

Diskrétní náhodná veličina (proměnná)

Vybraná rozdělení pravděpodobnosti



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Petr Sedřa

Pravděpodobnost a statistika I

2025

- Co je to **náhodná veličina** (dále NV)?

Číselné vyjádření výsledku náhodného pokusu.

- Jaké základní **typy náhodných veličin** známe?

Diskrétní NV (dále DNV) a spojité NV (dále SNV).

- Co je to **rozdělení pravděpodobnosti**?

Předpis, který jednoznačně určuje všechny pravděpodobnosti typu $P(X \in M)$, kde $M \subset \mathbb{R}$ (tj. $P(X = a)$, $P(X < a)$, $P(X > a)$, $P(a < X < b)$, ..., kde $a, b \in \mathbb{R}$).

- Jak lze popsat **rozdělení pravděpodobnosti DNV**?

Distribuční funkcí $F(x) = P(X < x)$, resp. pravděpodobnostní funkcí $P(x_i)$.

- Jak lze popsat **rozdělení pravděpodobnosti SNV**?

Distribuční funkcí $F(x) = P(X < x)$, resp. hustotou pravděpodobností $f(x)$.

- Jaké základní **číselné charakteristiky** používáme pro popis NV?

Střední hodnota $E(X)$, rozptyl $D(X)$, směrodatná odchylka $\sigma(X)$, p -kvantily x_p .

Příklady diskrétní náhodné veličiny

■ Technika:

- a) počet šroubů typu D10 mezi 15 vybranými (víme-li, že do dodávky 200 šroubů D10 bylo omylem zařazeno 40 šroubů typu D40),
- b) počet správně přenesených bitů předtím než dojde ke 3. chybě (víme-li, že pravděpodobnost chybného přenosu bitu je 0,145),
- c) počet škrábanců na 1 dm² lakovaného povrchu (víme-li, že průměrně lze očekávat 4 škrábance na 5 m²).

■ Medicína:

- a) počet pacientů (z 20 očkovaných) u nichž byla použita prošlá očkovací látka (víme-li, že v balení bylo 40 dávek očkovací látky, přičemž 6 z nich bylo prošlých),
- b) počet dobrovolníků, které budeme muset testovat dříve než najdeme 6 dárců s krevní skupinou A (předpokládejme, že dobrovolníci neznají svou krevní skupinu, pravděpodobnost výskytu krevní skupiny (populační frekvence) krevní skupiny A je 0,25),
- c) počet červených krvinek v 50 ml krve muže (víme-li, že u průměrně lze pozorovat $4,8 \cdot 10^{12}$ červených krvinek v 1 litru krve).

Obecně: počet úspěchů v n (závislých) pokusech, počet (nezávislých) pokusů do k -tého úspěchu nebo počet události v časovém intervalu, na ploše, v objemu atd.

Vybraná rozdělení diskrétní náhodné veličiny



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

- Alternativní rozdělení,
- Hypergeometrické rozdělení,
- Binomické rozdělení,
- Negativní binomické (Pascalovo) rozdělení,
- Geometrické rozdělení,
- Poissonovo rozdělení.

- Nastane-li sledovaný náhodný jev A (budeme říkat, že došlo k výskytu události, resp. že došlo k úspěchu), bude mít náhodná veličina X hodnotu $x = 1$, nenastane-li jev A , bude mít náhodná veličina X hodnotu $x = 0$.

X ... počet výskytů daného náhodného jevu (úspěchů) v jednom pokusu

$$X \sim A(\pi)$$



pravděpodobnost úspěchu (parametr rozdělení)

Pravděpodobnostní funkce:

$$P(X = 1) = \pi$$

$$P(X = 0) = 1 - \pi$$

Střední hodnota: $E(X) = \pi$

Rozptyl: $D(X) = \pi(1 - \pi)$

Bernoulliho pokusy (posloupnost nezávislých pokusů)



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

- **Posloupnost nezávislých pokusů** majících pouze dva možné výsledky (tj. takových pokusů, kdy úspěch v libovolné skupině pokusů neovlivňuje pravděpodobnost úspěchu v pokusu, který do této skupiny nepatří).
- Přičemž jev A (úspěch) nastává s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $1 - \pi$.

