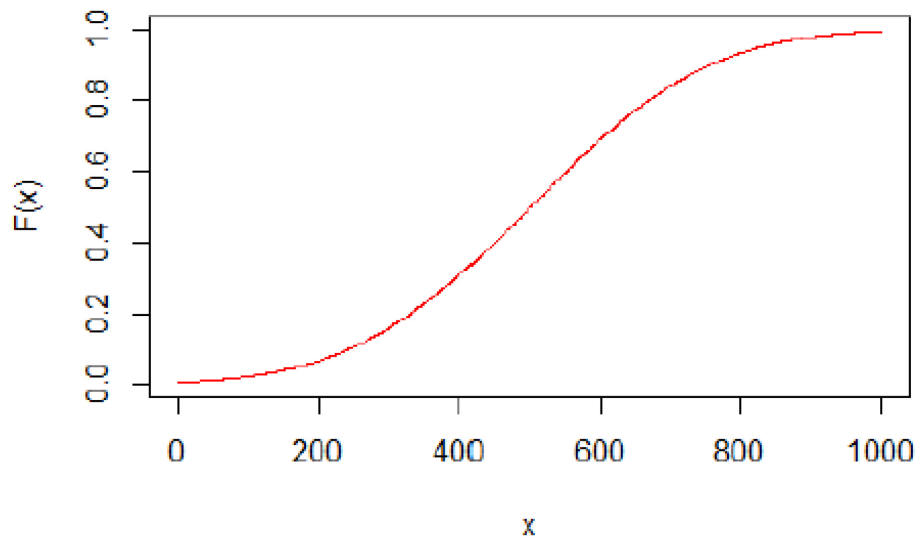
Jak již víme, chceme-li určit pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny na nějakém intervalu, využíváme vztahy:

- $P(X < a) = F(a)$, pro všechna $a \in \mathbb{R}$,
- $P(X \geq a) = 1 - F(a)$, pro všechna $a \in \mathbb{R}$,
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, pro všechna $a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Jelikož pro spojitou náhodnou veličinu platí, že $P(X = a) = 0$, můžeme dále tvrdit, že pro spojitou náhodnou veličinu X a pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

- $P(X \leq a) = P(X < a)$,
- $P(X > a) = P(X \geq a)$,
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$



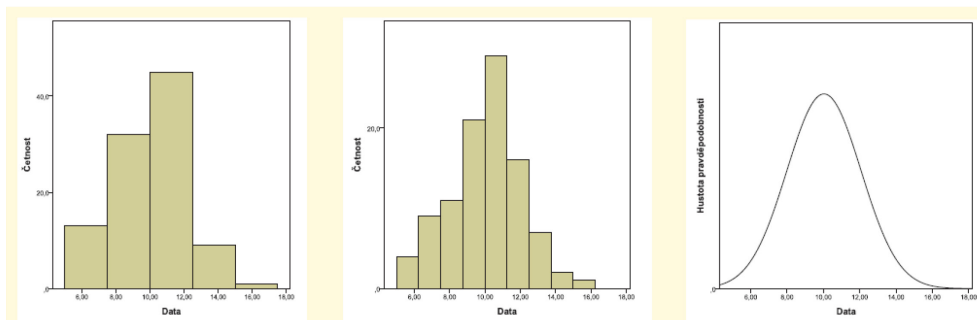
Hustota pravděpodobnosti SNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Místo pravděpodobnostní funkce se k popisu rozdělení spojité náhodné veličiny používá tzv. **hustota pravděpodobnosti** $f(x)$.

Předpokládejme, že máme k dispozici rozsáhlý soubor realizací spojité náhodné veličiny. Budeme-li třídit naměřené hodnoty do stále užších **třídních intervalů**, dostaneme **histogramy**, které se budou stále více blížit hladké křivce, výše zmíněné **hustotě pravděpodobnosti**. Té ovšem dosáhneme pouze v teoretickém limitním případě, kdy bychom třídili **nekonečně velký soubor** do nekonečně mnoha **nekonečně úzkých třídních intervalů**.



