

# Číselné charakteristiky náhodné veličiny

Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny



**SLEZSKÁ  
UNIVERZITA**  
MATEMATICKÝ ÚSTAV  
V OPAVĚ

**Petr Sed'a**

Pravděpodobnost a statistika I  
2025

# Proč potřebujeme číselné charakteristiky NV?



SLEZSKÁ  
UNIVERZITA  
MATEMATICKÝ ÚSTAV  
V OPAVĚ

Distribuční funkce (pravděpodobnostní funkce, hustota pravděpodobnosti) popisují rozdělení NV jednoznačně, do všech podrobností.

Někdy nás zajímá pouze některý aspekt NV, který se dá popsat jedním číslem:

- očekávaná hodnota NV,
- variabilita možných hodnot,
- hodnota, pod níž leží pouze malé množství hodnot NV,
- šikmost rozdělení,
- koncentrace hodnot NV kolem očekávané hodnoty (špičatost rozdělení).

# Proč potřebujeme číselné charakteristiky NV?

Velkou skupinu číselných charakteristik náhodné veličiny tvoří tzv. **momenty rozdělení**. Ty dělíme na **momenty obecné** a **momenty centrální**.

- **Obecný moment**  $r$ -tého řádu (značí se  $\mu_r$  nebo  $E(X_r)$  pro  $r = 1, 2, \dots$ )

pro diskrétní NV: 
$$\mu_r = \sum_{(i)} x_i^r \cdot P(x_i)$$

pro spojitou NV: 
$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot f(x) dx$$

Význačnou roli mezi obecnými momenty má zejména obecný moment 1. řádu. Tento moment je nazýván **střední hodnotou**.

**Střední hodnota** je parametrem rozdělení náhodné veličiny. Často bývá označována jako **populační průměr**, tj. průměr všech realizací náhodné veličiny. Nedokážeme-li určit rozdělení náhodné veličiny **nedokážeme určit** ani její střední hodnotu.

**Definice 5.1:** Necht'  $X$  je náhodná veličina s **diskrétním rozdělením**, která nabývá hodnot  $x_1, x_2, \dots$ . Jestliže řada  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i)$  konverguje absolutně, označíme její součet  $E(X)$  a nazveme jej **střední hodnotou** náhodné veličiny  $X$ . Pokud řada  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i)$  nekonverguje absolutně, pak říkáme, že náhodná veličina  $X$  nemá střední hodnotu.

**Definice 5.2:** Necht'  $X$  je náhodná veličina, která má **spojité rozdělení** s hustotou  $f(x)$ . Pokud je  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x) dx < \infty$ , nazveme integrál  $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$  **střední hodnotou** náhodné veličiny  $X$ , v opačném případě řekneme, že neexistuje.

- **Střední hodnota** (angl. „expected value“, někdy také „mean“; značí se  $E(X)$  nebo  $\mu$ )

pro diskrétní NV:  $E(X) = \mu = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i)$

pro spojitou NV:  $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$

**Věta 5.1:** Necht'  $X$  je náhodná veličina, jejíž střední hodnota existuje, necht'  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Potom platí:

1.  $E(aX + b) = aE(X) + b$

Násobíme-li  $X$  konstantou, násobí se jí i její střední hodnota; přičteme-li k  $X$  konstantu, změní se o tuto konstantu i její střední hodnota.

2.  $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$

Střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jednotlivých středních hodnot.

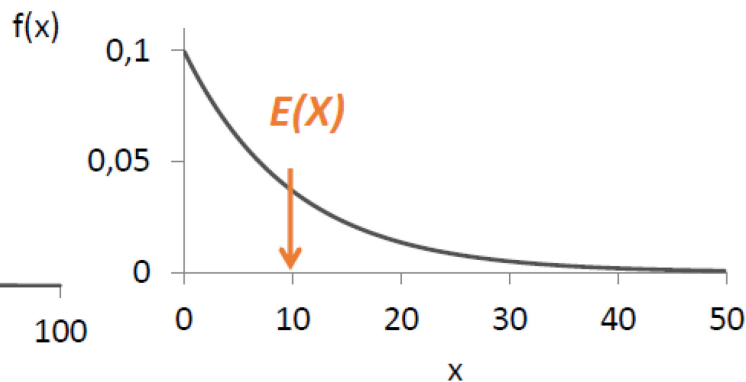
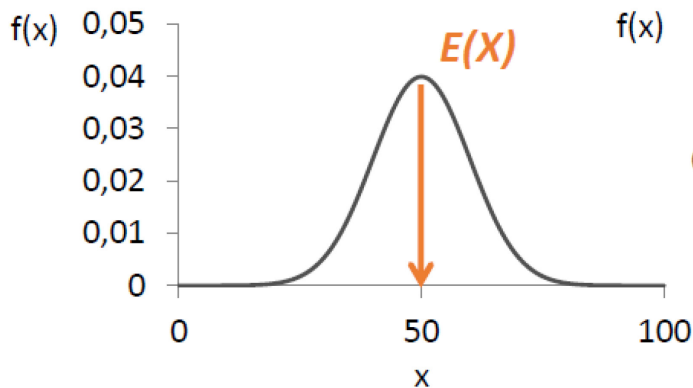
3. Pro  $X_1, \dots, X_n$  nezávislé platí  $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$

Jsou-li NV  $X_1, \dots, X_n$  nezávislé, pak střední hodnota jejich součinu je rovna součinu jednotlivých středních hodnot.