Bernoulliho pokusy (posloupnost nezávislých pokusů)

Příklad 6.1: Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi čtyřmi dětmi v rodině je právě jedna dívka?

X ... počet dívek mezi 4 dětmi

D ... narodí se dívka, $P(D) = \pi$

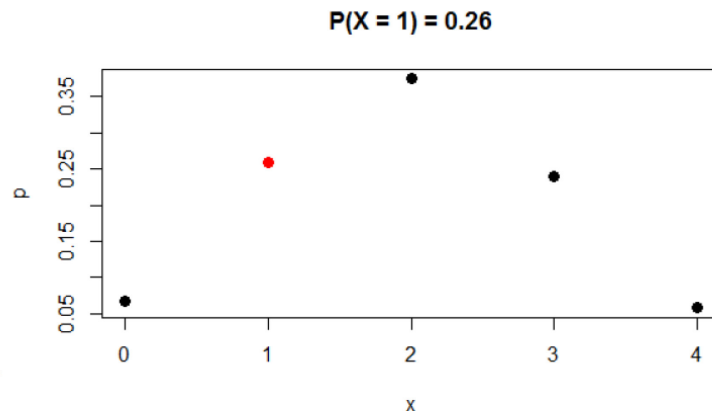
$\bar{D}$... narodí se chlapec, $P(\bar{D}) = 1 - \pi$

$(X = 1) \dots \{D\bar{D}\bar{D}\bar{D}, \bar{D}D\bar{D}\bar{D}, \bar{D}\bar{D}D\bar{D}, \bar{D}\bar{D}\bar{D}D\}$

$P(D\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = P(\bar{D}D\bar{D}\bar{D}) = P(\bar{D}\bar{D}D\bar{D}) = P(\bar{D}\bar{D}\bar{D}D) = \pi \cdot (1 - \pi)^3$

$P(X = 1) = P(D\bar{D}\bar{D}\bar{D} \cup \bar{D}D\bar{D}\bar{D} \cup \bar{D}\bar{D}D\bar{D} \cup \bar{D}\bar{D}\bar{D}D) = \binom{4}{1} \cdot \pi \cdot (1 - \pi)^3$

$P(X = 1) = 0,260$



X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech

$$X \sim \text{Bi}(n; \pi)$$

↑
↑
pravděpodobnost úspěchu
počet pokusů

Počet příznivých realizací posloupnosti Bernoulliho pokusů.

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \overbrace{\binom{n}{k}}^{\text{Počet příznivých realizací}} \cdot \underbrace{\pi^k \cdot (1 - \pi)^{n-k}}_{\text{Pravděpodobnost výskytu jedné příznivé realizace}}$

Pravděpodobnost výskytu jedné příznivé realizace posloupnosti Bernoulliho pokusů.

Střední hodnota: $E(X) = n \cdot \pi$

Rozptyl: $D(X) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$

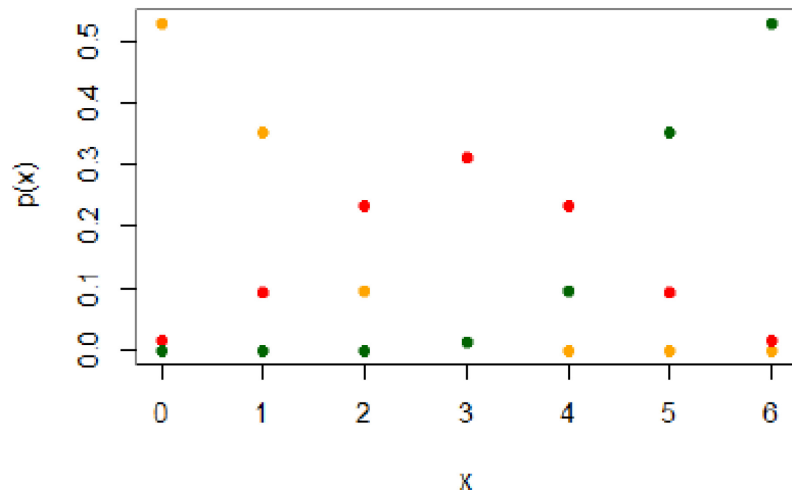
Příklady použití binomického rozdělení: počet dívek mezi 5 000 novorozenci, počet vadných výrobků mezi 150 testovanými, počet nevzrostlých rostlin ze 100 zasazených cibulek...