Obr. 3.7: Přejchod od histogramu k hustotě pravděpodobnosti

Hodnota hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ neudává pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X má hodnotu x . **Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ neudává žádnou pravděpodobnost!**

Definice 4.8: Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ spojité náhodné veličiny je reálná nezáporná funkce taková, že $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ pro $-\infty < x < \infty$.

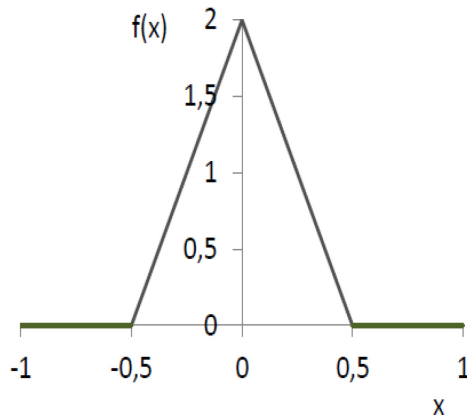
Dá se ukázat, že ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, platí

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Známe-li distribuční funkci, můžeme snadno určit hustotu pravděpodobnosti a naopak, známe-li hustotu pravděpodobnosti, snadno určíme distribuční funkci.

Věta 4.4: Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti $f(x)$:

- a) $f(x) \geq 0$, $f(x)$ je reálná nezáporná funkce,
- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (plocha pod křivkou hustoty je 1),
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (tzn. hustota pravděpodobnosti „začíná v 0“),
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (tzn. hustota pravděpodobnosti „končí v 0“),
- e) $f(x)$ může nabývat hodnot vyšších než 1.



Proto, aby byl základní popis spojité náhodné veličiny dokončen, zbývá nám odpovědět na otázku, jaký je vztah mezi **pravděpodobností výskytu spojité náhodné veličiny** v nějakém intervalu a **hustotou pravděpodobnosti**. Hledané vztahy snadno odvodíme.

Věta 4.5: Pro funkci $f(x)$ a $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ platí:

a) $P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx,$

b) $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx,$

c) $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a) =$
 $\int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$