Důkazy: viz Zvára a Štěpán (2019), str. 97-99.

**Střední hodnotu  $E(X)$  náhodné veličiny  $X$  lze chápat jako:**

- průměrnou (očekávanou) hodnotu NV  $X$ , kolem níž hodnoty NV kolísají,
- míru polohy, populační průměr,
- vážený průměr všech možných hodnot ( $E(X) = \sum_i X_i \cdot P(X_i)$ ),
- „těžiště“ možných hodnot.



- **Centrální moment**  $r$ -tého řádu  $\mu'_r$  (značíme  $\mu'_r = E(X - E(X))^r$  pro  $r = 1, 2, \dots$ )

pro diskrétní NV:  $\mu'_r = \sum_{(i)} (x_i - E(X))^r \cdot P(x_i)$

pro spojitou NV:  $\mu'_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - E(X))^r \cdot f(x) dx$

Podobně význačné postavení jako má střední hodnota mezi obecnými momenty, má mezi centrálními momenty druhý centrální moment – **rozptyl**.

**Rozptyl** je parametrem rozdělení vyjadřujícím **variabilitu (rozptýlenost)** realizací náhodné veličiny kolem její střední hodnoty. Jednotka rozptylu je kvadrátem jednotky, v níž jsou zaznamenávány jednotlivé realizace NV. Například jednotkou rozptylu mezd v ČR je Kč<sup>2</sup>.

**Definice 5.3:** Necht'  $X$  je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou, potom výraz  $\text{var } X = E(X - E(X))^2$ , pokud střední hodnota na pravé straně existuje, se nazývá **rozptyl** náhodné veličiny  $X$ .

- **Rozptyl** (angl. „dispersion“, „variance“; značí se  $\mu'_2$  nebo  $\sigma^2$  nebo  $\text{var } X$  nebo  $D(X)$ )

pro diskrétní NV:  $\text{var } X = D(X) = \mu'_2 = \sum_{(i)} (x_i - E(X))^2 \cdot P(x_i)$

pro spojitou NV:  $\text{var } X = D(X) = \mu'_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 \cdot f(x) dx$

Definiční vztahy pro rozptyl pomocí momentů se při praktických výpočtech ukazují jako nevhodné (časově náročný výpočet).

**Věta 5.2:** Pro náhodnou veličinu  $X$  s konečným rozptylem a libovolná  $a, b \in \mathbb{R}$  platí:

1.  $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ .

2.  $D(aX + b) = a^2 D(X)$ .

Násobíme-li náhodnou veličinu konstantou, hodnota jejího rozptylu se vynásobí druhou mocninou této konstanty; přičteme-li k náhodné veličině konstantu, její rozptyl se nezmění.

3.  $\sqrt{D(aX + b)} = |a| \sqrt{D(X)}$ .

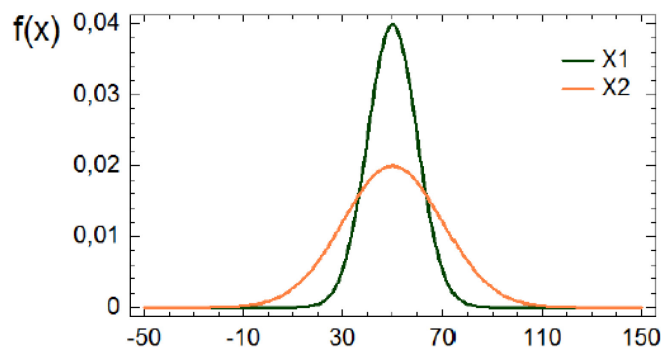
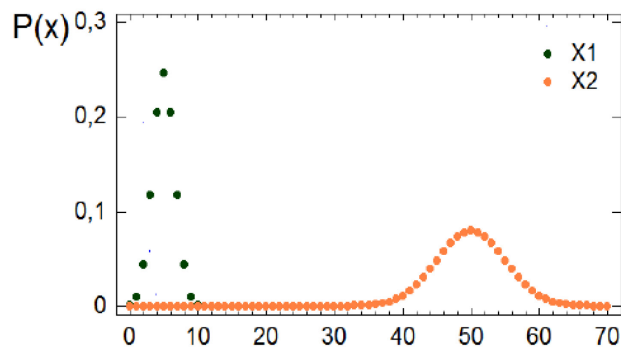
4. Jestliže  $X_1, \dots, X_n$  jsou nezávislé  $\Rightarrow D(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$ .

Jsou-li NV  $X_1, \dots, X_n$  nezávislé, pak rozptyl jejich součtu je roven součtu jednotlivých rozptylů. Obecně to ale neplatí.

Důkazy: viz Zvára a Štěpán (2019), str. 103.