Binomické rozdělení - vlastnosti



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech



$$X_1 \sim \text{Bi}(n = 6; \pi = 0,1)$$

$$X_2 \sim \text{Bi}(n = 6; \pi = 0,5)$$

$$X_3 \sim \text{Bi}(n = 6; \pi = 0,9)$$

$\pi < 0,5$, malé $n \Rightarrow$ pozitivně zešikmené rozdělení.

$\pi = 0,5 \Rightarrow$ symetrické rozdělení

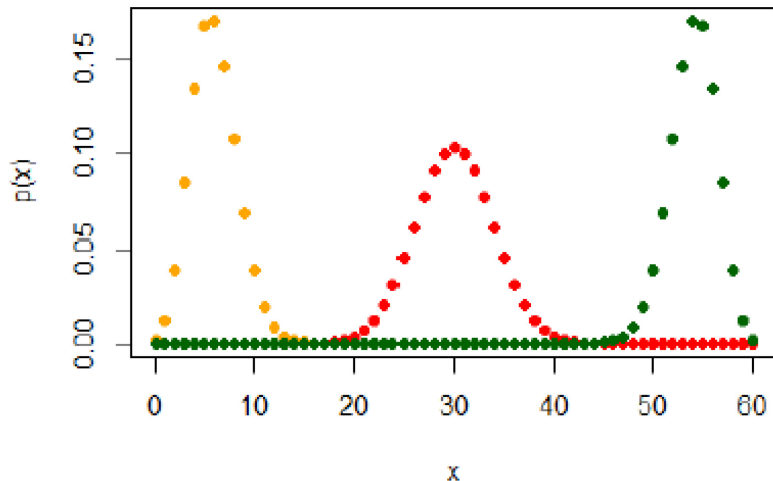
$\pi > 0,5$, malé $n \Rightarrow$ negativně zešikmené rozdělení

Binomické rozdělení - vlastnosti



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech



$$X_1 \sim \text{Bi}(n = 60; \pi = 0,1)$$

$$X_2 \sim \text{Bi}(n = 60; \pi = 0,5)$$

$$X_3 \sim \text{Bi}(n = 60; \pi = 0,9)$$

$\pi < 0,5$, malé $n \Rightarrow$ pozitivně zešikmené rozdělení.

$\pi = 0,5 \Rightarrow$ symetrické rozdělení

$\pi > 0,5$, malé $n \Rightarrow$ negativně zešikmené rozdělení

$\pi \neq 0,5$, s rostoucím n se rozdělení stává více a více symetrickým

Hypergeometrické rozdělení



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

V souboru N prvků je M prvků s danou vlastností a zbylých $(N - M)$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru n prvků, z nichž žádný nevracíme zpět.

X ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků

$$X \sim H(N; M; n)$$

rozsah základního souboru

počet prvků s danou vlastností

rozsah výběru

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Střední hodnota: $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

Rozptyl: $D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Počet příznivých možností, tj.

počet možností jak vybrat k

prvků s danou vlastností z M a

zároveň $(n - k)$ prvků, které

uvedenou vlastnost nemají z

$(N - M)$ prvků.

Počet všech možností, jak vybrat

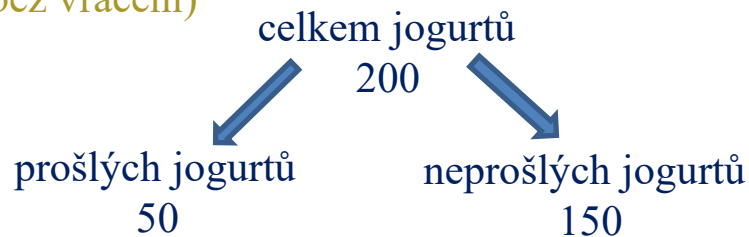
n prvků z N (nezáleží na pořadí).

Příklady: počet vadných výrobků mezi 13 vybranými z dodávky 52 výrobků, mezi nimiž bylo 8 vadných, počet dívek v náhodně vybrané skupině 5 dětí ze třídy, v níž je 8 chlapců a 15 dívek,

Hypergeometrické rozdělení

Příklad 6.2: Mezi 200 jogurty určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 50 jogurtů prošlých. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li si náhodně 20 jogurtů, bude 8 z nich prošlých?

