

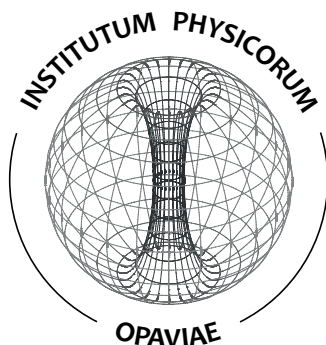
**Fiktivní práce jako uživatelský manuál
L^AT_EXového balíčku „ipotes“**

**A fictitious Thesis as a user manual for
the “ipotes” L^AT_EX package**

Stanislav Hledík

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE





Fiktivní práce jako uživatelský manuál $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ového balíčku „iphothes“

**A fictitious Thesis as a user manual for
the “iphothes” $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ package**

Stanislav Hledík

Vedoucí: doc. RNDr. Petr Slaný, Ph.D.

Konzultant: Hana Černínová

Program: B0533A110018 Fyzika

Specializace: Astronomie a popularizace

Abstrakt

Tento manuál seznamuje s použitím balíčku „ipthes“ rozšiřujícího publikační systém L^AT_EX o dokumentní třídu a B_IB_TE_Xový bibliografický styl optimalizované k sazbě bakalářských, diplomových, rigorózních nebo dizertačních prací, případně jiných typů závěrečných prací (ročníkových, semestrálních, seminárních) na Fyzikálním ústavu v Opavě. Manuál sám je vysázen pomocí popisovaného balíčku ve formě fiktivní bakalářské práce.

Abstract

This manual introduces the use of the “ipthes” package extending the L^AT_EX publishing system by document class and B_IB_TE_X bibliographic style optimized for typesetting of Bachelor, Master, Rigorous and Doctoral Theses, possibly other kinds of Final Theses (year, semester, seminar) at The Institute of Physics in Opava. The manual itself is typeset using the tools of the package described by this manual in the form of a fictitious Bachelor Project.

Klíčová slova

Sazba / publikační systém L^AT_EX / dokumentní třída / B_IB_TE_X / bibliografický styl / PDF / hypertext / bakalářská práce / diplomová práce / rigorózní práce / dizertační práce

Key words

Typesetting / L^AT_EX publishing system / document class / B_IB_TE_X / bibliographic style / PDF / hypertext / Bachelor Thesis / Master Thesis / Rigorous Thesis / Dissertation

Mock Assignment Page 1
To be replaced by an actual Assignment: see Chapter 3 for how

Mock Assignment Page 2
To be replaced by an actual Assignment: see Chapter 3 for how

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto závěrečnou práci vypracoval samostatně jen s použitím uvedené literatury uvedené v bibliografii a na základě konzultací s vedoucím práce. Uvedl jsem všechny prameny, z nichž jsem při psaní práce čerpal.

Autor souhlasí se zveřejněním této závěrečné práce ve smyslu § 47b Zákona č. 111/1998 Sb. (O vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů) v platném znění.

V Opavě dne 22. dubna 2022

Stanislav Hledík

Poděkování

Děkuji všem, kdo při vývoji balíčku „ipthes“ přispěli testováním, podněty, připomínkami nebo nálezy chyb.

Věnování

*Balíček „ipothés“ a tento manuál věnuji všem studentům, kteří za mnou
po dlouhá léta docházeli se žádostmi o radu a pomoc při sazbě svých
závěrečných prací.*

Obsah

Seznam obrázků	xvii
Seznam tabulek	xix
Úvod	1
Cíl	1
Prerekvizity	2
Struktura	2
Další vývoj	3
 Část I. Postupy a řešení	
Kapitola 1. Instalace	7
1.1. Získání balíčku ipthes	7
1.2. Instalace „vše v jednom“	7
1.3. Instalace „zdrojové texty a knihovny odděleně“	8
1.4. Testování	11
1.5. Copyright	12
Kapitola 2. Preambule	13
2.1. Specifikace dokumentní třídy	13
2.2. Fonty a jazyková lokalizace	14
2.3. Podpora tvorby rejstříku	15
2.4. Další balíčky	15
2.5. Nastavení, definice a redefinice	16
2.6. Vzory dělení slov	16
2.7. Konec preambule	16
Kapitola 3. Některá drobná vylepšení	17
 Část II. Ukázky z obhájených závěrečných prací	
Kapitola 4. Rotací stabilizovaná magnetická levitace	21
4.1. Earnshawův teorém	24
4.2. Jak dosáhnout prostorově stabilní levitace?	28
4.3. Levitron® a teorie jeho stability	30

Kapitola 5. Diagnostika s obrazovým výstupem	41
5.1. Ultrazvuková sonografie	41
5.1.1. Základní pojmy ultrazvukové akustiky	43
5.1.2. Ultrazvuková sonda	49
5.2. Nukleární magnetická rezonance (NMR/MRI)	53
5.2.1. Stručný nástin principu MRI	53
5.2.2. Fyzika jaderného spinu	55
5.2.3. Podstata MRI zobrazování	61
Kapitola 6. Kamerový zobrazovací model	67
6.1. Transformace obrazů kamer	67
6.2. Perspektivní, afinní a podobnostní transformace	72
Chapter 7. Configurations of uniform density	77
7.1. Structure of the polytropes	77
7.2. Existence conditions and compactness of $n = 0$ polytropes	80
7.3. Gravitational binding of $n = 0$ polytropes	82
 Část III. Dodatky	
Dodatek A. Volby dokumentní třídy	87
Dodatek B. Načítané balíčky	89
B.1. Závislosti	90
Dodatek C. Umístění sazebního obrazce	91
Dodatek D. Konfigurační soubor	93
Dodatek E. Konfigurace balíčku hyperref	95
Pár doporučení na závěr	99
Literatura	101

Seznam obrázků

1.1	Přidání adresáře do cest MiKTeXu	9
1.2	Přidání adresáře do cest T _E X Live	9
1.3	Aktualizace databáze cest MiKTeXu	10
1.4	Aktualizace databáze cest T _E X Live	10
1.5	Nastavení testovací kompilace v IDE TeXworks	12
1.6	Testovací kompilace v bash	12
4.1	Schéma Levitronu	23
4.2	Realizace Levitronu	23
4.3	Samuel Earnshaw	23
4.4	Schéma modelu Levitronu	31
4.5	Rovnovážné body Levitronu	33
4.6	Ilustrace nestabilního režimu Levitronu	36
4.7	Ilustrace stabilního režimu Levitronu	38
5.1	K echolokačnímu principu ultrazvukové sonografie	42
5.2	Ilustrace podélného vlnění	44
5.3	Frekvenční závislost absorpce ultrazvuku v tkáni	47
5.4	Odraz ultrazvukového vlnění	48
5.5	Základní konstrukce ultrazvukové sondy	50
5.6	Geometrie ultrazvukových pulsů	50
5.7	Faktor kvality a potlačení postranních laloků	52
5.8	Ilustrace Fresnelovy a Fraunhoferovy zóny	52
5.9	Vliv fokusace sondy na tvar ultrazvukového pole	52
5.10	Lokalizace MRI řezu pomocí gradientního pole	54
5.11	Ilustrace obsahu vodíkových jader v tkáni	55
5.12	Chování jaderných spinů ve vnějším magnetickém poli	56
5.13	Ilustrace ke spinové relaxaci	56
5.14	Ilustrace signálu FID	60
5.15	Sekvence RF pulsů „spin-echo“ a „inversion-recovery“	61
5.16	Frekvenční kódování NMR signálu	62
5.17	Rekonstrukce obrazu pomocí techniky zpětné projekce	64
5.18	MRI axiální zobrazení lidského mozku s patologií	65
7.1	Dependence of binding factor on σ for uniform density	83
E.1	Vlastnosti dokumentu zobrazené Adobe Acrobat Readerem	97

E.2	Zobrazení „otevřené knihy“ Adobe Acrobat Readerem	97
-----	---	----

Seznam tabulek

5.1	Rychlosti zvuku, hustoty, akustické impedance a absorpce	44
5.2	Tabulka často užívaných hodnot decibelů	46
5.3	Parametry izotopů pro medicínské zobrazování	56
5.4	Relaxační doby pro různé tkáně	60

Úvod

Když už nefunguje vůbec nic, přečti si konečně návod k použití.

— *Murphy (Allenův nebo Cannův axiom)*

Publikační systém L^AT_EX [1–3] je de facto standardem pro sazbu prací obsahujících množství matematiky. Do této kategorie dokumentů spadají také bakalářské, diplomové, rigorózní a dizertační práce (jež jsou v dalším souhrnně nazývány *závěrečnými pracemi*) v matematických, fyzikálních a informatických oborech.

Cíl

Po ustavení Fyzikálního ústavu v Opavě v r. 2020 vyvstala v návaznosti na nové studijní předpisy a množící se dotazy studentů na formální uspořádání závěrečné práce potřeba poskytnout vhodné L^AT_EXové řešení. Po rešerši balíčků dostupných z CTAN [4] a z Overleaf [5] se autor rozhodl nové řešení založit na předchozích balíčcích pro Ústav fyziky FPF SU v Opavě **physuth** (z let 2007–2009) a **fpfslut** (2015), avšak pod změněným názvem **ipthes** (akronym Institute of Physics in Opava THESIS).

Klíčovými požadavky při vývoji balíčku **ipthes** byla

1. snadnost instalace a základního použití pro ty, kdo nemají zkušenosti s publikačním systémem L^AT_EX;
2. snadné generování obsahově a graficky jednotných titulních stránek¹ („front matter“);
3. podpora jazyků schválených pro psaní závěrečných prací na Fyzikálním ústavu;
4. podpora tvorby bibliografie ve formě bibliografického stylu pro pomocný program B_IB_TE_X [6];

¹ Sestávajících z patitulu, titulní stránky, abstraktu, klíčových slov, zadání práce, prohlášení, obsahu, volitelně protititulu (frontispice), poděkování, dedikace, seznamu obrázků a seznamu tabulek.

5. podpora tvorby rejstříku pomocí pomocného programu *MakeIndex* [7, 8];
6. konfigurovatelnost podle potřeb pokročilejšího uživatele;
7. dostatečná a srozumitelná dokumentace.

Prerekvizity

Předpokládá se, že čtenář je obeznámen se základy publikačního systému L^AT_EX zhruba v rozsahu volitelného předmětu bakalářského studijního programu Fyzika FU:FYBPV0006 L^AT_EX² nebo příručky [9], proto se zabývá jen specifiky L^AT_EXového balíčku *ipthes* a nesubstituuje běžné manuály [1, 2, 9–13] nebo online dokumentaci a příručky [14, 15]. Pro podrobnější poučení o problematice sazby závěrečných prací lze doporučit [16, 17] a odkazy v nich uvedené.

Struktura

Tento dokument má formu fiktivní bakalářské práce sloužící jako uživatelský manuál a je rozdělen do tří částí. V Části I jsou soustředěny popisy konkrétních činností, postupů a řešení (zhruba v pořadí, v němž se s nimi uživatel setkává), dále tipy a triky uplatnitelné při psaní závěrečných prací pomocí *ipthes*.

Část II sestává z poněkud nesourodých ukázek vybraných a mírně upravených a/nebo zkrácených kapitol a partií ze skutečných již obhájených závěrečných prací (s laskavým svolením jejich autorů) s vesměs zaslepenými obrázky (to hlavně kvůli redukci velikosti obrázkových souborů). Konkrétně se jedná o ukázky z bakalářských prací [18, 19] na stránkách 21 a 41, o ukázku z diplomové práce [20] na stránce 67 a o kapitolu z vlastní dizertační práce autora balíčku *ipthes* [21] na stránce 77.³ Do této části je – bez nároku na úplnost – zahrnuta většina typických situací, se kterými se lze při sazbě závěrečných prací setkat. Čtenářův předpokládaný modus operandi pak spočívá ve vybrání požadovaného typografického efektu ve vysazené formě práce a následného vyhledání odpovídajícího místa v hlavním zdrojovém textu `vzorova_prace.tex` nebo v inkludovaných zdrojových textech

² Viz <https://is.slu.cz/predmet/fu/FYBPV0006>.

³ Zatímco první tři ukázky jsou psány česky, ukázka z dizertační práce zůstává v angličtině – pro účel, jemuž mají ukázky sloužit, je jejich jazyk irelevantní.

`include/*.tex` a dalších pomocných textových souborech jako jsou bibliografická databáze `references.bib` či konfigurační soubory `ipthes.cfg` a `hyperref.cfg`, kde kromě vlastního řešení tu a tam nalezne další informace o žádaném efektu formou komentářů.⁴ Ostatně lze vyjít přímo ze zdrojových textů této fiktivní bakalářské práce a vlastní práci začít psát jejich přepisováním textem novým. Tento způsob „učení se podle příkladu“ jistě nepokryje všechny požadavky, ale spolu s uvedenou literaturou může poskytnout vodítka a programovací vzory pro vlastní kreativní tvorbu.

Technické detaily (konfigurace, volby dokumentní třídy `ipthes.cls`, načítané balíčky, pokročilé způsoby kompilace pomocí `make` a jiné) jsou popsány v dodatkové Části III.

Další vývoj

Knihovny balíčku `ipthes` a hlavně tento manuál budou v budoucnu podléhat dalšímu vývoji. Ve svém současném stavu je manuál zatím minimalistický a bude doplňován o další plánované i neplánované kapitoly (konstrukce preambule, sazba matematiky, tvorba titulních stránek, vkládání externí grafiky, citace a reference, jazyková lokalizace) a dodatky (pokročilejší konfigurace, manipulace se sazebním obrazcem, hypertext, management kompilace pomocí `make`). Sledujte proto domovskou stránku odkázanou v Kapitole 1, na níž bude každá nová verze anoncována.