**Rozptyl**  $D(X)$  náhodné veličiny  $X$  lze chápat jako:

- míru variability dat kolem střední hodnoty,
- střední kvadratickou odchylku od střední hodnoty  $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ,
- malý rozptyl  $\approx$  hodnoty NV se s vysokou pravděpodobností objevují blízko  $E(X)$ ,
- velký rozptyl  $\approx$  hodnoty NV se často objevují ve velké vzdálenosti od  $E(X)$ .



$$D(X_1) < D(X_2)$$

**Věta 5.3:** Nechť  $\text{var } X < \infty$ , nechť  $\epsilon > 0$ . Potom platí  $P[(X - E(X)) \geq \epsilon] \leq \frac{\text{var } X}{\epsilon^2}$ .

Důkaz: viz Zvára a Štěpán (2019), str. 127.

Z Věty 5.3 vyplývá:  $P[(X - E(X)) < \epsilon] = 1 - P[(X - E(X)) \geq \epsilon] \geq \frac{\text{var } X}{\epsilon^2}$ .

**Příklad 5.1:** Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost, že  $P[(X - E(X)) < 3\sigma]$ , kde  $\sigma = \sqrt{D(X)}$ .

Jestliže  $\epsilon = 3\sigma$ , potom  $P[(X - E(X)) \geq 3\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$ .

Tedy  $P[(X - E(X)) < 3\sigma] = 1 - P[(X - E(X)) \geq 3\sigma] \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ .

Získali jsme pravidlo  $3\sigma$ , které vymezuje interval  $E(X) \pm 3\sigma$ , v němž se nacházejí hodnoty náhodné proměnné  $X$  s vysokou pravděpodobností.

**Definice 5.4:** Směrodatná odchylka náhodné veličiny  $X$  je definována jako odmocnina z rozptylu:  $\sigma = \sqrt{D(X)}$ .

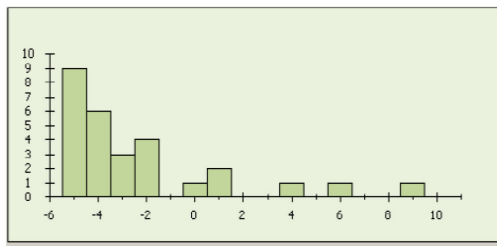
**Směrodatná odchylka** (angl. „standard deviation“, značí se  $\sigma$ , popř.  $\sigma_x$  chceme-li zdůraznit příslušnost k určité náhodné veličině).

Podobně jako rozptyl je také směrodatná odchylka mírou **variability náhodné veličiny**. Jednotka, v níž bývá uváděna směrodatná odchylka je stejná jako jednotka, v níž jsou zaznamenávány jednotlivé realizace NV.

Jakou představu o náhodné veličině  $X$  si lze udělat na základě její střední hodnoty  $\mu$  a směrodatné odchylky  $\sigma$ ?

$\forall k > 0: P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}$  (**Čebyševova nerovnost** v alternativním tvaru).

| $k$ | $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$ |
|-----|----------------------------------------|
| 1   | $>0$                                   |
| 2   | $>0,75$                                |
| 3   | $>0,89$                                |



Směrodatná odchylka neumožňuje srovnávat variabilitu náhodných veličin měřených v různých jednotkách!

**Definice 5.5: Variační koeficient** náhodné veličiny  $X$  je definován pouze pro nezáporné náhodné veličiny:  $\gamma = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = \frac{\sigma}{\mu}$ , resp.  $\frac{\sigma}{\mu} \cdot 100$  [%].

- Variační koeficient – směrodatná odchylka v procentech střední hodnoty.
- Čím nižší variační koeficient, tím homogennější soubor.
- $\gamma > 50$  % značí silně rozptýlený soubor.

**Příklad 5.2:** Při ověřování kvality výroby v podniku Opavia jsou náhodně vybrány dva výrobky a je testována jejich kvalita. Počet vadných výrobků mezi vybranými modelujeme náhodnou veličinou  $X$ . Z dlouhodobého pozorování jsou známy údaje uvedené v následující tabulce.

| Počet vadných výrobků | Pravděpodobnost |
|-----------------------|-----------------|
| 0                     | 0,25            |
| 1                     | 0,50            |
| 2                     | 0,25            |

Určete:

- střední hodnotu počtu vadných výrobků v testovaném vzorku,
- rozptyl počtu vadných výrobků v testovaném vzorku,
- směrodatnou odchylku počtu vadných výrobků v testovaném vzorku,
- variační koeficient počtu vadných výrobků v testovaném vzorku.