d) $P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a) = 0.$

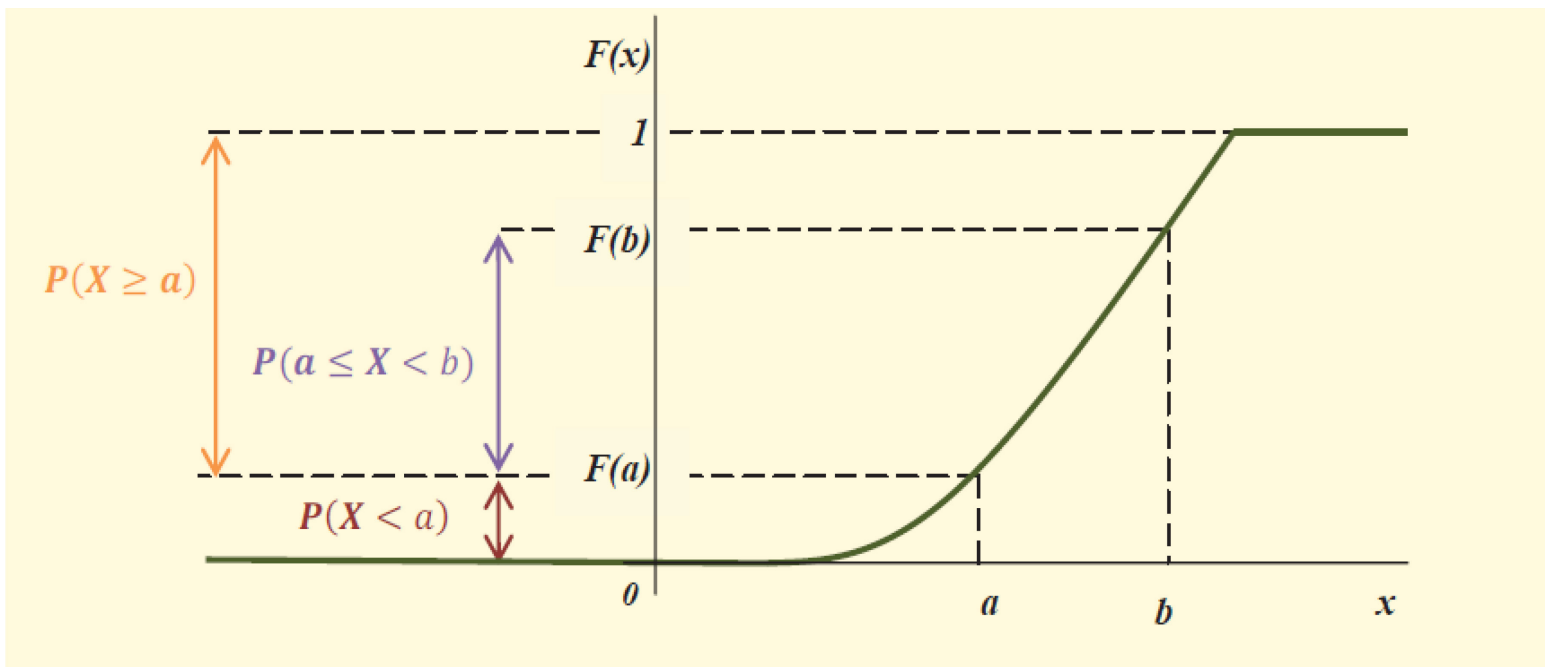
Pozn. Je-li náhodná veličina X spojitá, pak lze ve výše uvedených nerovnostech zaměňovat symboly ostré a neostré nerovnosti, tj. $P(X < a) = P(X \leq a)$ apod.

Důkaz: viz Zvára a Štěpán (2019), str. 70-71.

Vztah mezi pravděpodobností a distribuční funkcí SNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ



Geometrická interpretace vztahu mezi pravděpodobností a hustotou pravděpodobnosti SNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Je známo, že integrál z nezáporné funkce udává **velikost plochy pod jejím grafem**. Jedna z vlastností hustoty pravděpodobnosti říká, že plocha pod grafem funkce hustoty pravděpodobnosti je rovna 1, tzn. že:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

To je analogické situaci u diskrétní náhodné veličiny, kde součet pravděpodobností všech možných výsledků rovněž dává jedničku. Zároveň jsme si ukázali, že:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Můžeme tedy říci, že **obsah plochy pod křivkou** $f(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$ je pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X nabude hodnoty z tohoto intervalu ($\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$). Obdobně můžeme znázornit pravděpodobnosti:

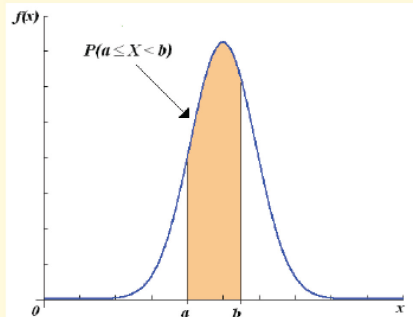
$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx,$$

$$P(X \geq a) = \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

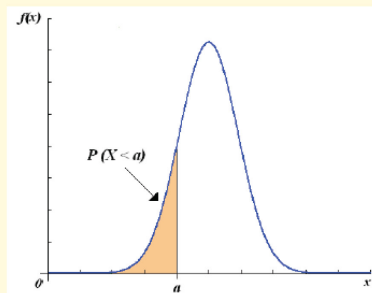
Geometrická interpretace vztahu mezi pravděpodobností a hustotou pravděpodobnosti SNV