Protože ani balíček `ipthes` – stejně jako každý jiný software – není prost chyb, chtěl bych požádat uživatele, aby mě pomocí kontaktů uvedených na <https://is.slu.cz/www/hle0002/> laskavě informovali o chybách, nedostacích a problémech, na které při jeho používání narazí, za což předem děkuji.

⁴ Hledáte-li např. inspiraci pro aranžmá obrázků nebo tabulek jakožto plovoucích objektů a jejich umísťování, lze doporučit ukázkou z bakalářské práce [19].

Část I

Postupy a řešení

Kapitola 1

Instalace

1.1. Získání balíčku ipthes

Domovská stránka balíčku ipthes je <https://is.slu.cz/www/hle0002/vyuka/aid/>, sekce T_EX. Můžete se rozhodnout pro jeden z následujících způsobů instalace: „vše v jednom“ nebo „zdrojové texty a knihovny odděleně“. Ke stažení pro vás vhodné varianty využijte odkazů v textu níže. Kontrolní součty jsou v souboru [CHECKSUMS.md5](#).

1.2. Instalace „vše v jednom“

Stáhněte si archiv [vzorova_prace.ipthes.zip](#) obsahující ve společném adresáři `manual` po rozbalení kromě nezbytných L^AT_EXových knihoven¹ také zdrojové soubory nutné pro kompilaci tohoto hypertextového českého manuálu [vzorova_prace.pdf](#).² Tuto možnost nejspíše zvolí uživatelé, kteří zamýšlejí využít ipthes pouze pro jednorázové napsání závěrečné práce a nechťejí si jím „kontaminovat“ svůj T_EX systém. Je rovněž určena pro uživatele cloudového systému Overleaf [5].³

¹ Dokumentní třída, bibliografický styl, lokalizační soubory a systémové obrázky s fiktivním zadáním a aktuálně se znaky Fyzikálního ústavu v Opavě, Filozoficko-přírodovědecké fakulty v Opavě a Matematického ústavu v Opavě.

² Není součástí výše uvedeného archivu, jenž neobsahuje výstupy ani intermediální soubory `*.aux`, `*.log`, `*.toc`, `*.lof`, `*.lot`, `*.out`, `*.bbl`, `*.blg`, `*.idx`, `*.ind`, `*.ilg`.

³ Výhodou je také, že po dokončení práce a archivování se uchovají pohromadě zdrojové texty i L^AT_EXové knihovny (jež budou pravděpodobně vyvíjeny bez záruky zpětné kompatibility), takže kompatibilita je víceméně zachována. Nevýhodou je vyšší míra chaosu ve vašem pracovním adresáři.

Váš $\text{\TeX}$ systém není třeba v tomto případě nijak konfigurovat, všechny soubory budou nalezeny. V pracovním adresáři `manual` (klidně si jej přejmenujte) si vytvořte nový vlastní hlavní $\text{\LaTeX}$ ový soubor a případně i inkludované soubory `include/*.tex` podle ukázkového hlavního $\text{\LaTeX}$ ového souboru `vzorova_prace.tex`⁴ nebo pokračujte formou přejmenovávání a editace obsahu zdrojů tohoto manuálu.

1.3. Instalace „zdrojové texty a knihovny odděleně“

Stáhněte si archivy

1. `ipthes.tds.zip` obsahující pouze knihovní soubory⁵ uložené v kanonické adresářové struktuře požadované systémem $\text{\TeX}$ [22], a to v adresářích `bibtex`, `doc` a `tex` a struktuře pod nimi;
2. `vzorova_prace.zip` obsahující v adresáři `manual` pouze zdrojové soubory nutné ke kompilaci tohoto českého manuálu `vzorova_prace.pdf`.⁶

Tato možnost je vhodná pro ty uživatele, kteří si chtějí integrovat balíček `ipthes` do svého $\text{\TeX}$ systému, takže jej budou moci využívat pro více projektů.

Integraci provedete rozbalením prvního archivu včetně celých adresářových stromů do libovolného adresáře,⁷ který následně pomocí konzole vašeho $\text{\TeX}$ systému přidáte do databáze prohledávaných cest. Kupříkladu v konzoli distribuce `MiKTeX` [23] použijete postup znázorněný na obrázku 1.1, v instalátoru distribuce `\TeX Live` [24] použijete postup znázorněný na obrázku 1.2, přičemž obsah archivu byl v obou případech rozbalen to prázdného adresáře `texmf`. Po přidání cesty je třeba aktualizovat databázi prohledávaných cest; příklad tohoto kroku v `MiKTeXu` je na obrázku 1.3, v `\TeX Live` na obrázku 1.4.

Alternativní možností je rozbalení prvního archivu včetně celých adresářových stromů do některého ze systémových adresářů vaší instalace $\text{\TeX}$ u.⁸

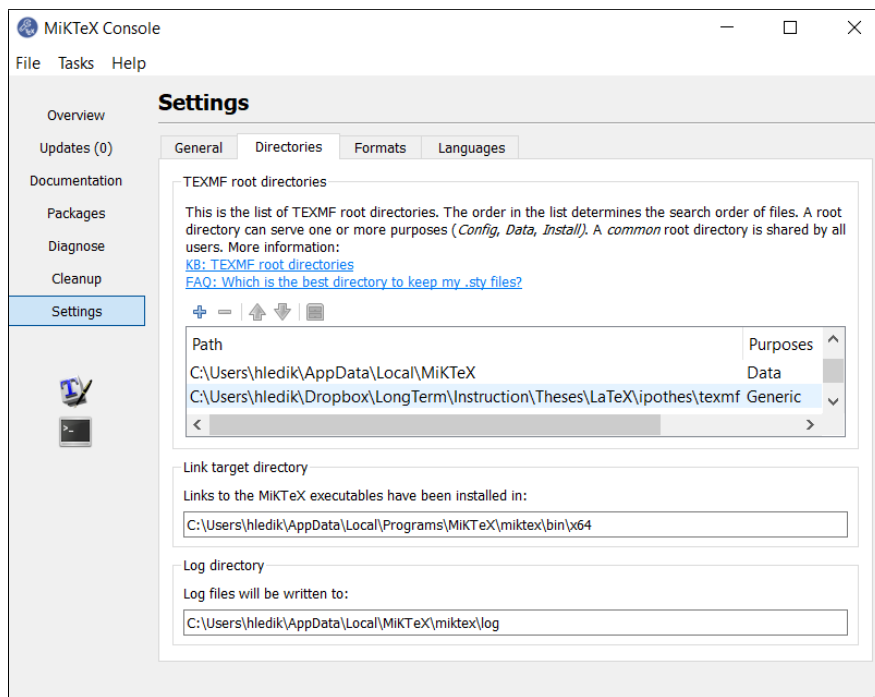
⁴ Velmi doporučujeme, aby v názvech vašich zdrojových souborů ani v cestách k nim nebyly znaky s diakritikou a mezery. Ušetříte si tím možná nepříjemná překvapení.

⁵ Dokumentní třída, bibliografický styl, dokumentační soubory, lokalizační soubory a systémové obrázky s fiktivním zadáním a aktuálně se znaky Fyzikálního ústavu v Opavě, Filozoficko-přírodovědecké fakulty v Opavě a Matematického ústavu v Opavě.

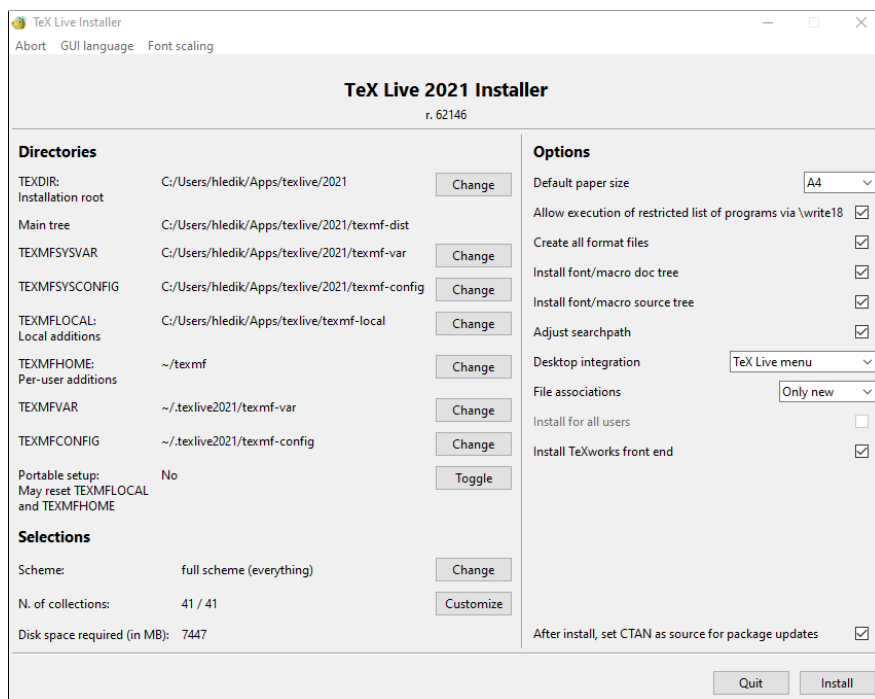
⁶ Není součástí výše uvedeného archivu, jenž neobsahuje výstupy ani intermedialní soubory `*.aux`, `*.log`, `*.toc`, `*.lof`, `*.lot`, `*.out`, `*.bbl`, `*.blg`, `*.idx`, `*.ind`, `*.ilg`.

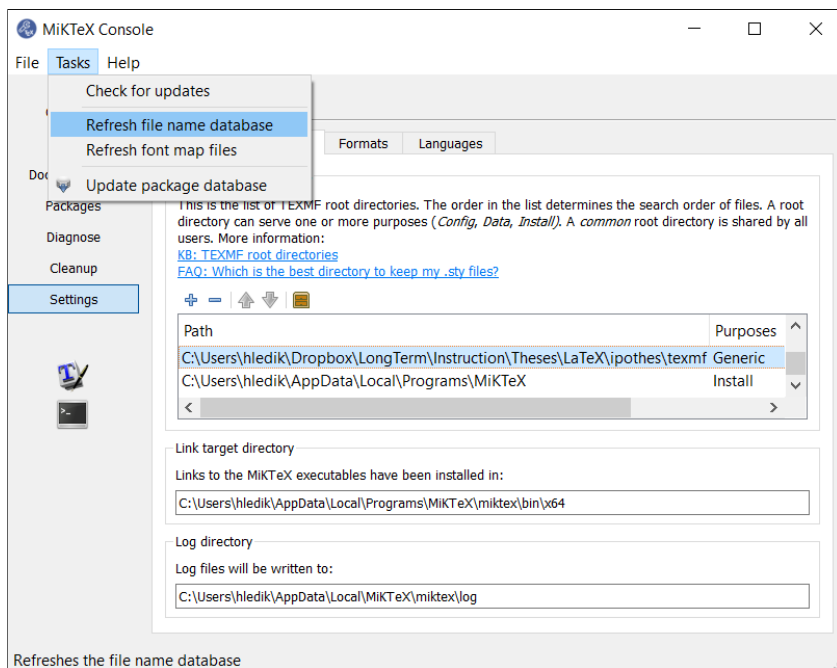
⁷ Název a cesta opět bez znaků s diakritikou a mezer.

⁸ V `MiKTeXu` např. do `c:\Users\username\AppData\Roaming\MiKTeX`.

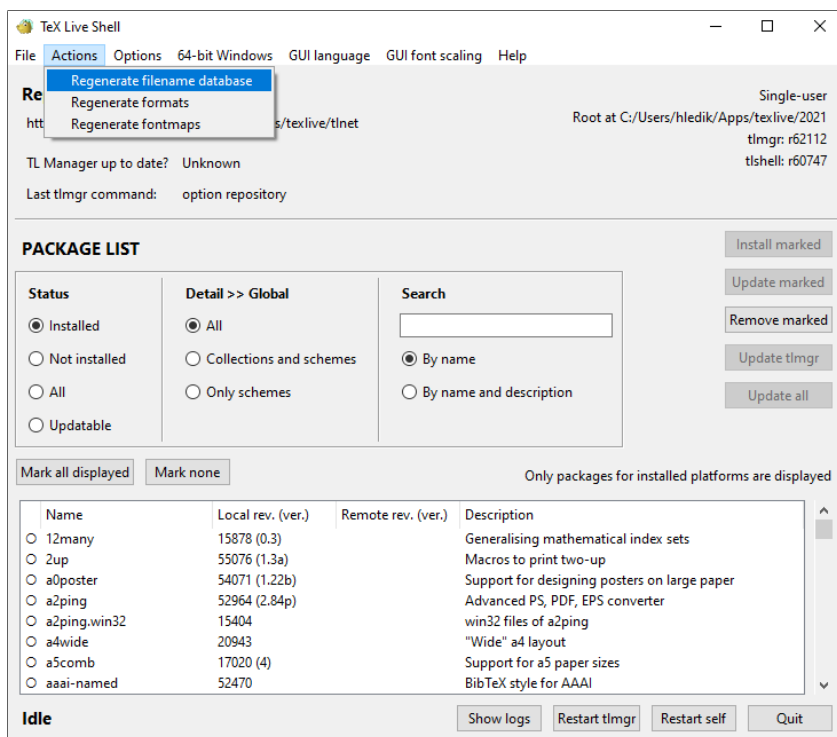


Obrázek 1.1. Přidání adresáře do cest distribuce MiKTeX.

Obrázek 1.2. Přidání adresáře do cest distribuce T_EX Live (TEXMFHOME).



Obrázek 1.3. Aktualizace databáze cest distribuce MiKTeX.