# Diskrétní náhodná veličina



SLEZSKÁ  
UNIVERZITA  
MATEMATICKÝ ÚSTAV  
V OPAVĚ

Ad a) střední hodnota počtu vadných výrobků v testovaném vzorku:

| $x$           | $P(x)$      | $x \cdot P(x)$ |
|---------------|-------------|----------------|
| 0             | 0,25        | 0,00           |
| 1             | 0,50        | 0,50           |
| 2             | 0,25        | 0,50           |
| <b>Celkem</b> | <b>1,00</b> | <b>1,00</b>    |

$$E(X) = \mu = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i) = 1.$$

Ad b) rozptyl počtu vadných výrobků v testovaném vzorku:

| $x$           | $P(x)$      | $x \cdot P(x)$ | $x^2 \cdot P(x)$ |
|---------------|-------------|----------------|------------------|
| 0             | 0,25        | 0,00           | 0,00             |
| 1             | 0,50        | 0,50           | 0,50             |
| 2             | 0,25        | 0,50           | 1,00             |
| <b>Celkem</b> | <b>1,00</b> | <b>1,00</b>    | <b>1,50</b>      |

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1,50 - 1^2 = 0,50.$$

Rozptyl počtu vadných výrobků v testovaném vzorku je 0,5 ks<sup>2</sup>.

Ad c) směrodatná odchylka počtu vadných výrobků v testovaném vzorku:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,71.$$

Směrodatná odchylka počtu vadných výrobků v testovaném vzorku je 0,71 ks.

Ad d) variační koeficient počtu vadných výrobků v testovaném vzorku:

$$\gamma(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = \frac{0,71}{1} \cong 0,71 \approx 71 \ %.$$

Variační koeficient počtu vadných výrobků v testovaném vzorku je cca 71 %, tj. lze mluvit o nehomogenním (silně rozptýleném) rozdělení.

# Spojité náhodné veličiny

**Příklad 5.3:** Trolejbusy v Opavě jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina  $X$  představuje dobu čekání na příjezd trolejbusu. Rozdělení dané náhodné veličiny je dáno **hustotou pravděpodobností**, která je v intervalu 0 - 10 minut konstantní, mimo tento interval je nulová, tj.: 
$$f(x) = \begin{cases} 0,1, & \text{pro } x \in \langle 0; 10 \rangle \\ 0, & \text{pro } x \notin \langle 0; 10 \rangle \end{cases}.$$

Určete:

- a) střední hodnotu náhodné veličiny  $X$ ,
- b) rozptyl náhodné veličiny  $X$ ,
- c) směrodatnou odchylku náhodné veličiny  $X$ ,
- d) variační koeficient náhodné veličiny  $X$ .

Ad a) střední hodnota náhodné veličiny  $X$ :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{10} x \cdot 0,1 dx + \int_{10}^{\infty} x \cdot 0 dx$$

$$E(X) = 0 + \int_0^{10} x \cdot 0,1 dx + 0$$

$$E(X) = \left[ 0,1 \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = 5$$

Ad b) rozptyl náhodné veličiny  $X$ :

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X) = 5 \text{ min}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^{10} x^2 \cdot 0,1 dx + \int_{10}^{\infty} x^2 \cdot 0 dx$$

$$E(X^2) = 0 + \int_0^{10} x^2 \cdot 0,1 dx + 0$$

$$E(X^2) = \left[ 0,1 \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{100}{3} \text{ min}^2$$

Ad b) rozptyl náhodné veličiny  $X$ :

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{100}{3} - 5^2 \cong 8,3 \text{ min}^2$$

$$E(X) = 5 \text{ min}$$

$$E(X^2) = \frac{100}{3} \text{ min}^2$$

Ad c) směrodatná odchylka náhodné veličiny  $X$ :

Ad d) variační koeficient náhodné veličiny  $X$ :

$$E(X) = 5 \text{ min}, D(X) \cong 8,3 \text{ min}^2$$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \cong 2,9 \text{ min}$  Směrodatná odchylka doby čekání cestujícího na příjezd trolejbusu je cca 2,9 min. Dle variačního koeficientu (58 %) lze dobu čekání na tramvaj považovat za spíše nehomogenní.

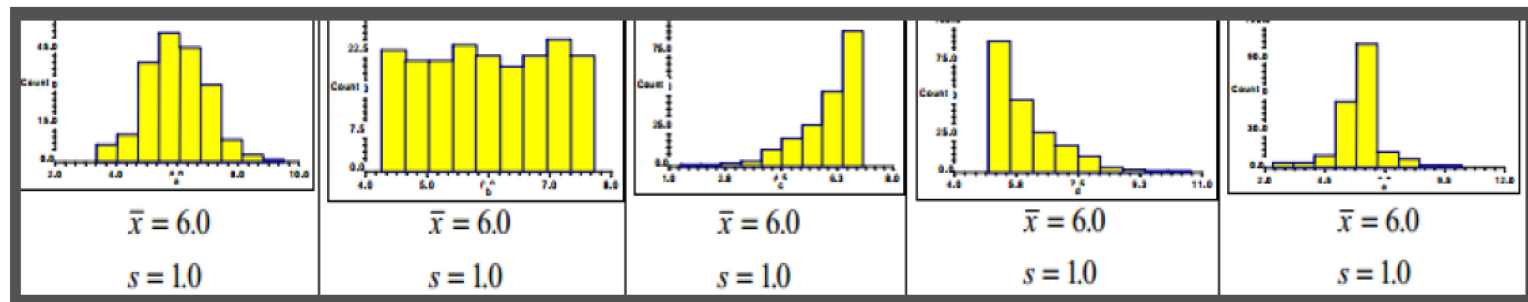
$$\gamma(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)} \cong 0,58$$

# Jsou míry polohy a míry variability dostatečné pro posouzení rozdělení sledovaných veličin?



SLEZSKÁ  
UNIVERZITA  
MATEMATICKÝ ÚSTAV  
V OPAVĚ

Všech pět ukázek má stejné charakteristiky **polohy i variability** (průměry i směrodatné odchylky jsou shodné). Přesto na první pohled vidíme, že tvary rozdělení dat jsou různé.