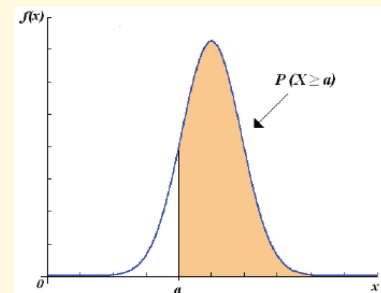
SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ



Obr. 3.8: Geometrická interpretace $P(a \leq X < b)$



Obr. 3.9: Geometrická interpretace $P(X < a)$



Obr. 3.10: Geometrická interpretace $P(X \geq a)$



Příklad 4.2: Trolejbusy v Opavě jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina X představuje dobu čekání na příjezd trolejbusu. Rozdělení dané náhodné veličiny je dáno **hustotou pravděpodobnosti**, která je v intervalu 0 - 10 minut konstantní, mimo tento interval je nulová, tj.: $f(x) = \begin{cases} c, & \text{pro } x \in \langle 0; 10 \rangle \\ 0, & \text{pro } x \notin \langle 0; 10 \rangle \end{cases}$

- a) Určete konstantu c .
- b) Určete distribuční funkci $F(x)$.
- c) Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat nejvýše 5 minut, alespoň 3 minuty, právě 7 minut.

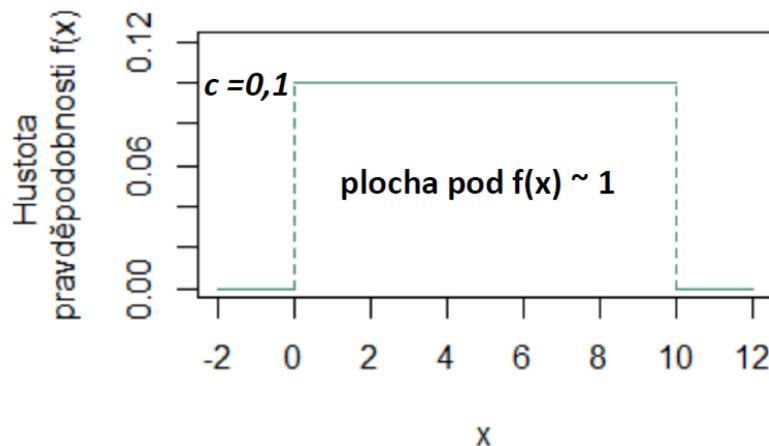
Vztah mezi hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí SNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Příklad 4.2: Trolejbusy v Opavě jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina X představuje dobu čekání na příjezd trolejbusu. Rozdělení dané náhodné veličiny je dáno **hustotou pravděpodobnosti**, která je v intervalu 0 - 10 minut konstantní, mimo tento interval je nulová, tj.: $f(x) = \begin{cases} c, & \text{pro } x \in \langle 0; 10 \rangle \\ 0, & \text{pro } x \notin \langle 0; 10 \rangle \end{cases}$

a) Určete konstantu c .



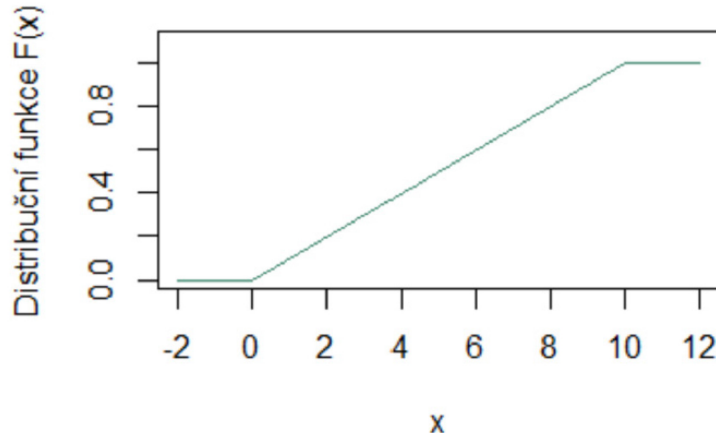
Příklad 4.2 : Trolejbusy v Opavě jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina X představuje dobu čekání na příjezd trolejbusu. Rozdělení dané náhodné veličiny je dáno **hustotou pravděpodobnosti**, která je v intervalu 0 - 10 minut konstantní, mimo tento interval je nulová, tj.: $f(x) = \begin{cases} c, & \text{pro } x \in \langle 0; 10 \rangle \\ 0, & \text{pro } x \notin \langle 0; 10 \rangle \end{cases}$.