Obrázek 1.4. Aktualizace databáze cest distribuce TeX Live.

Takový adresář není třeba přidávat do databáze prohledávaných cest (již v ní je), opět je však třeba aktualizovat databázi prohledávaných cest podle obrázku 1.3 nebo 1.4.

S obsahem druhého archivu, `vzorova_prace.zip`, pak naložíte způsobem analogickým jako v Sekci 1.2. Nebude již obsahovat nepřehledné množství systémových souborů, funkčnost však bude identická.

1.4. Testování

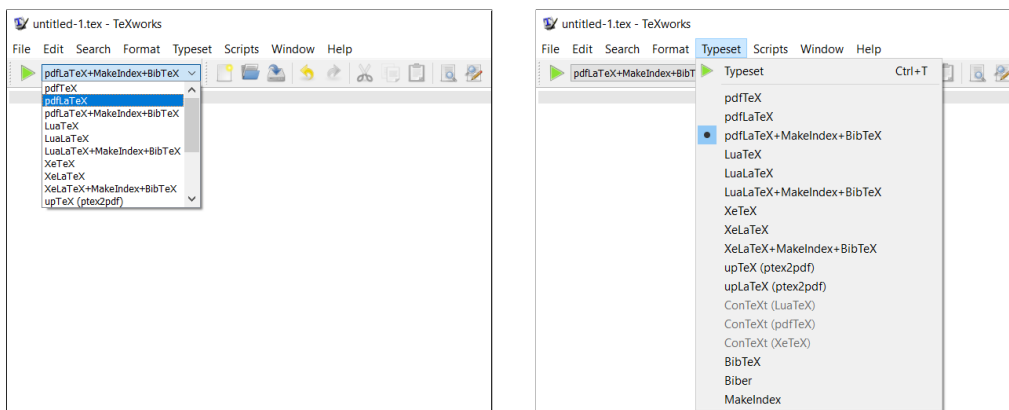
Po instalaci libovolným z obou výše popsaných způsobů doporučujeme otestovat funkčnost balíčku `ipthes` v $\text{\TeX}$ systému na vašem počítači následovně. Aniž byste na zdrojových textech či názvech adresářů cokoli měnili, přemístěte se do adresáře s fiktivní závěrečnou prací `manual` a proveďte kompilaci pomocí formátu `pdfLATEX`, poté zformátujte bibliografii pomocí `BibTEXu`, a nakonec kompilujte `pdfLATEXem` tolikrát, dokud z logu nezmizí hlášky typu⁹

```
Package natbib Warning: There were undefined citations.
Package natbib Warning: Citation(s) may have changed.
(natbib)                Rerun to get citations correct.
LaTeX Warning: There were undefined references.
LaTeX Warning: Label(s) may have changed.
                Rerun to get cross-references right.
```

Mějte na paměti, že některá IDE jako např. `TeXworks` distribuovaný jako součást `MiKTeXu` mají implicitně nastavenou kompilaci `pdfLATEX + MakeIndex + BibTEX`; toto je třeba změnit na kompilaci pouze `pdfLATEXem` a `BibTEXem` podle obrázku 1.5: nechceme aktualizovat soubor s vytvořeným rejstříkem `vzorova_prace.ind` a spouštění pomocného programu `MakeIndex` je zbytečné. Uživatelé linuxového shellu [25] mohou kompilovat pomocí příkazového řádku jako na obrázku 1.6.

Kompilace by měla proběhnout bez chyb, pochopitelně po *on the fly* doinstalaci chybějících požadovaných balíčků při první kompilaci, jak to dělá např. distribuce `MiKTeX` [23] (což může trvat nějaký čas). Jejím výsledkem

⁹ Jsou-li příkazy `\cite` přítomny přímo v bibliografických položkách v `*.bib` souborech, což je případ tohoto manuálu, je zapotřebí dokonce dvojí zpracování `BibTEXem`: nejprve `pdfLATEX`, poté `BibTEX`, `pdfLATEX`, opět `BibTEX`, a `pdfLATEX` tolikrát, dokud nezmizí uvedené hlášky.



Obrázek 1.5. Nastavení testovací kompilace v integrovaném vývojovém prostředí TeXworks z distribuce MiKTeX.

```
$ c=pdflatex; i=vzorova_prace; $c $i; bibtex $i; $c $i; $c $i
```

Obrázek 1.6. Testovací kompilace v shellu `bash`. Počet běhů `pdfLATEX`u (`$c $i`) po sestavení bibliografie může být v případě potřeby zvýšen.

by měl být hypertextový PDF soubor `vzorova_prace.pdf` obsahově shodný s tímto manuálem ve formě fiktivní závěrečné práce.¹⁰

Proběhla-li kompilace bez chyb, lze bez obav začít používat balíček `ipthes` pro přípravu vlastní práce.

Pokud nic z výše uvedeného nefunguje, kontaktujte lokálního T_EXového wizarďa nebo se obraťte o radu na <https://tex.stackexchange.com/> resp. <https://stackoverflow.com/questions/tagged/latex>.

1.5. Copyright

Balíček `ipthes` je freeware. Omezení: kýmkoli (kromě autora) provedená jakákoli úprava nesmí být distribuována pod stejným jménem, včetně jmen adresářů, souborů s dokumentní třídou, bibliografickým stylem, a všech výskytů řetězce "`ipthes`" v nich a ve zdrojových, konfiguračních a ostatních textových souborech knihovny a manuálu.

¹⁰ Velikost se může lišit podle nastavené komprese PDF.

Kapitola 2

Preamble

Úvodní část L^AT_EXového hlavního zdrojového souboru nacházející se mezi specifikací dokumentní třídy v `\documentclass[⟨volby⟩]{ipthes}` a začátkem prostředí `\begin{document}` se nazývá *preamble* [9]. Umísťují se do ní příkazy pro načítání balíčků pomocí příkazu `\usepackage` a uživatelská nastavení, definice či redefinice. Po `\begin{document}` následuje *tělo dokumentu*, kam se zapisuje zejména vlastní text s potřebným kontextovým značkováním.

U dokumentní třídy `ipthes.cls` je doporučeno umísťovat do preamble pouze načítání balíčků, avšak uživatelská nastavení, definice a redefinice raději přesunout do konfiguračního souboru `ipthes.cfg` popsaného v Dodatku D. Primárním důvodem tohoto doporučení je, že konfigurační soubor `ipthes.cfg` je načítán v argumentu makra `\AtEndPreamble` [26] až po balíček `hyperref`, jenž sám redefinuje některé příkazy (viz Dodatek B). Sekundární důvod je víceméně estetický – sleduje oddělení souboru s konfigurací a souboru s textem. Jinak ale lze vaše definice a redefinice v preamble uvést, pokud si je otestujete.

Celý hlavní zdrojový soubor `vzorova_prace.tex` tohoto manuálu jakožto česky psané fiktivní závěrečné práce je včetně preamble bohatě komentován. Doporučujeme čtenáři tyto komentáře projít; ostatně vezme-li soubor `vzorova_prace.tex` jako základ pro psaní vlastní práce, je četba komentářů zcela dostačující. Níže uvedené fragmenty preamble jsou načteny přímo z `vzorova_prace.tex` pomocí balíčku `fancyvrb` [27].

2.1. Specifikace dokumentní třídy

Preamble samotné předchází zavedení dokumentní třídy `ipthes.cls` a nastavení jejich voleb, jež jsou popsány v Dodatku A. Právě jedna z voleb `draft` nebo `final` musí zůstat odkomentovaná (nenechávajíte je obě zakomentované nebo odkomentované); ostatní voleb lze použít podle vašich

vlastních požadavků (implicitní chování při zakomentování volbě je uvedeno v závorce komentáře):

```
\documentclass[%
%draft%          zobrazí přeplněné \hbox, \note, klamné obrázky atd.
final%          kompiluj finální verzi
%,narrowmargin%  velká šířka a výška textu v celé práci (střední)
,htext%          externí i interní odkazy jsou hypertextové (nejsou)
%,indentfirst%   1. odst. po nadpisu má odstavcovou zarážku (nemá)
%,fllastline%    poslední řádek popisek ap. necentrovat (centrovat)
%,headfootsans%  bezpatkový font v záhlaví a zápatí (patkový)
]{ipthes}
```

2.2. Fonty a jazyková lokalizace

Nyní začíná vlastní preamble. Pro zajištění vyšší flexibility nejsou příslušné balíčky načítány v dokumentní třídě (viz Dodatek B), ale až zde v preambuli.

Balíčky načtené v následujícím kódu způsobí globální použití nadrodiny fontů Latin Modern (lm [28]) místo nadrodiny fontů Computer Modern (cm). Je nutné uvést kódování fontu volbou T1 balíčku fontenc [29] a kódování zdrojových textů volbou utf8 balíčku inputenc [30], jež je dnes standardem na všech dnešních hlavních operačních systémech:¹

```
\usepackage{lmodern}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
```

Následuje blok jazykové lokalizace. Závěrečná práce v češtině *musí* mít nastavenou češtinu jako hlavní jazyk volbou **czech** uvedenou na *posledním místě* v seznamu volitelných argumentů balíčku **babel**. Jako další jazyk *musí* být volbou **english** zavedena angličtina. Kromě těchto dvou povinných jazyků lze zavést i další jazyky; aktuálně jsou v ipthes podporovány: **slovak**, **french**, **german** (viz též dokumentaci balíčku **babel** [31]):

```
\usepackage[english,czech]{babel}
```

¹ Nebylo tomu tak vždy. Případná jiná kódování, která připadají v úvahu, jsou cp1250 na Windows nebo latin2 na Linuxu, ale byla by nutná konverze.

Preferujete-li Times jako textový i matematický font², stačí odkomentovat následující řádek pro načtení balíčku `txfonts` [35]. Necháte-li jej zakomentovaný, bude použit Latin Modern, jehož zavedení je popsáno výše.

```
%\usepackage{txfonts}
```

Použijete-li výše uvedený balíček `txfonts` [35], bezpatkový (sans serif) font a strojopisný (monospace) font budou změněny po řadě na fonty Helvetica a Courier. Pro zachování bezpatkového a strojopisného fontu z nadrodiny `lm` [28], což podle názoru autora dává lepší estetický výsledek, stačí odkomentovat tyto čtyři řádky (nechejte je zakomentované, je-li zakomentováno přecházející načtení balíčku `txfonts`):

```
%\DeclareTextFontCommand{\textsf}{\sffamily}
% \renewcommand*{\sfdefault}{\lmsf}
%\DeclareTextFontCommand{\texttt}{\ttfamily}
% \renewcommand*{\ttdefault}{\lmtt}
```

2.3. Podpora tvorby rejstříku

Následující kód odkomentují a balíček `makeidx` [7, 8] nechají načíst pouze ti, kdo chtějí vytvářet rejstřík. Jelikož v tomto manuálu rejstřík není, odkazujeme na další informace např. v monografiích [9, 12] a dokumentaci [7, 8]:

```
%\usepackage{makeidx} \makeindex
```

2.4. Další balíčky

Dále můžete podle potřeby načíst další balíčky kompatibilní s dokumentní třídou `ipthes`. Doporučuje se načítat jen balíčky, které jsou opravdu nezbytné. Balíčky uvedené v Dodatku B a jejich závislosti se načítají v dokumentní třídě a je tedy zbytečné a škodlivé je zde načítat. Pro tento manuál potřebujeme balíček `fancyvrb` [27] umožňující načítání fragmentů kódu přímo ze zdrojových souborů jako v této kapitole; další balíček `subfig` [36] je připraven k použití:

```
\usepackage{fancyvrb} % doslovné načítání LaTeX kódů ze souborů
%\usepackage{subfig}
```

² Font Times je prostorově úspornější. Nepoužívejte balíček `times` [32], který změní jen textový, nikoli však matematický font, ani balíčky `mathptmx` nebo `psnffs` [33, 34].

2.5. Nastavení, definice a redefinice

Odsud až po `\begin{document}` lze umístit vaše privátní nastavení, definice a redefinice. Je však výhodnější umístit je do konfiguračního souboru `ipthes.cfg` popsaného v Dodatku D, jenž bude automaticky (je-li přítomen) nalezen a načten – důvody jsou vysvětleny v úvodu této kapitoly. Některá nastavení však budou fungovat jen když jsou v konfiguračním souboru, např. nastavení `\pdfcompresslevel`. Z toho důvodu se doporučuje upřednostnit konfigurační soubor. Některá nastavení budou fungovat i odtud (aktivní jsou však v `ipthes.cfg`), jako například:

```
%\setcounter{tocdepth}{3}
%\setcounter{secnumdepth}{3}
%\newcommand*\epow[1]{\ensuremath{\euler^{\#1}}}
```

2.6. Vzory dělení slov

Uživatelské vzory dělení slov musí být umístěny zde v preambuli, nikoli v konfiguračním souboru `ipthes.cfg`:

```
\hyphenation{svě-to-vé ov-šem úh-lem pa-t-ří ne-jsou sek-ci
tří-du oh-le-du ar-X-iv tom-to ad-re-sá-ře pod-ad-re-sá-ři
ne-pře-hléd-nu-tel-né fi-lo-zo-fic-ko pří-ro-do-vě-dec-ká
pří-ro-do-vě-dec-ké wiz-arda do-bě tu-to včet-ně po-le
ar-ti-cles dis-tri-bu-tion cos-mo-log-i-cal for-mu me-to-dy
prin-ci-py mo-der-ní di-a-gnos-ti-ky ba-ka-lář-ská vněj-ší-ho
}
```

2.7. Konec preambule

Začátkem prostředí `document` končí preambule:

```
\begin{document} % NEMAŽTE ANI NEZAKOMENTOVÁVEJTE TENTO ŘÁDEK!!
```

Kapitola 3

Některá drobná vylepšení

Pro vysázení motto kapitoly (sekce) lze použít prostředí `motto` s jedním povinným argumentem (autorem motto) a jedním volitelným argumentem (specifikací jazyka motto). Příklad použití je v začátku Úvodu na stránce 1.