Zdroj: TVRDÍK, J.: Základy matematické statistiky, Ostravská univerzita, 2008

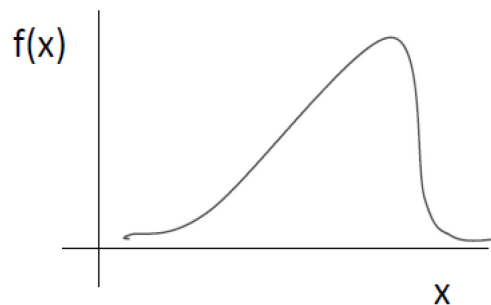
Momenty vyšších řádů se využívají nejčastěji k určení číselných charakteristik popisujících tvar rozdělení (šikmost, špičatost).

**Definice 5.6: Šikmost** (angl. „skewness“) je mírou symetrie daného rozdělení pravděpodobnosti a je definována podílem třetího centrálního momentu a třetí mocniny směrodatné odchylky:  $\alpha_3 = \frac{\mu'_3}{\sigma^3} = \frac{E(X-E(X))^3}{\sigma^3}$ .

Symetrii rozdělení (vzhledem k symetrii normovaného normálního rozdělení pak posuzujeme takto.

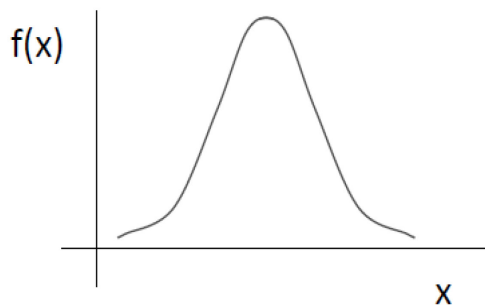
|                |                               |
|----------------|-------------------------------|
| $\alpha_3 = 0$ | Symetrické rozdělení          |
| $\alpha_3 < 0$ | Negativně zešikmené rozdělení |
| $\alpha_3 > 0$ | Pozitivně zešikmené rozdělení |

Momenty vyšších řádů se využívají nejčastěji k určení číselných charakteristik popisujících **tvár rozdělení** (šikmost, špičatost).



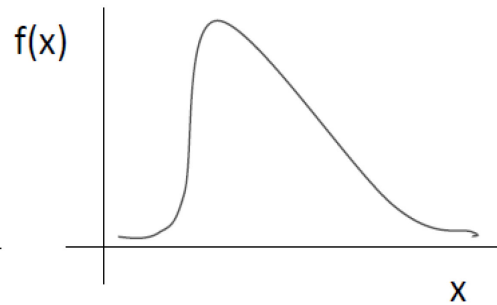
$$\alpha_3 < 0$$

negativně zešikmené rozdělení



$$\alpha_3 = 0$$

symetrické rozdělení



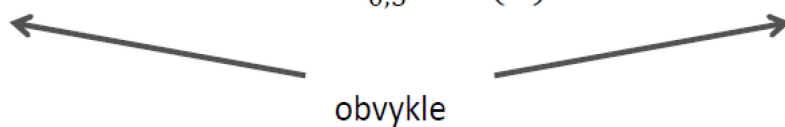
$$\alpha_3 > 0$$

pozitivně zešikmené rozdělení

$$E(X) < x_{0,5} < \hat{x}$$

$$\hat{x} = x_{0,5} = E(X)$$

$$\hat{x} < x_{0,5} < E(X)$$



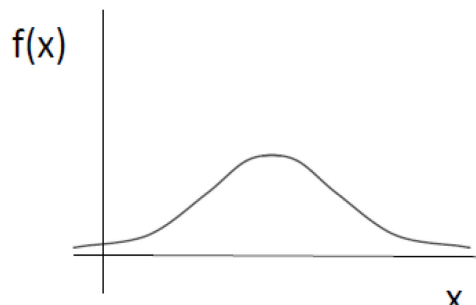
**Definice 5.7: Špičatost** (angl. „kurtosis“) je mírou koncentrace hodnot náhodné veličiny kolem střední hodnoty a je definována podílem čtvrtého centrálního momentu a čtvrté mocniny směrodatné odchylky:  $\alpha_4 = \frac{\mu'_4}{\sigma^4} = \frac{E(X-E(X))^4}{\sigma^4}$ .