X ... počet prošlých jogurtů z 20 vybraných (výběr bez vracení)



$$P(X = 8) = \frac{\binom{50}{8} \binom{150}{12}}{\binom{200}{20}}$$

počet příznivých možností, vybíráme 8 prošlých z 50 prošlých
a zároveň 12 ze 150 neprošlých

počet všech možností, vybíráme 20 jogurtů z 200

Hypergeometrické rozdělení – možnost aproximace

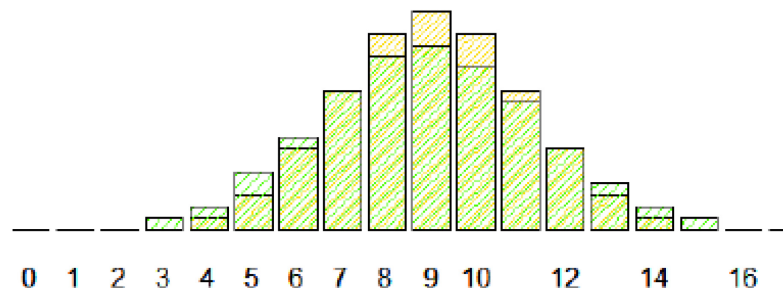


SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

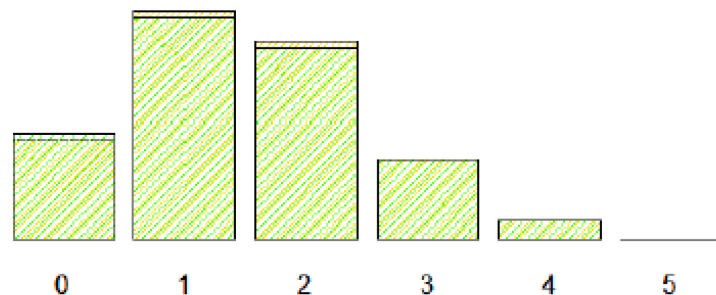
Je-li n/N , tzv. výběrový poměr, menší než 0,05, lze hypergeometrické rozdělení nahradit binomickým s parametry n a M/N .

$$\left(\frac{n}{N} < 0,05\right) \Rightarrow \left[H(N; M; n) \approx \text{Bi}\left(n; \frac{M}{N}\right)\right]$$

□ $H(N = 100, M = 30, n = 30)$ ■ $\text{Bi}(n = 30, \pi = 0.3)$



□ $H(N = 100, M = 30, n = 5)$ ■ $\text{Bi}(n = 5, \pi = 0.3)$



Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

X ... počet Bernoulliho pokusů do k -tého výskytu události (úspěchu), včetně k -tého výskytu

$$X \sim \text{NB}(k; \pi)$$



pravděpodobnost úspěchu



požadovaný počet úspěchů (výskytů události)

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = n) =$

$$\underbrace{\binom{n-1}{k-1} \cdot \pi^{k-1} \cdot (1-\pi)^{(n-1)-(k-1)}}_{\text{pravděpodobnost } k-1 \text{ úspěchů v } n-1 \text{ Bernoulliho pokusech}} \cdot \underbrace{\pi}_{\text{pravděpodobnost } k\text{-tého úspěchu}} = \binom{n-1}{k-1} \cdot \pi^k \cdot (1-\pi)^{(n-k)}$$

pravděpodobnost $k-1$ úspěchů v
 $n-1$ Bernoulliho pokusech

pravděpodobnost
 k -tého úspěchu

Střední hodnota: $E(X) = \frac{k}{\pi}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{k(1-\pi)}{\pi^2}$

Příklady: počet dárců neznajících svou krevní skupinu, které musíte testovat proto, abyste našli 3 dárce s krevní skupinou AB; počet cestujících v autobusu, které musí revizor zkontrolovat do chvíle, než najde 5 černých pasažérů, ...

Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

Příklad 6.3: Pravděpodobnost výskytu krevní skupiny A+ je 35%. V polní nemocnici nutně potřebují najít vojenští lékaři 3 dárce krve s touto krevní skupinou. Potenciálních dárců je dostatek, nikdo z nich však nezná svou krevní skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+, budeme muset postupně vyšetřit více než 7 a méně než 12 potenciálních dárců?

X ... počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+

$$X \sim \text{NB}(k = 3; \pi = 0,35)$$

$$P(7 < X < 12) = \sum_{n=8}^{11} \binom{n-1}{2} \cdot 0,35^3 \cdot 0,65^{n-3} \cong 0,332$$

Geometrické rozdělení je speciálním typem negativně binomického rozdělení pro $k = 1$.

X ... počet Bernoulliho pokusů do prvního výskytu události (úspěchu), včetně.

$$X \sim \text{Ge}(\pi)$$



pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = n) = \pi \cdot (1 - \pi)^{n-1}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{1}{\pi}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{(1 - \pi)}{\pi^2}$

Příklady: počet volání nutných k tomu, abychom se dovolali do rádia a vyhráli cenu,
počet řidičů, kteří podstoupí test na drogy do doby, než bude nalezen první zdrogovaný
řidič, ...

Bodový proces

- Sledujeme chod procesu, v němž čas od času dochází k nějaké význačné události.



- Registrujeme počet události $N(s; t)$ v časovém intervalu $\langle s; s + t \rangle$

Jako Poissonův proces označujeme proces, který má následující vlastnosti:

- **ordinární** – tj. pravděpodobnost výskytu více než jedné události v limitně krátkém časovém intervalu $t \rightarrow 0$ je nulová. (tzv. řídké jevy),
- **stacionární** – tj. rychlost výskytu událostí λ je konstantní v průběhu celého sledovaného intervalu,
- **beznásledný** – tj. pravděpodobnost výskytu události není závislá na čase, který uplynul od minulé události.

Rychlost výskytu události λ je parametrem Poissonova procesu.

Poissonův proces lze obdobně jako v časovém intervalu definovat na libovolné uzavřené prostorové oblasti (na ploše, v objemu).

Poissonovo rozdělení

Definujme si náhodný pokus jako Poissonův proces (nezávislé události probíhající v čase t , s rychlostí výskytu λ ; popř. nezávislé události objevující se na ploše t , resp. v objemu t s hustotou výskytu λ).

X ... počet výskytu události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)

$$X \sim \text{Po}(\lambda t)$$

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

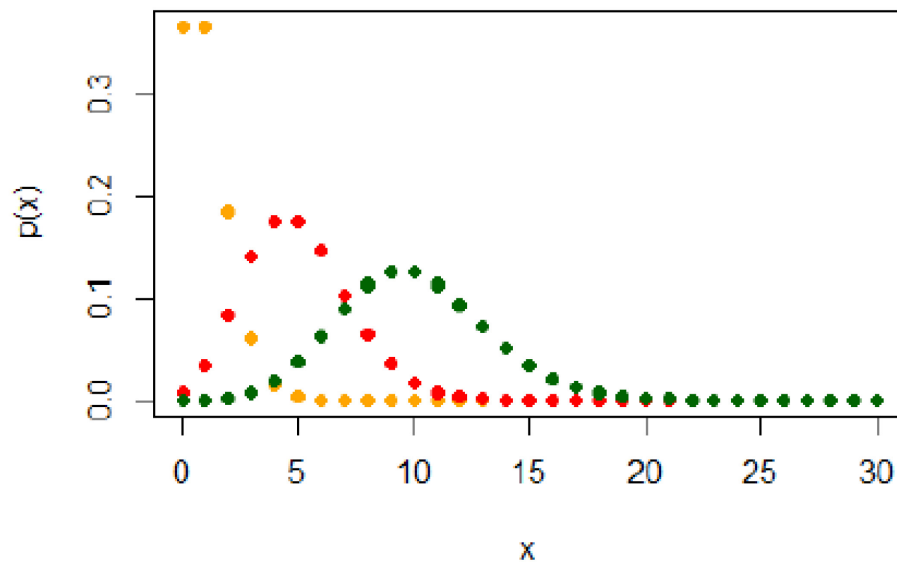
Střední hodnota, rozptyl: $E(X) = D(X) = \lambda t$

Příklady: počet pacientů ošetřených během odpoledních ordinačních hodin v ambulanci ORL, počet defektů na zadaném vzorku materiálu, počet živých mikroorganismů v 1 l vody, ...