Chcete-li vysadit poznámku, jež není součástí textu (např. pro vedoucího práce, upomínku na dodatečné zjištění přesných bibliografických dat apod.), použijte příkaz `\note` (viz též stránka 87). Argument příkazu `\note` se vysadí jako na ukázce na stránce 87, ale jen při použití volby `draft`. Jakmile ji vypneme, všechny marginálie vysázené pomocí `\note` zmizí a příkaz ani jeho argumenty není třeba ze zdrojového textu odstraňovat. Příkaz `\note` má hvězdičkovou variantu `\note*`, která vysází marginálii stejným způsobem jako `\note` s tím rozdílem, že vypnutí volby `draft` marginálii ponechá. Tímto způsobem je vysázena marginálie na stránce 87, která je součástí finální formy manuálu.

Část II

Ukázky z obhájených závěrečných prací

Kapitola 4

Rotací stabilizovaná magnetická levitace

Pokud jste se někdy snažili přimět jeden permanentní magnet k levitaci nad jiným permanentním magnetem (kdo toto aspoň jednou nezkoušel?), jistě jste zjistili, že lze snadno zajistit mezi magnety repulsivní sílu dostatečně silnou pro vybalancování tíhy. Stejně jste ale asi k vaší nelibosti poznali, že levitátor – magnet, který měl levitovat, se vždy překloupil, čímž se magnetická repulze změnila na atrakci, levitátor spadl a „přilepil“ se na druhý magnet. Ať jste se snažili sebevíc, stabilní levitace nebylo možno dosáhnout. Nemožnost stabilní levitace permanentních magnetů teoreticky odvodil a formalizoval Reverend SAMUEL EARNSHAW v roce 1842 (tedy ještě před publikací Maxwellových rovnic klasické elektrodynamiky roku 1861) kdy publikoval svůj slavný teorém [37, 38], jemuž se budeme věnovat podrobně v následující sekci 4.1 na straně 24.¹ Od té doby považovali fyzikové levitaci permanentních magnetů za nemožnou, analogicky jako matematici považují (oprávněně) za nemožné roztřít pomocí pravítka a kružítko libovolný úhel (což bylo dokázáno rovněž v 19. století).

Ukazuje se, že Earnshawův teorém je sice správný, ale v jeho předpokladech jsou „zadní vrátka“ umožňující přece jen teoreticky zdůvodnit a realizovat dokonce více druhů magnetické levitace. Některé z nich jsme ve stručnosti představili v předcházející kapitole. Nyní se budeme věnovat obzvláště fascinující magnetické levitaci, jež nevyžaduje napájení, kryogenní aparaturu, a ani žádné speciální prostředky. Je tak jednoduchá, že je komerčně k mání jako „hračka“ či „hlavolam“ za cca USD 40 pod názvem Levitron® (viz [39, 40], lze se setkat i s pojmenováním U-CAS [41]).

Symetrický vlček (levitátor) obsahující permanentní magnet rotující a vznášející se nad bází obsahující toroidální permanentní magnet si nechal

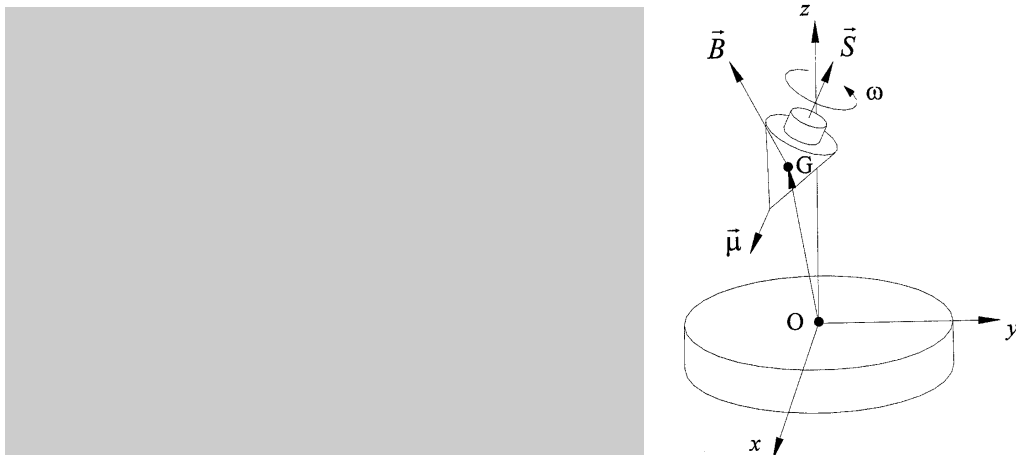
¹ Earnshawova motivace byla ovšem jiná – týkala se nestability rovnováhy interagujících elektrických nábojů a její aplikace na světelnosný éter. Platnost Earnshawova teorému je ovšem možné snadno rozšířit na interakci libovolných elektrických či magnetických multipólů.

v roce 1983 patentovat ROY HARRIGAN z Vermontu, USA [42]. Tento vynálezce měl vůči svým předchůdcům, kteří se před ním snažili o levitaci permanentních magnetů (a neuspěli), značnou výhodu: neznal Earnshawův teorém. Protože nevěděl, že permanentní magnety nelze levitovat, náhodou a usilovným snažením objevil způsob, jak toho dosáhnout *lze*. To není protimluv – Harrigan nevědomky využil toho, že rotace levitátoru na sebe váže dva jeho stupně volnosti, které se tak nemohou měnit nezávisle, nýbrž změna jednoho velmi rafinovaným způsobem ovlivňuje druhý. Tím vytváří ostrůvek stability způsobem, který nenarušuje Earnshawův teorém, jenž předpokládá nezávislost všech stupňů volnosti levitátoru. Takovou „změnu předpokladů“ nikdo z renomovaných fyziků, kteří Harrigana přesvědčovali o marnosti jeho úsilí, po více než století od formulace Earnshawova teorému nenavrhl [40].² Nutno ovšem podotknout, že vysvětlení fyziky levitace permanentních magnetů je na mnoha webových stránkách jen částečně správně, včetně stránky [39].

Tato práce čerpá převážně ze dvou základních článků a jedné diplomové práce [43–45], částečně z dalších seriálních zdrojů [41, 46–53] i z dalších, zejména webových zdrojů [54, 55]. K práci [50] je na webu zdrojový soubor `dyn_of_lev.mws` pro Maple numerické simulace Hanse-Georga Koepkena.

Levitron[®] a jeho koncepční schéma lze vidět na obrázcích 4.1 a 4.2. Pokud levitátor umístíme do vhodné pozice nad toroidní magnet a roztočíme jej s úhlovou rychlostí nacházející se v určitých mezích, dojde k jeho stabilní levitaci, která bude trvat do doby, než se levitátor vlivem tření zpomalí pod dolní mez úhlové rychlosti. Přivedení levitátoru do režimu levitace vyžaduje určitý cvik. Postup je následující: báze magnet umístíme na stůl, přičemž dbáme na přesně horizontální nastavení. Položíme na něj plastovou destičku (dodávanou se zařízením Levitron[®]), do jejíhož středu umístíme levitátor a prsty jej roztočíme. Následně pomalu zdvihneme destičku do výše asi 2.5–3 cm, až ucítíme, že levitátor v blízkosti levitační výšky jakoby z destičky „vyskočil“. Nyní můžeme již destičku odstranit a sledovat levitaci. V případě, že levitátor má snahu „utéci“ do strany, musíme příslušnou stranu pomocí stavitelných nožiček stolu zdvihnout. Během zdvihání plexisklové destičky se levitátor stabilizuje v horizontálním směru, což v usnadňuje jeho vyzdvižení – důvod je vysvětlen v poznámce pod čarou za rovnicí (4.27). Je proto dobré co nejdříve po roztočení levitátoru nadzvednout plexisklovou destičku do výše asi 0.5 cm, kde dochází ke stabilizaci

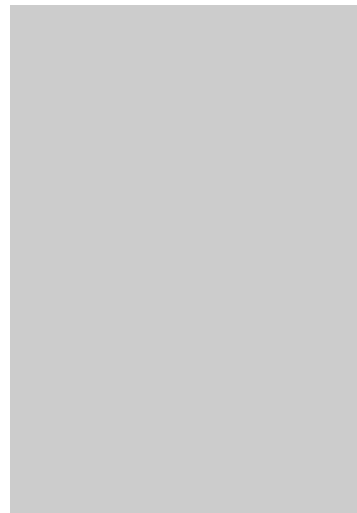
² Je dobré si připomenout tuto historii kdykoli Vám někdo řekne, že něco nejde. Nejsou-li k tomu racionální důvody, je lepší předpokládat, že to udělat jde.



Obrázek 4.1. *Vlevo:* Průřezové schéma Levitronu: (1) horní kónická část levitátoru ve formě symetrického setrvačníku (vlčku) určená k uchopení a roztáčení; (2) kruhový keramický permanentní magnet; (3) pomocná plastová zdvihací podložka; (4) plastové pouzdro bazového magnetu; (5) toroidální keramický permanentní bazový magnet. *Vpravo:* Prostorové schéma Levitronu s vyznačenými inerciálními kartézskými souřadnicemi se středem v centru bazového magnetu, vektorem magnetického dipólového momentu $\vec{\mu}$, lokálním vektorem magnetické indukce $\vec{B}$, normálovým vektorem $\vec{S}$ úhlové rychlosti ($|\vec{S}| = \omega$) a těžištěm levitátoru G. Převzato z [51].



Obrázek 4.2. Improvizovaná realizace levitátoru Levitron.



Obrázek 4.3. Samuel Earnshaw.

a snižuje se tak precese. Při správném vyvážení stolku a vhodné rotaci je levitátor schopen levitovat po dobu asi 3 minut, než se aerodynamickým třením sníží otáčky natolik, že gyroskopická stabilizace přestane fungovat.

Principy rotačně stabilizované levitace permanentních magnetů se ovšem úzce prolínají s principy diamagnetické levitace, jak se čtenář může přesvědčit z výše uvedené literatury.

Uvedme zde několik odkazů na videoklipy prezentující Levitron[®] nebo jeho napodobeniny v akci:

- <https://youtu.be/YpHraxis6Le4>
- <https://youtu.be/tvDRCwIS8KY>
- <https://youtu.be/GMVt1NbMwHw>
- https://youtu.be/J0ZeCTF_I1k
- <https://youtu.be/VylZJrep1MM>
- <https://youtu.be/9LTENE7TYew>
- https://youtu.be/iRZfk_FvS98
- https://youtu.be/1yVko_ANnMc

4.1. Earnshawův teorém

Tento teorém, který roku 1842 odvodil SAMUEL EARNSHAW zmíněný v úvodu kapitoly (viz obrázek 4.3), má v problematice magnetické levitace zásadní význam. Uvedme nejprve několik jeho slovních formulací.

Jakákoli rovnovážná statická konfigurace elektrických nábojů, fixních dipólů, kvadrupólů nebo vyšších multipólů umístěných volně v prostoru je nestabilní. [Formulace blízká originální]

Totéž ovšem musí platit i pro permanentní magnety (fixní magnetické dipóly nebo multipóly vyšších řádů), neboť vztahy pro interakční energii elektrických a magnetických multipólů jsou stejné (s výjimkou neexistujících magnetických monopólů).³ Dodatečné vnější gravitační pole výsledky nemění, neboť jeho relevantní vlastnosti jsou stejné jako u elektrostatického či magnetostatického pole (viz níže).

³ Známa je úloha ze středoškolské fyziky o nalezení elektrického náboje Q , který je třeba umístit do středu čtverce, v jehož vrcholech jsou stejné elektrické náboje q , tak, aby celková síla na každý z těchto pěti nábojů vymizela. Nalézt takovou rovnováhu je triviální, stabilita je však nedosažitelná – sebemenší perturbace polohy kteréhokoli z nábojů vede ke kolapsu systému.