Špičatost rozdělení pak posuzujeme vzhledem ke špičatosti normovaného normálního rozdělení takto:

|                |                                                                   |
|----------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\alpha_4 = 3$ | Normální špičatost (tj. špičatost normálního rozdělení)           |
| $\alpha_4 < 3$ | Menší špičatost než u normálního rozdělení (plošší rozdělení)     |
| $\alpha_4 > 3$ | Větší špičatost než u normálního rozdělení (špičatější rozdělení) |

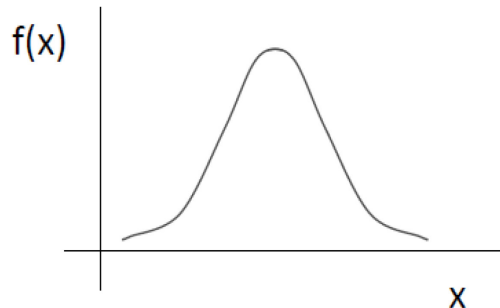
Vzhledem k nepraktickému vyhodnocování špičatosti (vzhledem k hodnotě 3) se mnohdy používá tzv. **standardizovaná špičatost**, která je definována jako  $\alpha_4 - 3$  a špičatost rozdělení je pak posuzována vzhledem k hodnotě 0.

Momenty vyšších řádů se využívají nejčastěji k určení číselných charakteristik popisujících **tvar rozdělení** (šikmost, špičatost).



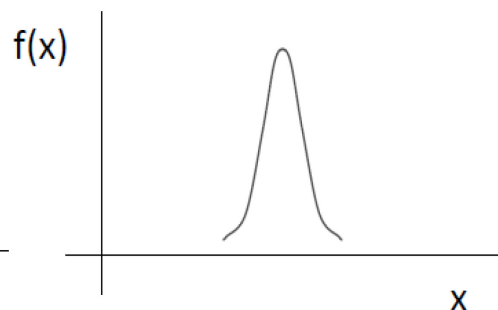
$$\alpha_4 < 3$$

špičatost menší než u  
norm. rozdělení (plošší  
rozdělení)



$$\alpha_4 = 3$$

špičatost odpovídající  
normálnímu rozdělení



$$\alpha_4 > 3$$

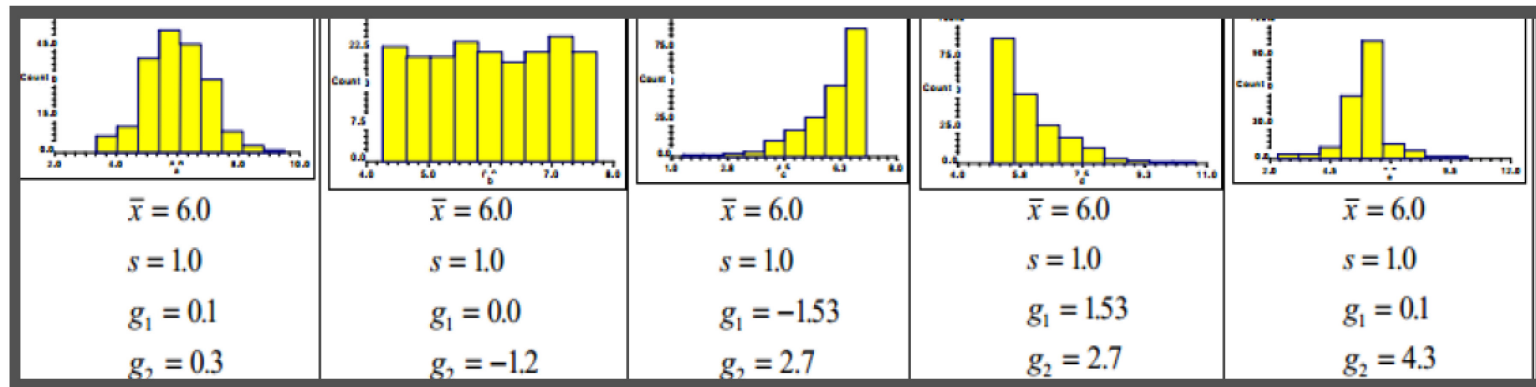
špičatost větší než  
u norm. rozdělení  
(špičatější rozdělení)

## Jsou míry polohy a míry variability dostatečné pro posouzení rozdělení sledovaných veličin?



SLEZSKÁ  
UNIVERZITA  
MATEMATICKÝ ÚSTAV  
V OPAVĚ

Všech pět ukázek má stejné charakteristiky **polohy i variability** (průměry i směrodatné odchylky jsou shodné). Přesto na první pohled vidíme, že tvary rozdělení dat jsou různé. K číselnému vyjádření těchto rozdílů nám slouží další charakteristiky - **šikmost** ( $g_1$ , angl. skewness) a **špičatost** ( $g_2$ , angl. kurtosis).

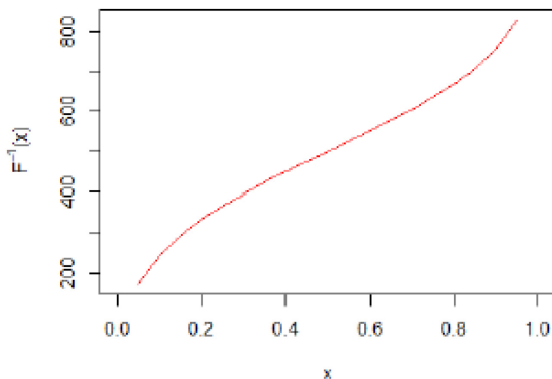


Zdroj: TVRDÍK, J.: Základy matematické statistiky, Ostravská univerzita, 2008

- Kvantily (angl. „quantiles, percentiles“; značí se obvykle  $x_p$ )

**Kvantily** diskrétní náhodné veličiny v praxi obvykle neurčujeme, neboť jejich stanovení většinou není jednoznačné. V případě spojité náhodné veličiny kvantily stanovujeme z podmínky  $\forall p \in \langle 0; 1 \rangle: F(x) = p$ .