Poissonovo rozdělení



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ



$$X_1 \sim \text{Po}(\lambda t = 1)$$

$$X_2 \sim \text{Po}(\lambda t = 5)$$

$$X_3 \sim \text{Po}(\lambda t = 10)$$

Aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Věta 6.1: Nechť je $X_n \sim \text{Bi}(n, \pi_n)$, nechť $\pi_n \in (0,1)$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} n\pi_n = \lambda t \in (0, \infty)$, nechť $X \sim \text{Po}(\lambda t)$. Potom platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(X = k) \text{ pro } k = 0, 1, \dots$$

Důkaz: viz Zvára a Štěpán (2019), str. 66.

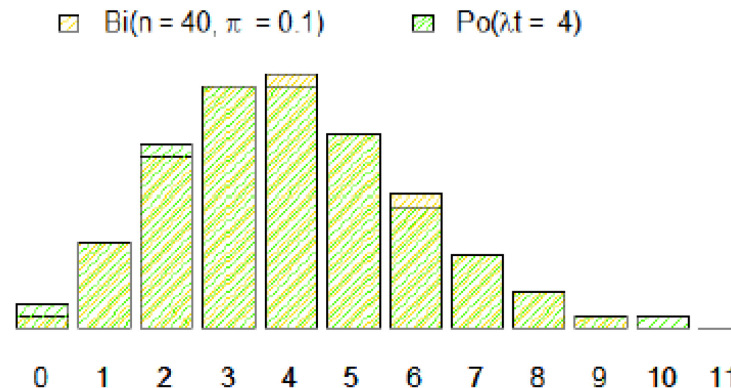
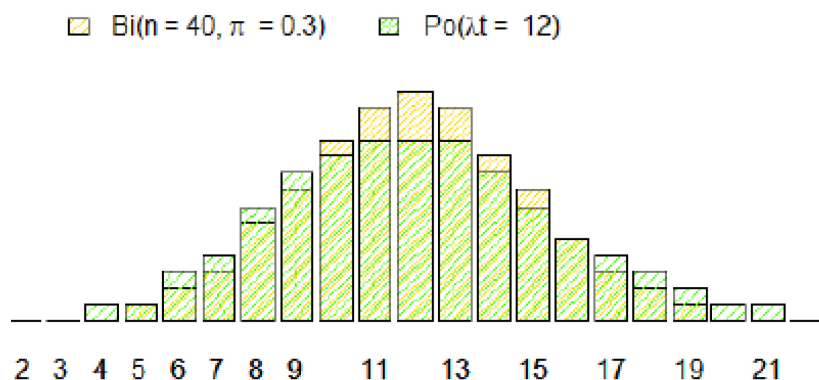
Aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Poissonovým rozdělením lze velmi dobře aproximovat binomické rozdělení pro případ, že počet pokusů n je dostatečně velký $n > 30$ a pravděpodobnost výskytu události (úspěchu) je dostatečně malá $\pi < 0,1$. V takovém případě je $\lambda t = n\pi$.

$$(n > 30 \wedge \pi < 0,1) \Rightarrow \text{Bi}(n, \pi) \approx \text{Po}(n\pi)$$



Vybraná rozdělení diskrétní náhodné veličiny - shrnutí



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
MATEMATICKÝ ÚSTAV
V OPAVĚ

Popis	Podmínky		Název náhodné veličiny - symbolický zápis
počet úspěchů v n pokusech	nezávislé pokusy	$k = 1$	Alternativní - $A(\pi)$
			Binomická - $Bi(n, \pi)$
	závislé pokusy		Hypergeometrická - $H(N, M, n)$
počet pokusů do k . úspěchu (včetně)	nezávislé pokusy	$k = 1$	Geometrická - $Ge(\pi)$
			Negativně binomická (Pascalova) - $NB(k, \pi)$
počet události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)	ordinarita, stacionarita, beznáslednost procesu		Poissonova - $Po(\lambda t)$

1. K. Zvára, J. Štěpán. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Praha: MatfyzPress, 2019. ISBN 978-80-7378-388-4. **(kapitola 4)**.
2. Z. Riečanová a kol. *Numerické metody a matematická statistika*. Bratislava: Alfa, 1987. ISBN 063-559-87. **(kapitola 4)**.



Děkuji za pozornost.