Neexistuje čistě elektrostatický nebo magnetostatický levitátor nebo částicová past. [56]

Žádná kombinace elektrostatických, magnetostatických nebo gravitačních sil nemůže vytvořit 3D potenciálovou jámu nezbytnou pro stabilní levitaci ve volném prostoru. [57, 58]

Žádný stacionární objekt vyrobený z permanentních magnetů ve fixní konfiguraci nelze udržet ve stabilní rovnováze jakoukoli kombinací statických magnetických a/nebo gravitačních sil. [59]

Dokážeme nyní Earnshawův teorém pro libovolný systém magnetických dipólů, případně i multipólů vyšších řádů, jenž se mohou v prostoru libovolně přemísťovat a natáčet, a to způsobem, že všechny jejich stupně volnosti jsou navzájem nezávislé. Navíc předpokládejme, že magnetické multipólové momenty mají také hmotnost nebo analogicky momenty vyšších řádů popisující rozložení hmoty, takže podléhají gravitačnímu působení.⁴ Uvažujme takový systém N vzájemně interagujících magnetických a hmotných multipólů očíslovaných indexem $a = 1, \dots, N$; mezi nimi předpokládáme vakuum nebo prostředí homogenní hustotou hmoty i magnetickými vlastnostmi. Vybereme jeden multipól – nechť je to bez újmy na obecnosti multipól 1, jehož polohu symbolicky označíme symbolem P . Magnetickou indukci, gravitační intenzitu a potenciál vytvořené v bodě P všemi ostatními multipóly $a = 2, \dots, N$ označme po řadě $\vec{B}(P)$, $\vec{g}(P)$ a $V(P)$. Bod P se nachází mimo ostatní multipóly, takže pro gravitační potenciál platí Laplaceova rovnice [60]

$$\Delta V(P) = 0. \quad (4.1)$$

Jelikož tato rovnice platí i v určitém okolí bodu P , v němž se nechacházejí ostatní členové systému, budou v tomto okolí nulové i parciální derivace gravitačního potenciálu podle kartézských souřadnic libovolného řádu, a po záměně pořadí parciálních derivací a s přihlédnutím ke vztahu mezi gravitačním potenciálem a intenzitou $\vec{g} = -\nabla V$ dostaneme

$$\Delta g_i = \Delta \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \Delta \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k} = \dots = 0, \quad (4.2)$$

⁴ Přidání elektrických multipólů je analogické, ale protože je nebudeme v dalších úvahách potřebovat, v zájmu zjednodušení je vypustíme.

kde $i = 1, 2, 3$ a $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ jsou kartézské inerciální souřadnice a $(g_1, g_2, g_3) = (g_x, g_y, g_z)$ odpovídající komponenty gravitační intenzity. Rovnice analogická (4.2) platí i pro komponenty magnetické indukce,

$$\Delta B_i = \Delta \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \Delta \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j \partial x_k} = \dots = 0. \quad (4.3)$$

Důkaz je jednoduchý a ihned plyne z již dříve zmíněné nezřídlovosti ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$) a nevírovosti magnetické indukce ($\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$) [45] pomocí známé identity [61]

$$\Delta \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{B}). \quad (4.4)$$

Pole, jejichž laplacián je nulový, nazýváme harmonické. Podle rovnic (4.1), (4.2) a (4.3) jsou gravitační potenciál, komponenty gravitační intenzity a magnetické indukce včetně všech jejich parciálních derivací harmonická pole.

Potenciální energie vybraného multipólu je dána vztahem [61]

$$U(P, Q) = mV(P) + (\text{hmotový dipólový, kvadrupólový a vyšší členy}) \\ - \vec{\mu}(Q) \cdot \vec{B}(P) + (\text{magnetický kvadrupólový a vyšší členy}), \quad (4.5)$$

v němž m označuje hmotnost, $\vec{\mu}$ magnetický dipólový moment a Q symbolicky vnitřní stupně volnosti (u dipólu jeho natočení např. pomocí Eulových úhlů). Členy popisující vyšší multipóly jsou vyznačeny pouze symbolicky, je však jasné, že budou multiplikativním způsobem obsahovat parciální derivace gravitačního potenciálu a komponent B_i podle prostorových souřadnic [62]. Z těchto úvah a rovnic (4.1), (4.2) a (4.3) dostáváme, že potenciální energie vybraného multipólu „dědí“ vlastnost harmonicity,

$$\Delta U(P, Q) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (4.6)$$

V dalším textu se omezíme na magnetické dipóly popsané vektorem magnetického dipólového momentu $\vec{\mu}$ a hmotové monopóly m . Započtení multipólů vyšších řádů je pouze technickou záležitostí a na principu nic nemění, navíc vzhledem k obvyklé homogenitě gravitačního pole je zanedbání

hmotových multipólů vyšších řádů exaktní. Nutná podmínka rovnováhy vybraného multipólu je, aby síla na něj působící v bodě P vymizela⁵

$$\vec{F}(P) \equiv -\nabla U(P, Q) = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{tíha}} + \underbrace{(\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B}}_{\text{magnet. síla}} = \vec{0}. \quad (4.7)$$

Pro dosažení stability je třeba zajistit konvexnost potenciální energie v libovolném směru, nutná podmínka čehož je

$$\Delta U(P, Q) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0, \quad (4.8)$$

což je ve sporu s podmínkou (4.6). Díky harmonicitě potenciální energie nemůže být podmínka stability (4.8) splněna. Pokud by například parciální derivace $\partial^2 U / \partial x^2$ a $\partial^2 U / \partial y^2$ byly kladné, bude pro zachování nulového součtu v (4.6) muset být $\partial^2 U / \partial z^2 < 0$, což znamená labilitu v z -ovém směru. Může také nastat situace, že jedna parciální derivace bude kladná a dvě záporné, takže nestabilní budou dva stupně volnosti.

Tyto úvahy lze shrnout takto: potenciální energie vybraného multipólu v gravitačním a magnetickém poli ostatních multipólů je harmonické pole a nemá tudíž prostorové lokální minimum. Může mít pouze sedlové body, v nichž lze stability dosáhnout nejvýše ve dvou ortogonálních směrech, ostatní aspoň jeden směr musí být vždy nevyhnutelně labilní.

Situaci komplikují ještě vnitřní stupně volnosti Q , které jsme zatím nebrali do úvahy, a které např. v případě magnetického dipólu popisují jeho prostorovou orientaci. Jak je patrné z vlastností skalárního součinu, že minimum potenciální energie $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ (při zafixované pozici P) nastává při paralelní orientaci dipólového momentu vůči magnetické indukci, maximum při antiparalelní pozici. Na magnetický dipólový moment $\vec{\mu}$ totiž působí kromě magnetické síly

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B} \quad (4.9)$$

také moment síly

$$\vec{K} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (4.10)$$

⁵ Díky nevírovosti pole $\vec{B}$ platí $\partial B_i / \partial x_j = \partial B_j / \partial x_i$, a tedy $-\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B}$, jelikož $\mu(Q)$ závisí pouze na vnitřních stupních volnosti.

(odvození je uvedeno např. v [61]). Za povšimnutí stojí, že pro vznik magnetické síly musí být pole magnetické indukce nehomogenní, silový moment však může působit i v homogenním magnetickém poli.

V dalším uvidíme, že právě antiparalelní orientace je nutná pro vznik rovnováhy, jejíž stabilita je tak ohrožena nejen výše popsanou translační labilitou, ale i labilitou vůči orientaci (překlopení). Na druhé straně právě vazba vhodných parametrů orientace dipólu na jeho pozici v magnetickém poli pomůže vymanit se z podmínek Earnshawova teorému (vzájemná nezávislost všech stupňů volnosti) a způsobit nahrazení znaménka rovnosti v (4.6) znaménkem „větší než“, což v principu umožní stabilní levitaci.

4.2. Jak dosáhnout prostorově stabilní levitace?

Nezbytnou podmínkou pro stabilitu levitace je kladný laplacián potenciální energie (4.5) v rovnovážném bodě. První člen popisující gravitační interakci bude vždy harmonický, jedinou možností, jak situaci změnit, je ovlivnění druhého členu popisujícího magnetickou interakci.

Nejprve jednoduchým výpočtem ověříme, že pro kvadrát velikosti magnetické indukce

$$B^2 \equiv \vec{B} \cdot \vec{B} = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \quad (4.11)$$

platí [58]

$$\Delta(B^2) = 2 \left(|\nabla B_x|^2 + |\nabla B_y|^2 + |\nabla B_z|^2 \right) \geq 0. \quad (4.12)$$

Levitace ovšem vyžaduje nehomogenním magnetické pole, v němž musí být gradient alespoň jedné z komponent magnetické indukce nenulový, takže v (4.12) nastává ostrá nerovnost

$$\Delta(B^2) > 0. \quad (4.13)$$

V důsledku rostoucí monotonicity druhé odmocniny na oboru kladných reálných čísel pak platí také

$$\Delta B > 0. \quad (4.14)$$

Vztahy (4.13) a (4.14), dobře známé konstruktérům magnetických částicových pastí, jsou esenciální ingrediencí pro možnost levitace. Pokud totiž

vezmeme místo fixního magnetického dipólu „měkký“ dipól, jehož dipólový moment je úměrný vnější magnetické indukci, ale míří opačným směrem,

$$\vec{\mu} = -\kappa \vec{B}, \quad (4.15)$$

kde κ je kladná konstanta (tedy přesně chování diamagnetik), bude potenciální energie

$$U = mV + \kappa B^2. \quad (4.16)$$

Aplikujeme-li na obě strany této rovnice Laplaceův operátor, dostaneme podle rovnice (4.13) okamžitě kýžený výsledek

$$\Delta U > 0. \quad (4.17)$$

Této možnosti využívá diamagnetická levitace. Všimněme si, že odpadá nutnost zabývat se vnitřními stupni volnosti Q , protože díky diamagnetickému jevu se magnetizace materiálu a tím i magnetický dipólový moment $\vec{\mu}$ automaticky nastavuje do správného (antiparalelního) směru, jak je patrné z (4.15). Konstanta κ je ovšem velmi malá, takže k realizaci diamagnetické levitace je zapotřebí velmi silného magnetického pole.

Druhá možnost je ponechat velikost magnetického dipólového momentu konstantní, ale nějak zařídit, aby se natáčel antiparalelně vektoru externí magnetické indukce, formálně vyjádřeno

$$\vec{\mu} = -\kappa \frac{\vec{B}}{B}, \quad (4.18)$$

což odpovídá chování permanentního magnetu. Potenciální energie potom bude

$$U = mV + \kappa B. \quad (4.19)$$

Analogicky s předchozím případem, po aplikaci Laplaceova operátoru na obě strany této rovnice obdržíme podle (4.14) opět vztah (4.17) připouštějící stabilitu.

Jak uvidíme v dalším rozboru, striktní antiparalelizace magnetického dipólového momentu $\vec{\mu}$ vůči externí magnetické indukci $\vec{B}$ není nutný, stačí, když úhel mezi $\vec{\mu}$ a $-\vec{B}$ nepřekročí jistý mezní malý úhel. Na rozdíl od diamagnetické levitace je zde jeden zásadní problém, a to jak udržet magnetický dipól v blízkosti antiparalelní pozice, když na něj působí silový

moment $\vec{K} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, který se snaží dipól otočit do paralelní pozice. Jinými slovy řečeno: máme aspoň teoreticky vyřešen problém prostorové stabilizace (stupňů volnosti P), ale nikoli vnitřních stupňů volnosti Q .

Pro možnost stabilizace levitace permanentních magnetů tedy vyvstávají dvě klíčové otázky:

1. Jak zařídit udržování antiparalelní vzájemné orientace magnetického dipólového momentu $\vec{\mu}$ a $\vec{B}$ (nemusí být zcela striktní ve smyslu poznámky výše)? Udržování antiparalelní orientace umožní vznik 3D potenciálové jamky okolo rovnovážné polohy.
2. Jak stabilizovat vnitřní stupně volnosti Q , tj. jak zařídit, aby se dipól vlivem momentu (4.10) okamžitě nepřeklopil?

Jak uvidíme dále, odpovědi na obě otázky je *gyroskopická stabilizace* pomocí rotace. Je ale dobré si uvědomit, že jsme zatím dokázali pouze, že levitace není vyloučena, a to rovnicí (4.17), která stále připouští konkávnost $U(P)$ v některém směru,

$$\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U^2}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U^2}{\partial z^2} > 0. \quad (4.20)$$

Diskuse a důkaz, že pro konfiguraci použité v zařízení Levitron[®] to lze, je obsahem následující sekce.

4.3. Levitron[®] a teorie jeho stability

Vyjdeme z konfigurace typické pro Levitron[®] znázorněné na obrázku 4.4. Systém je tvořen prstencovým permanentním magnetem (bází) a levitátorem – symetrickým vlčkem s magnetickým dipólem, jenž je rovnoběžný s jeho osou symetrie. Permanentní prstencový magnet má poloměr a a jeho magnetický moment v nepohyblivém laboratorním inerciálním souřadném systému (X, Y, Z) má komponenty $\vec{M} = (0, 0, M) = M\hat{e}_Z$, kde $M > 0$. Osa prstence je shodná s osou Z .

Levitátor je charakterizován Ampèrovým magnetickým dipólovým momentem $\vec{\mu}$ s komponentami $\vec{\mu} = (0, 0, \mu) = \mu\hat{e}_z$ v souřadném systému (x, y, z) pevně spojeném s levitátorem a mající počátek v jeho hmotném středu⁶ C a osu z splývající s osou symetrie levitátoru, dále pak hmotností m a hlavními centrálními momenty setrvačnosti $J_{\parallel}$ vzhledem k rotační ose levitátoru (osa z) a $J_{\perp}$ vzhledem k libovolné ose kolmé k rotační ose levitátoru

⁶ Kvůli stručnosti budeme nadále užívat termínu těžiště.



Obrázek 4.4. Schéma modelu Levitronu použité v pozdější numerické simulaci.

(např. osy x, y , které kvůli přehlednosti nejsou znázorněny) a procházející těžištěm. Levitátor je umístěn v homogenním gravitačním poli s komponentami $\vec{g} = (0, 0, -g)$ v laboratorním inerciálním systému souřadnic (X, Y, Z) , kde $g > 0$, a v magnetickém poli generovaném výše popsáním toroidálním bázovým magnetem. Osa z svírá s osou Z nutační úhel θ . Písmeny S a J jsou označeny „severní“ a „jižní“ pól obou magnetů; levitátor je zachycen v poloze, kdy jsou k sobě přivráceny stejnojmenné magnetické póly a právě v této situaci bude tedy docházet k žádoucímu odpuzování a nadnášení.

Levitátor – jako tuhé těleso bez restrikce na polohu jakéhokoli svého bodu – má šest stupňů volnosti ($R \equiv \sqrt{X^2 + Y^2}, \Phi, Z, \varphi, \theta, \psi$), z nichž orbitální úhel těžiště Φ , precesní úhel φ a úhel vlastní rotace ψ nejsou na obrázku 4.4 kvůli přehlednosti explicitně vyznačeny; v tomto směru odkazujeme na standardní učebnice analytické mechaniky, např. na známou knihu Goldsteina a spoluautorů [60].