**Definice 5.8:** Nechť  $F(x)$  je distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ . Funkce  $F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq p\}$ ,  $0 < p < 1$ , se nazývá **kvantilové funkce** náhodné veličiny  $X$ . Pro  $0 < \alpha < 1$  se hodnota  $F^{-1}(\alpha)$  nazývá  **$\alpha$ -kvantil**. Speciálně  $F^{-1}(0,5)$  kvantil se nazývá **medián**.



Je tedy možné říci, tj. kvantilová funkce  $F^{-1}(p)$  je **funkcí inverzní** k distribuční funkci  $F(x)$ .

Kvantil  $x_p$  udává takovou hodnotu, že pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než  $x_p$  je  $100p$  %. Například: Popisuje-li náhodná veličina  $X$  mzdy v ČR a  $x_{0,25} = 18\,000$  Kč, pak víte, že 25 % obyvatel ČR má plat menší než 18 000,- Kč.

## Kvartily

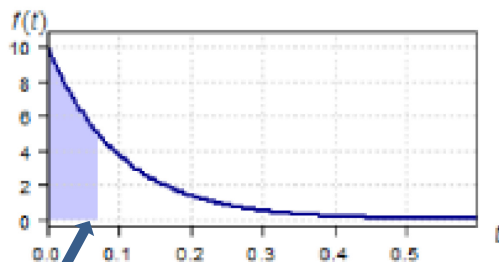
- Dolní kvartil  $x_{0,25}$
- Medián  $x_{0,5}$
- Horní kvartil  $x_{0,75}$