b) Určete distribuční funkci $F(x)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 0,1 dt & \text{pro } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{pro } x > 10 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 0,1x & \text{pro } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{pro } x > 10 \end{cases}$$



Vztah mezi hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí SNV



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Příklad 4.2: Trolejbusy v Opavě jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina X představuje dobu čekání na příjezd trolejbusu. Rozdělení dané náhodné veličiny je dáno **hustotou pravděpodobnosti**, která je v intervalu 0 - 10 minut konstantní, mimo tento interval je nulová, tj.: $f(x) = \begin{cases} c, & \text{pro } x \in \langle 0; 10 \rangle \\ 0, & \text{pro } x \notin \langle 0; 10 \rangle \end{cases}$

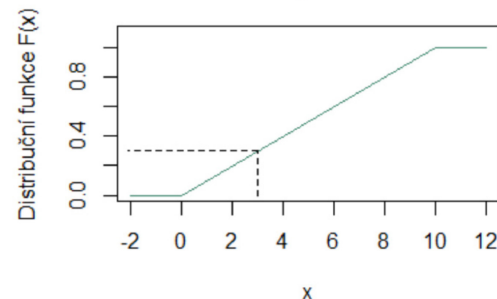
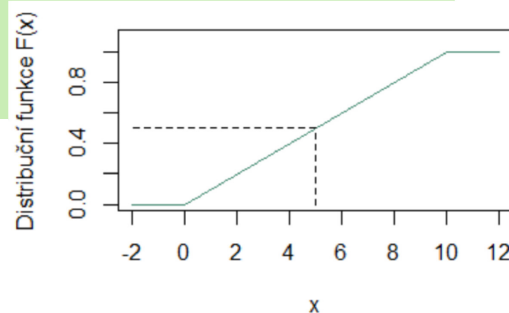
c) Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat:

- nejvýše 5 minut,
- alespoň 3 minuty,
- právě 7 minut.

Ad i. $P(X \leq 5) = P(X < 5) = \int_{-\infty}^5 f(x) dx = F(5) = 0,5$.

Ad ii. $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Ad iii. $P(X = 7) = 0$ (Pravděpodobnostní funkce SNV je ve všech bodech nulová.)



K čemu potřebujeme popisovat chování NV?

- NV převádějí abstraktní a většinou neznámý základní prostor Ω na čísla (s čísly se lépe pracuje).
- Ve složitějších situacích je **obtížné** základní prostor Ω rozumně **popsat** – stačí znát rozdělení příslušné NV a pracovat na reálných číslech.
- NV slouží jako **model** pro naše empirická pozorování (data).
- V **teorii pravděpodobnosti** s nimi pracujeme teoreticky – jejich rozdělení považujeme za dané a zkoumáme jejich vlastnosti.
- V **matematické statistice** se snažíme cosi usoudit o jejich neznámém rozdělení na základě konkrétních realizací.

1. K. Zvára, J. Štěpán. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Praha: MatfyzPress, 2019. ISBN 978-80-7378-388-4. **(kapitola 4)**.
2. Z. Riečanová a kol. *Numerické metody a matematická statistika*. Bratislava: Alfa, 1987. ISBN 063-559-87. **(kapitola 3)**.



Děkuji za pozornost.