Při výpočtech zanedbáváme skutečnost, že magnet umístěný v levitátoru má určité konečné rozměry a nahrazujeme jej bodovým dipólem, dále pak zanedbáváme šířku prstence bázového permanentního magnetu budícího magnetické pole, a nahrazujeme jej lineárním kružnicovým magnetem

infinitezimální šířky a výšky. Tato zanedbání, jak uvidíme, nic nemění na kvalitativním způsobu pohybu levitátoru. Bylo by ale podnětné zkusit do budoucna složitější výpočty beroucí v úvahu rozměry báze i levitátoru. Pro zpřehlednění vzorců elektromagnetismu používáme místo soustavy jednotek SI soustavu CGS [61].

Za pozornost stojí, že magnetický dipól (v praxi malý permanentní magnet) je umístěn mimo těžiště C (avšak stále na ose symetrie levitátoru); jejich vzdálenost je na obrázku 4.4 označena s , přičemž ve znázorněné „odpuzovací“ poloze je těžiště pod dipólem. Tato představa je užitečná, protože teoreticky by se dalo dostatečnou volbou vzdálenosti s dosáhnout kompenzace a magnetického silového momentu $\vec{\mu} \times \vec{B}$ snažícího se překloupit levitátor gravitačním silovým momentem, kdy by levitátor fungoval v podstatě jako kyvadlo s centrem magnetické interakce v dipólu a centrem gravitační interakce v těžišti. Tento způsob stabilizace by však, jak zakrátko uvidíme, nefungoval, a pro rovnice numerického modelu se nakonec stejně klade $s = 0$, což odpovídá reálnému zařízení.

Z důvodu rotační symetrie Levitronu bude rovnovážná poloha levitátoru ležet na ose báze magnetu Z , a osa levitátoru z s ní bude antiparalelní. Pro určení rovnovážné polohy proto můžeme potlačit pět stupňů volnosti buď fixací jejich hodnot ($R = 0, \theta = \pi$), kdy jsou hodnoty Φ, φ, ψ , jakož i případná nenulová hodnota s , irelevantní. Potenciální energie (4.5) se zjednoduší na tvar⁷

$$U = mgZ - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = mgZ + \mu B_Z. \quad (4.21)$$

V rovnováze musí síla působící ve směru Z na levitátor vymizet,

$$F_Z = -\frac{\partial U}{\partial Z} = -mg - \mu \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0. \quad (4.22)$$

Podrobnější diskuse pomocí numerického modelování [63] vede k závěru, existují čtyři rovnovážné polohy, jak je vidět na obrázku 4.5:

- Dvě „vznášející se“, které mají $Z > 0$, $\vec{\mu}$ míří dolů, báze a levitátor se odpuzují. Tyto rovnovážné polohy jsou dány rovnicí (4.22).
- Dvě „zavěšené“, které mají $Z < 0$, $\vec{\mu}$ míří nahoru, báze a levitátor se přitahují. Tyto rovnovážné polohy jsou dány modifikací rovnice rov-

⁷ Pro existenci rovnováhy musí mířit magnetická indukce v rovnovážném bodě vzhůru, odkud plyne změna znaménka u magnetického členu.



Obrázek 4.5. Rovnovážné body Levitronu. Osa Z je zde položena vodorovně, směr vzhůru je orientován doprava. „Vznášející se“ rovnovážné body jsou označeny 3, 4, „zavěšené“ rovnovážné body jsou označeny 1, 2. Tyto dvojice rovnovážných bodů se nacházejí vždy nad a pod inflexním bodem magnetické indukce na ose Z (označeno „infl“), a vždy v místech, kde magnetická indukce slábne. V bodech „max“ a „ $B = 0$ “ je magnetická indukce maximální resp. nulová. Převzato z [63].

nicí (4.22) pro paralelní indukci báze a $\vec{\mu}$ projevující se změnou znaménka u magnetického členu,

$$F_Z = -\frac{\partial U}{\partial Z} = -mg + \mu \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0. \quad (4.23)$$

Těmito dvěma body se dále nebudeme zabývat, jejich vlastnosti kopírují vlastnosti „vznášející se“ dvojice rovnovážných bodů.

Magnetická indukce báze je úměrná jejímu celkovému magnetickému dipólovému momentu M . Z rovnic (4.22) a (4.23) je pak zřejmé, že aby vůbec existovalo řešení a rovnovážné body, musí být „vazební koeficient“ definovaný součinem

$$\alpha \equiv \mu M \quad (4.24)$$

velikostí dipólových momentů levitátoru μ a báze M větší než určité limitní hodnota. Není-li tato podmínka splněna, levitace nenastane.

Jednoduchým výpočtem (pro podrobnosti odkazujeme opět na [63]) můžeme ověřit, že pro nejhořejší rovnovážný 4 bod je

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} > 0, \quad (4.25)$$

a tedy levitátor je vertikálně stabilní, zatímco pro rovnovážný bod 3 platí opačná nerovnost

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} < 0, \quad (4.26)$$

takže levitátor je vertikálně labilní. Pro realizaci levitace tak připadá do úvahy jedině nejhořejší rovnovážný bod 4.

Vraťme se ještě k předchozí úvaze o možnosti stabilizace levitátoru pomocí posunu těžiště vůči magnetickému dipólu. Moment tíhové síly by zajišťoval antiparalelní orientaci dipólu levitátoru, a při presenci vhodného tlumicího média (vzduch) by zajišťoval jeho exaktně nebo téměř vertikální pozici. Rovnice (4.21) by tedy (aspoň s přesností do členů 2. řádu) platila i při malých laterálních výchylkách, a díky harmonicitě polí V a B_Z , a tudíž i pole U , by v rovnovážném bodě 4 v důsledku (4.25) a rotační symetrie muselo platit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} < 0, \quad (4.27)$$

takže poloha levitátoru by byla laterálně (horizontálně) labilní.⁸ Levitátor by tedy měl tendenci v tomto směru „sklouznout“ a „uletět“. Je zřejmé, že statický způsob zabránění překlopení levitátoru nefunguje, neboť ponechává labilitu v horizontálním směru, plně v souladu s Earnshawovým teorémem.

Nyní výše presentované úvahy zpřesníme, čímž se zároveň připravíme na sestavení matematického modelu levitátoru. Budeme zhruba sledovat postup podle [45]. Položme počátek soustavy (X, Y, Z) do místa, kde magnetická síla kompenzuje tíhu (takže levitátor levituje v okolí bodu $R = 0$, $Z = 0$) a rozvíňme magnetickou indukci charakterizovanou radiální a axiální komponentou (B_R, B_Z) v okolí tohoto bodu do mocninné řady s přesností do kvadratických členů,

$$\begin{aligned} B_R(R, Z) = & B_R(0, 0) + \frac{\partial B_R}{\partial R}(0, 0)R + \frac{\partial B_R}{\partial Z}(0, 0)Z \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_R}{\partial R^2}(0, 0)R^2 + \frac{\partial^2 B_R}{\partial R \partial Z}(0, 0)RZ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_R}{\partial Z^2}(0, 0)Z^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

⁸ Analogicky by se dalo dokázat, že v rovnovážném bodě 3 by byl levitátor laterálně sice stabilní, ale vertikálně labilní, jak ukazuje (4.26).

$$B_Z(R, Z) = B_Z(0, 0) + \frac{\partial B_Z}{\partial R}(0, 0)R + \frac{\partial B_Z}{\partial Z}(0, 0)Z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_Z}{\partial R^2}(0, 0)R^2 + \frac{\partial^2 B_Z}{\partial R \partial Z}(0, 0)RZ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_Z}{\partial Z^2}(0, 0)Z^2. \quad (4.29)$$

Zřejmě díky symetrii platí

$$B_R(0, 0) = \frac{\partial B_R}{\partial Z}(0, 0) = \frac{\partial^2 B_R}{\partial Z^2}(0, 0) = 0 \quad (4.30)$$

a také

$$\frac{\partial B_Z}{\partial R}(0, 0) = \frac{\partial^2 B_Z}{\partial R \partial Z}(0, 0) = 0. \quad (4.31)$$

Dále, vektorové pole $\vec{B}$ splňuje rovnice nezřídlovosti a nevírovosti

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RB_R) = 0, \quad (\nabla \times \vec{B})_\Phi = \frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R} = 0, \quad (4.32)$$

ostatní komponenty rotace $\nabla \times \vec{B}$ jsou identicky nulové díky $B_\Phi \equiv 0$ a axiální symetrii magnetického pole báze $\vec{B}$.

Z rovnic (4.28)–(4.32) plynou následující rozvoje s přesností do kvadratických členů [45]

$$B_R(R, Z) = -\frac{1}{2}S_0R - K_0RZ, \quad (4.33)$$

$$B_Z(R, Z) = B_0 + S_0Z + K_0Z^2 - \frac{1}{2}K_0R^2, \quad (4.34)$$

v nichž je použito zkrácených označení

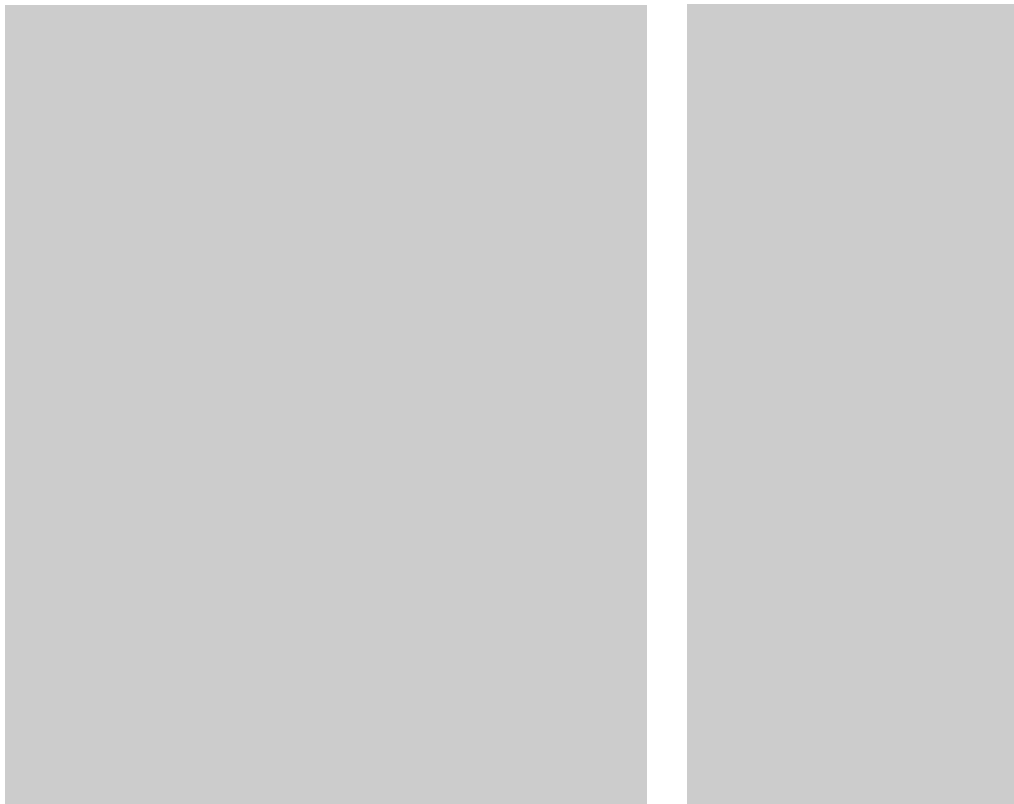
$$B_0 \equiv B_Z(0, 0),$$

$$S_0 \equiv \frac{\partial B_Z}{\partial Z}(0, 0) = -2 \frac{\partial B_R}{\partial R}(0, 0), \quad (4.35)$$

$$K_0 \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_Z}{\partial Z^2}(0, 0) = -\frac{\partial^2 B_R}{\partial R \partial Z}(0, 0) = -\frac{\partial^2 B_Z}{\partial R^2}(0, 0). \quad (4.36)$$

Kdyby byla orientace magnetického momentu levitátoru stále svislá, jak jsme již diskutovali výše, potenciální energie by se dala v okolí rovnovážného bodu vyjádřit s přesností do kvadratických členů

$$U = mgZ - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B_0 + (mg + \mu S_0)Z + \mu K_0 Z^2 - \frac{1}{2} \mu K_0 R^2. \quad (4.37)$$



Obrázek 4.6. Ilustrace principu nestability v nejvyšším rovnovážném bodě 4, kdy je osa levitátoru při výchylkách fixována ve vertikálním směru. Průběh potenciální energie v libovolné rovině obsahující osu Z v okolí rovnovážného bodu 4 je znázorněn na barevném panelu uprostřed pomocí barevné mapy (vzrůst je reprezentován barvami duhy od červené po fialovou). Rovnovážná poloha je reprezentována bílým bodem, v jehož okolí je patrné zřetelně sedlový průběh klesající horizontálně (laterálně) a rostoucí vertikálně. Převzato z [63].

Pro vykompenzování tíhy levitátoru se musí anulovat koeficient u Z . Aby však rovnováha byla stabilní, musela by kvadratická část potenciální energie (4.37) být pozitivně definitní, což, jak je vidět, díky poslednímu členu neplatí. Tento nestabilní režim je ilustrován na obrázku 4.6.