## Decily

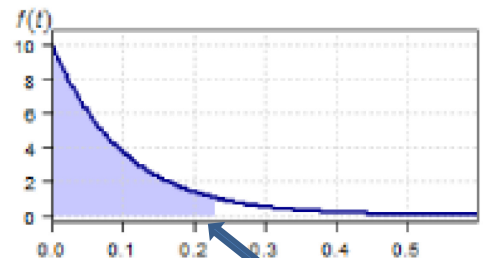
- $x_{0,1}; x_{0,2}; \dots; x_{0,9}$

## Percentily

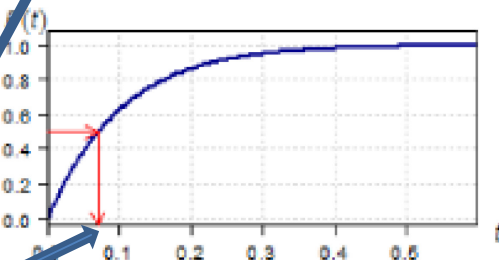
- $x_{0,01}; x_{0,02}; \dots; x_{0,99}$



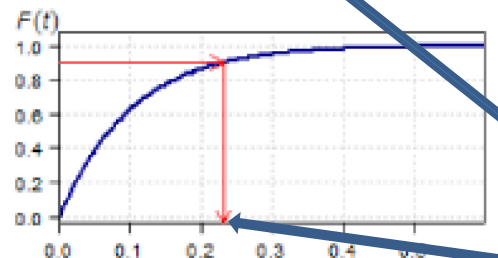
$$P(X < 0.0693) = 0.5$$



$$P(X < 0.2303) = 0.9$$



$$F(0.0693) = 0.5$$



$$F(0.2303) = 0.9$$

$x_{0,5}$

50% kvantil

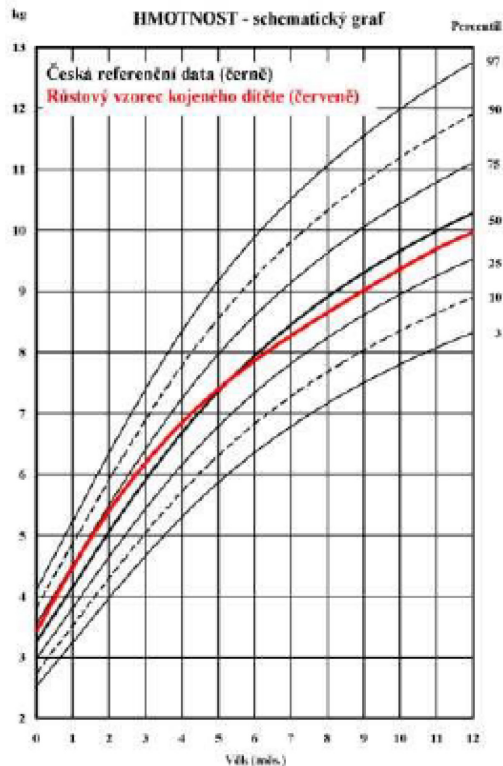
$x_{0,9}$

90% kvantil

# Příklady kvantilů



SLEZSKÁ  
UNIVERZITA  
MATEMATICKÝ ÚSTAV  
V OPAVĚ

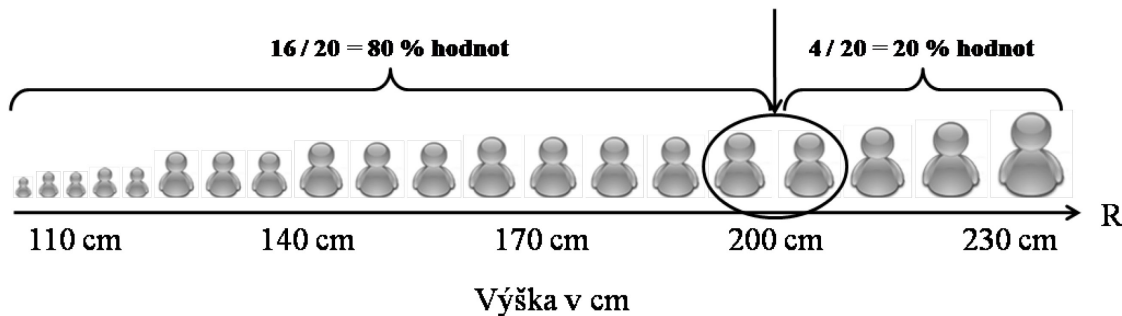


$n = 20$

Průměr těchto dvou hodnot = 80% kvantil

$16 / 20 = 80 \% \text{ hodnot}$

$4 / 20 = 20 \% \text{ hodnot}$



U kategoriální proměnné je **modus** roven nejčtenější kategorií proměnné. Obdobně jej můžeme chápat u náhodné veličiny. Modus **maximalizuje** pravděpodobnostní funkci, resp. hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$ .

**Modus  $\hat{x}$**  – typická hodnota náhodné veličiny:

pro diskrétní NV:  $\forall i \in 1, 2, \dots, n: P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i)$ .

Tzn. modus je taková hodnota DNV, v níž  $P(x_i)$  nabývá svého **maxima**.

pro spojitou NV:  $\forall x \in \mathbb{R}: f(\hat{x}) \geq f(x)$ .

Tzn. modus je taková hodnota SNV, v níž  $f(x)$  nabývá svého **maxima**.

Modus není těmito podmínkami určen jednoznačně, tzn. náhodná veličina může mít několik modů (např. výsledek hodu kostkou). Má-li NV právě jeden modus, mluvíme o **unimodálním rozdělení NV**.

Má-li NV **unimodální symetrické rozdělení**, pak  $E(X) = x_{0,5} = \hat{x}$ .

**Příklad 5.4:** Vylučovatelství skupinově specifických substancí ABH je podmíněno dominantní alelou  $Se$ , nevylučovatelství je podmíněno recesivní alelou  $se$  (<https://cs.wikipedia.org/wiki/Alela>). Jestliže rodiče jsou heterozygotní vylučovatelé ( $Se, se$ ), jejich potomek může být nevylučovatel ( $se, se$ ), homozygotní vylučovatel ( $Se, Se$ ) nebo heterozygotní vylučovatel ( $Se, se$ ) s pravděpodobnostmi uvedenými v níže uvedené tabulce.

a) Určete modus počtu alel  $Se$ .

| Genotyp potomka                        | Počet alel $Se$ | Pravděpodobnost |
|----------------------------------------|-----------------|-----------------|
| Nevylučovatel ( $se, se$ )             | 0               | 0,25            |
| Heterozygotní vylučovatel ( $Se, se$ ) | 1               | 0,50            |
| Homozygotní vylučovatel ( $Se, Se$ )   | 2               | 0,25            |

*Vylučovatelství skupinově specifických substancí ABH*

Ad a)  $\hat{x} = 1$ . Nejčastěji lze očekávat heterozygotního vylučovatele.

**Příklad 5.5:** Modelujeme výšku chlapců ve věku 3,5 – 4 roky.

Vysvětlíte:

1. 2% kvantil modelované náhodné veličiny je 93 cm.
2. Střední hodnota modelované NV je 102 cm, směrodatná odchylka je 4,5 cm. V jakém rozpětí lze očekávat výšku chlapců ve věku 3,5 – 4 roky? Pro interpretaci využijte Čebyševovu nerovnost.
3. Střední hodnota modelované NV je 102 cm, směrodatná odchylka je 4,5 cm. Posuďte variabilitu modelované NV. Není příliš vysoká? Pro posouzení použijte variační koeficient.
4. Víme, že pro distribuční funkci modelované NV platí:  $F(111) = 0,98$ . Co jsme se dozvěděli?

1. K. Zvára, J. Štěpán. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Praha: MatfyzPress, 2019. ISBN 978-80-7378-388-4. **(kapitola 6 a 7)**.
2. Z. Riečanová a kol. *Numerické metody a matematická statistika*. Bratislava: Alfa, 1987. ISBN 063-559-87. **(kapitola 4)**.



**Děkuji za pozornost.**