Je tedy zřejmé, že rotace levitátoru má kromě stabilizace vůči překlacení magnetického momentu levitátoru $\vec{\mu}$ do směru $\vec{B}$ ještě jiný, velmi delikátní úkol – musí zajistit pozitivní definitnost kvadratické části potenciální energie (4.37) a tím i prostorovou stabilitu levitátoru. Jak toho lze dosáhnout? Na základě úvah sekce 4.2 na straně 28 zřejmě levitátor a jeho magnetický dipól $\vec{\mu}$ nemůže zůstat vertikální, ale musí se natáčet do směru lokálního magnetického pole. Přesněji řečeno, magnetický moment $\vec{\mu}$ bude konat

precesní pohyb okolo směru lokální magnetické siločáry. Pak místo výrazu $\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B_Z$ nastoupí (alespoň s přibližnou platností) výraz $\vec{\mu} \cdot \vec{B} \cong -\mu B$, kde B označuje velikost magnetické indukce $(B_R^2 + B_Z^2)^{1/2}$. V takovém případě dostaneme (s přesností do kvadratických členů) výraz (4.37) modifikovaný na tvar [45]

$$U = \mu B_0 + (\mu S_0 + mg)Z + \mu K_0 \left(\frac{S_0^2}{2B_0 K_0} + 1 \right) Z^2 + \frac{1}{2} \mu K_0 \left(\frac{S_0^2}{4B_0 K_0} - 1 \right) R^2. \quad (4.38)$$

Magnetická indukce na ose Z (nyní vrátíme počátek soustavy (X, Y, Z) opět do středu bázevého permanentního magnetu) je

$$B_Z(0, Z) = \int_{\Phi'=0}^{2\pi} \left[\frac{3MZ^2}{(Z^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{M}{(Z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{d\Phi'}{2\pi} = M \frac{2Z^2 - a^2}{(a^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad (4.39)$$

a její parciální derivace podle Z

$$S = \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 3MZ \frac{3a^2 - 2Z^2}{(a^2 + Z^2)^{\frac{7}{2}}}. \quad (4.40)$$

Podmínka anulování koeficientu $\mu S + mg$ a tedy rovnováhy je

$$3\mu M Z \frac{2Z^2 - 3a^2}{(a^2 + Z^2)^{\frac{7}{2}}} = mg, \quad (4.41)$$

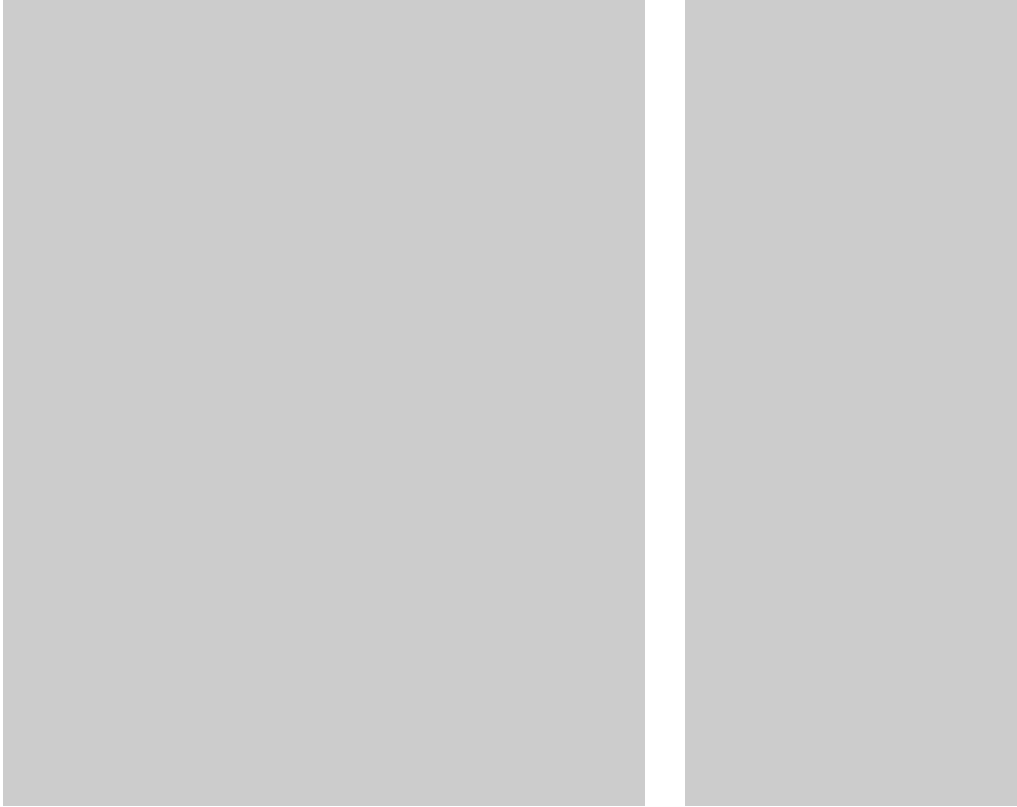
z níž pro zadané hodnoty μ , M , m a g numericky vypočteme levitační výšku Z_0 . Potenciální energie je tedy (nepodstatný konstantní člen μB_0 vynecháme)

$$U = \mu K_0 \left(\frac{S_0^2}{2B_0 K_0} + 1 \right) (Z - Z_0)^2 + \frac{1}{2} \mu K_0 \left(\frac{S_0^2}{4B_0 K_0} - 1 \right) R^2, \quad (4.42)$$

nebo ekvivalentně

$$U = \mu K_0 \left(\frac{m^2 g^2}{2B_0 K_0 \mu^2} + 1 \right) (Z - Z_0)^2 + \frac{1}{2} \mu K_0 \left(\frac{m^2 g^2}{4B_0 K_0 \mu^2} - 1 \right) R^2. \quad (4.43)$$

přičemž $K_0 = \partial^2 B_Z / \partial Z^2$ a B_0 se bere v bodě $R = 0$, $Z = Z_0$, kde Z_0 je řešením rovnice (4.41). Rovnice (4.41) může mít v oblasti $Z > 0$ dvě řešení –



Obrázek 4.7. Ilustrace princip stabilního režimu v nejvyšším rovnovážném bodě 4, kdy osa levitátoru při výchylkách sleduje směr siločar pole $\vec{B}$. Průběh potenciální energie v libovolné rovině obsahující osu Z v okolí rovnovážného bodu 4 je znázorněn na barevném panelu uprostřed pomocí barevné mapy (vzrůst je reprezentován barvami duhy od červené po fialovou). Rovnovážná poloha je reprezentována bílým bodem, v jehož okolí je patrné prostorové lokální minimum zajišťující stabilitu. Převzato z [63].

je nutno vybrat to z nich, pro které jsou koeficienty u kvadratických členů v (4.42) nebo (4.43) kladné. Parametry levitátoru tedy musí být voleny tak, aby

$$K_0 > 0, \quad \frac{m^2 g^2}{4B_0 K_0 \mu^2} > 1. \quad (4.44)$$

V tom případě je levitátor polapen v prostorové potenciálové jámě a jeho těžiště osciluje v horizontální rovině s periodou

$$T_R \sim 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\gamma_R}}, \quad (4.45)$$

kde γ_R je koeficient u R^2 v rovnici (4.42) nebo (4.43), analogicky ve vertikálním směru těžiště osciluje s periodou

$$T_Z \sim 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\gamma_Z}}, \quad (4.46)$$

kde γ_Z je koeficient u Z^2 v (4.42) nebo (4.43). Dále, předpokládáme-li, že rotace levitátoru je dostatečně rychlá, koná levitátor precesní pohyb kolem lokální siločáry s periodou

$$T_{\text{prec}} \sim 2\pi \frac{J_{\parallel} \Omega_0}{\mu B_0} \ll T_{\text{rot}} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \quad (4.47)$$

(viz [60]), kde $\Omega_0 \equiv d\psi/dt$ je úhlová rychlost rotace levitátoru. Jestliže platí adiabatická podmínka

$$T_{\text{prec}} \ll T_R, \quad (4.48)$$

stačí při výchylnkách, při nichž levitátor prochází oblastmi s různým sklonem magnetických siločar, precesní osa sledovat změnu jejich směru, a tak vytvářet v horizontálním směru potenciálovou jámu. Odtud plyne zajímavý závěr: rotace levitátoru nesmí být příliš rychlá, neboť pak je precesní perioda dlouhá a stane se srovnatelnou nebo dokonce větší než T_R , což vede ke ztrátě stability. Rotace levitátoru má samozřejmě i dolní mez: při poklesu otáček pod ni přestane rotace účinně bránit překlopení $\vec{\mu}$ do směru souhlasně s $\vec{B}$. Fungování stabilního režimu je ilustrováno na obrázku 4.7.

Kapitola 5

Diagnostika s obrazovým výstupem

V oblasti lékařské diagnostiky se v posledních letech uplatňují nové metody zobrazování, jež by nemohly vzniknout bez počítačové podpory při transformaci primárních dat produkovaných fyzikálními detektory na diagnosticky upotřebitelné obrazové výstupy. Jedná se o ultrazvukovou sonografii (US), počítačovou tomografii (CT), magnetickou rezonanci (MRI, fMRI), radioizotopové scintigrafické metody (planární scintigrafie, SPECT, PET). Všechny uvedené metody jsou v současné medicínské praxi úspěšně používány díky expandujícímu rozvoji, který v poslední době nastal hlavně v oblasti detektorů záření a informačních technologií při zpracování velkých objemů dat. V oblasti diagnostiky je proto nutná úzká spolupráce mezi medicínou, fyzikou a informatikou.

Z pochopitelných důvodů je zde prostor pouze pro fyzikální a informatické základy uvedených metod. Další poučení může čtenář získat např. z monografií [64–66]. V této kapitole se soustředíme na popis ultrazvukové sonografie a zobrazování pomocí (jaderné) magnetické rezonance.

5.1. Ultrazvuková sonografie

Zvukové vlny vysoké frekvence (2.5–40 MHz)¹ mohou poskytovat 2D obrazové informace o tkáních *in vivo*. Dají se využít také pro funkční zobrazování v živých tkáních, např. na základě Dopplerova jevu. Zobrazování pomocí ultrazvuku (*sonografie*) je podobné nejběžnější zobrazovací metodě pomocí X-záření v tom, že využívá fyzikálního agens schopného prostupovat (pokud možno bez poškození) tkáněmi, liší se však v několika základních aspektech:

- Ultrazvuk, jakožto mechanické vlnění, potřebuje látkové prostředí, ve kterém se může šířit.

¹ Pro srovnání, horní mez slyšitelnosti je pro lidské ucho okolo 20 kHz, u dětí až 40 kHz.



Obrázek 5.1. K echolokačnímu principu ultrazvukové sonografie. Ultrazvukový puls odražený od vzdálenějšího rozhraní potřebuje delší dobu pro návrat echa a vyvolání odezvy v detektoru. Z časové prodlevy mezi vysláním pulsu a detekcí echa lze lokalizovat rozhraní. Převzato z [64].

- Na rozdíl od X-záření, jež je zářením elektromagnetickým, je ultrazvuk podélným vlněním, a jeho vlnová délka je podstatně větší. Pro frekvenci 2 MHz je vlnová délka v měkké tkáni 0.75 mm, pro frekvenci 10 MHz je vlnová délka 0.15 mm. Pro srovnání, charakteristické vlnové délky X-záření při urychlovacím napětí okolo 100 kV jsou $10^7 \times$ větší.
- Pro zobrazování se namísto prošlého vlnění jako u rentgenového zobrazování využívá odraženého vlnění.

Ultrazvukový signál je vytvářen elektrickou stimulací krystalického materiálu. Jeho mechanické oscilace se přes vrstvu kontaktního gelu přenášejí do tkáně. Vzduch a různé druhy tkání (měkké tkáně, tuk, krev, mozek, svaly, kosti, apod.) se liší mechanickými vlastnostmi ovlivňujícími šíření ultrazvukových vln. Na rozhraní dvou různých tkání dochází k více či méně silnému odrazu ultrazvukové vlny. Zdroj ultrazvukového vlnění (transducer) vysílá posloupnost krátkých ultrazvukových pulsů a po vyslání každého pulsu se přepne do „naslouchacího“ režimu, v němž zaznamenává odražené pulsy (echa) přicházející z nitra vyšetřovaného organismu. Na základě časové prodlevy mezi vysláním pulsu a detekcí echa, intenzity echa a směru, z nichž echa přicházejí, se konstruuje obraz. Tento echolokační princip je schematicky zachycen na obrázku 5.1.²

² Princip ultrazvukové echolokace není v přírodě neznámý – ultrazvukových vln o frekvencích 50–200 kHz používají k echolokaci netopýři. Vlastní medicínská aplikace ultrazvuku se vyvinula z vojenské technologie – sonaru („sound navigation and ranging“) pro lokalizaci nepřátelských ponorek [67]. Maximální frekvence zvuku leží okolo 600 MHz [64].

5.1.1. Základní pojmy ultrazvukové akustiky

V této sekci připomeneme základní pojmy z akustiky, jež jsou nezbytné pro pochopení ultrazvukové sonografie.

V plynném či kapalném prostředí se zvuk šíří ve formě *podélných* (longitudálních) vln, v pevném skupenství je možná i forma *příčných* (transverzálních) vln. Vzhledem k oblasti aplikací ultrazvuku v medicíně – vyšetření měkkých tkání, jež se svými vlastnostmi blíží spíše kapalině než pevnému skupenství – nás zde zajímají jen podélné vlny. Podélné vlny si můžeme představit takto: zařídíme-li nějakými vhodnými okrajovými podmínkami mechanické oscilace na povrchu tkáně, energie těchto oscilací se šíří do tkání postupným přenášením pohybu na sousedící molekuly tak, že výchylka molekul je rovnoběžná se směrem šíření rozruchu.³ Ačkoli samotné molekuly konají v daném, zafixovaném místě jen malý oscilační pohyb okolo rovnovážné polohy, samotný oscilační rozruch, zahrnující kromě změny polohy molekul také malou změnu rychlosti, hustoty a tlaku, se šíří *fázovou rychlostí* c závisující na mechanických vlastnostech tkáně – takový pohyb nazýváme vlnovým. Kinematicky je vlnový pohyb popsán *frekvencí* f (počet cyklů detekovaných pozorovatelem na fixním místě za jednu sekundu), případně periodou $T = 1/f$, vlnovou délkou

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (5.1)$$

a amplitudou A . Názorná představa podélné zvukové vlny je znázorněna na obrázku 5.2. Rychlosti šíření pro některá medicínsky důležitá prostředí jsou uvedeny v tabulce 5.1.

Prostředí, v němž se vlna šíří, není bezztrátové; energie nesená vlnou je disipována na teplo a intenzita, amplituda a další veličiny spojené s energií vlny (tlakové a hustotní změny, oscilační rychlost) klesají. Obrázek 5.2 zobrazuje rovinnou vlnu, jejíž plochy konstantní amplitudy (vlnoplochy) jsou roviny kolmé na směr šíření; v případě sférické vlny šířící se z určitého bodu mají vlnoplochy sférický tvar a jejich povrch se zvětšuje s druhou mocninou vzdálenosti. Intenzita vlny proto v důsledku zákona zachování energie musí klesat jako převrácená hodnota kvadrátu vzdálenosti, amplituda a akustický tlak musí klesat nepřímo úměrně vzdálenosti (viz dále).

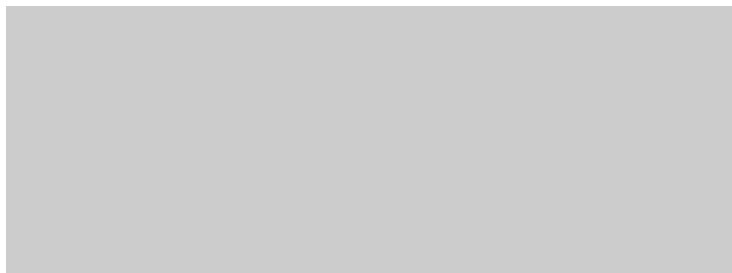
Libovolný průběh akustické výchylky lze lineárně rozložit pomocí *Fourierovy transformace* do harmonických složek popsanych funkcemi sinus a

³ Molekuly kmitají podél směru šíření, odtud název podélné vlnění.

Tabulka 5.1. Rychlost šíření zvuku, hustota hmotnosti, akustická impedance a absorpce pro některá medicínsky důležitá prostředí. Hodnoty jsou pouze orientační a platí pro teplotu lidského organismu. Zpracováno podle [64].

<i>Prostředí</i>	<i>Rychl. zvuku</i> c [m s ⁻¹]	<i>Hustota</i> ρ [kg m ⁻³]	<i>Akustická impedance</i> Z [10 ⁶ kg m ⁻² s ⁻¹]	<i>Absorpce</i> (1 MHz) α [dB cm ⁻¹]
Vzduch	330	1.3	0.00043	–
Tuk	1470	970	1.42	0.6
Ricin. olej	1500	933	1.40	–
Voda	1492	1000	1.48	–
Měkká tkáň	1500	< 1000	~ 1.45	1.0
Mozek	1530	1020	1.56	0.85
Krev	1570	1020	1.60	0.18
Ledviny	1561	1030	1.61	–
Játra	1549	1060	1.64	0.9
Svaly	1568	1040	1.63	1.2 (3.3)*
Oční čočka	1620	1130	1.83	2.0
Kost	4080	1700	6.12	20.0

*Podél (napříč) svalových vláken.



Obrázek 5.2. Místa zhuštění a zředění (a jim odpovídající malé změny výchylek a rychlostí molekul ve směru šíření) se šíří zleva doprava (nebo obráceně) fázovou rychlostí c jako podélná vlna. Ačkoli samy molekuly prostředí konají pouze malý oscilační pohyb okolo rovnovážné polohy, vlna sama přenáší energii a hybnost. Levý (pravý) panel reprezentuje vlnu s vysokou (nízkou) amplitudou a intenzitou. Převzato z [64].

kosinus; stačí proto zabývat se vlnou s harmonickým průběhem šířící se ve směru osy x

$$u(x, t) = u_{\max} \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (5.2)$$

kde $u_{\max}$ je amplituda výchylky z rovnovážné polohy. Okamžitá *akustická rychlost* kmitající částice prostředí podléhá zákonitosti podobné (5.2), ov-

šem s amplitudou rychlosti $v_{\max}$, pro niž derivací (5.2) podle času dostaneme

$$v_{\max} = 2\pi f u_{\max} . \quad (5.3)$$

Typická velikost je řádově několik desítek milimetrů za sekundu. Akustická vlna je provázena, kromě výchylek částic prostředí (5.2) a oscilací rychlosti s amplitudou (5.3), také oscilací tlaku kolem střední hodnoty s amplitudou [68]

$$p_{\max} = \rho c v_{\max} , \quad (5.4)$$

kde ρ je hustota hmotnosti a c rychlost zvuku v prostředí.⁴ Oscilační změny tlaku s amplitudou (5.4) nazýváme *akustickým tlakem*. Typická hodnota je několik setin MPa.

Okamžitá intenzita zvuku je zvuková energie prošlá za jednotku času jednotkovou plochou kolmou ke směru šíření ve fixním místě se souřadnicí x , $I(t) = \rho c v^2(t)$. Taková intenzita však není příliš užitečná; její hodnota kolísá mezi nulou a maximální hodnotou odpovídající kladným i záporným extrémům rychlosti $\pm v_{\max}$. Místo ní se zavádí intenzita I vystředovaná přes jednu periodu $T = 1/f$; protože střední hodnota z kvadrátu sinu či kosinu je rovna $1/2$, je taková vystředovaná intenzita rovna

$$I = \frac{1}{2} \rho c v_{\max}^2 = \frac{1}{2} p_{\max} v_{\max} . \quad (5.5)$$

Zavedeme-li *efektivní hodnoty* akustické rychlosti a tlaku

$$v_{\text{ef}} \equiv \frac{v_{\max}}{\sqrt{2}} , \quad p_{\text{ef}} \equiv \frac{p_{\max}}{\sqrt{2}} , \quad (5.6)$$

můžeme vztah pro střední intenzitu (5.5) napsat ve tvaru

$$I = \rho c v_{\text{ef}}^2 = \frac{p_{\text{ef}}^2}{\rho c} = p_{\text{ef}} v_{\text{ef}} . \quad (5.7)$$

Jednotkou intenzity je v soustavě SI W m^{-2} , avšak praktickou jednotkou pro ultrazvukovou sonografii je mW mm^{-2} . Typické intenzity pro medicínský ultrazvuk jsou mezi 0.01 mW mm^{-2} a 1 mW mm^{-2} [64]. Akustická intenzita není na průřezu ultrazvukovým polem konstantní, nýbrž má maximum

⁴ Ve skutečnosti ve vlně osciluje také tlak s amplitudou $\rho_{\max} \ll \rho$ okolo rovnovážné hodnoty ρ . Součin amplitud $\rho_{\max} v_{\max}$ je malá veličina druhého řádu, kterou zanedbáme vzhledem k veličině prvního řádu $\rho v_{\max}$.

Tabulka 5.2. Tabulka často užívaných přibližných hodnot decibelů. Například změna o +3 dB znamená násobení faktorem ~ 2 , změna o -3 dB znamená násobení faktorem $\sim 1/2$. Jiné hodnoty než jsou uvedeny v tabulce vhodně rozložíme, např. změna o 15 dB rozložíme do změn o 10 dB a 5 dB a vynásobíme odpovídající faktory $10 \times 3 = 30$.

dB	faktor	dB	faktor
± 3	2	± 7	5
± 5	3	± 9	8
± 6	4	± 10	10

uprostřed (SP = spatial peak) a průměrnou intenzitu označovanou jako SA = spatial average intensity.

Pro porovnání dvou intenzit I_1, I_2 se obvykle používá logaritmické škály v *decibelech* definované pomocí dekadických logaritmů jako

$$L = 10 \log \frac{I_2}{I_1}. \quad (5.8)$$

Označuje-li například I_2 intenzitu odražené vlny rovnou 0.0001 násobku intenzity dopadající vlny I_1 , je $L = -40$ dB. *Polotloušťka* materiálu je tloušťka, na které intenzita klesne na polovinu; a protože $\log 0.5 \approx 0.3$, říkáme, že klesne o 3 dB. Další užitečné hodnoty pro logaritmickou míru v dB jsou v tabulce 5.2.

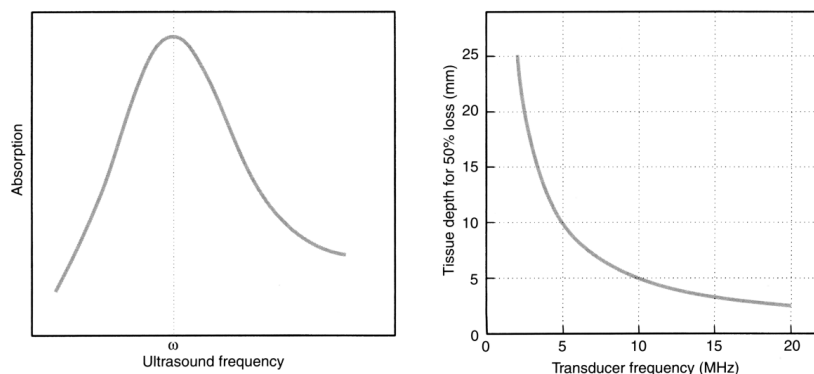
Na *útlumu ultrazvuku* se podílejí dva procesy: *absorpce* v tkáni, jež tvoří hlavní mechanismus (80 %), a *divergence ultrazvukového pole* způsobená odrazem a rozptylem. Frekvenční závislost absorpce je dána viskozitou média, relaxačním časem a frekvencí ultrazvuku, a má typickou závislost znázorněnou na obrázku 5.3 vlevo. Závislost intenzity na dráze s uražené v homogenní tkáni je analogická exponenciálnímu zákonu pro X-záření

$$I(s) = I_0 e^{-\beta s}, \quad (5.9)$$

kde I_0 je počáteční intenzita ($s = 0$), β je *absorpční koeficient*. Místo absorpčního koeficientu β se často udává *koeficient zeslabení* α definovaný jako

$$\alpha = 10 \log \left. \frac{I_0}{I(s)} \right|_{s=1 \text{ cm}}, \quad (5.10)$$

a udávaný v dB cm⁻¹. Absorpční koeficient β a koeficient zeslabení α jsou frekvenčně závislé; pro některá běžná medicínská prostředí při frekvenci



Obrázek 5.3. Vlevo: Frekvenční závislost absorpce ultrazvuku pro tkáň s relaxační frekvencí ω . Vpravo: Závislost polotloušťky tkáně způsobující 50 % ztrátu intenzity na frekvenci pro typickou hodnotu $\alpha/f \sim 1 \text{ dB cm}^{-1} \text{ MHz}^{-1}$. Převzato z [64].

1 MHz jsou uvedeny v tabulce 5.1. Důležitým experimentálním faktem je, že mezi koeficientem absorpce α a frekvencí je v medicínsky relevantním rozsahu ultrazvukových frekvencí přibližně lineární závislost; jinými slovy poměr α/f je ve frekvenčním rozsahu 2.5–40 MHz přibližně konstantní. Jednotlivé tkáně jsou proto charakterizovány hodnotou poměru α/f udávaného v $\text{dB cm}^{-1} \text{ MHz}^{-1}$, jejíž typická hodnota pro měkké tkáně je zhruba $\sim 1 \text{ dB cm}^{-1} \text{ MHz}^{-1}$ (viz obrázek 5.3 vpravo).

Je-li útlum ultrazvuku v tkáni pro zobrazování nežádoucí jev, pak odraz (reflexe) je naopak jev, jenž je podstatou ultrazvukového zobrazování. V akustice se pro popis reflexe používá *akustické impedance* Z , veličiny definované jako

$$Z = \frac{p_{\text{ef}}}{v_{\text{ef}}} = \rho c = \sqrt{K\rho}, \quad (5.11)$$

kde K je modul pružnosti prostředí [68]. Je zkonstruována z akustického tlaku a akustické rychlosti analogickým způsobem jako elektrický odpor z napětí a proudu v Ohmově zákonu. Typické hodnoty pro některé medicínsky relevantní tkáně jsou v tabulce 5.1. Akustická impedance hraje důležitou roli při popisu chování ultrazvuku na rozhraní dvou různých tkání.

Rozlišujeme *zrcadlový odraz* na hladkém rozhraní⁵ mezi dvěma tkáněmi s různou akustickou impedancí. Pro kolmý dopad je zrcadlový odraz znázor-

⁵ Hladkým rozhraním rozumíme rozhraní, jehož nepravidelnosti jsou velmi malé ve srovnání s vlnovou délkou λ ultrazvukového svazku; např. pro frekvenci 2 MHz je v měkké tkáni $\lambda = 0.75 \text{ mm}$.



Obrázek 5.4. *Vlevo:* Odraz ultrazvukového svazku dopadajícího kolmo na hladké rozhraní mezi dvěma tkáněmi o akustických impedancích Z_1 a Z_2 . Intenzita dopadajícího svazku I_i se rozdělí mezi prošlý svazek I_t a odražený svazek I_r . Rozdělení intenzit závisí na akustických impedancích tkání Z_1 a Z_2 podle vztahů (5.12) a (5.13). *Vpravo:* Při dopadu pod nenulovým úhlem θ_i dochází ke změně směru šíření prošlého svazku. Pro úhly lomu θ_t a odrazu θ_r platí analogické zákony jako v optice, zákon odrazu (5.14) a zákon lomu (5.15). Převzato z [64].

něn na obrázku 5.4 vlevo. Vztah pro *reflexivitu* a *transmisivitu* lze pomocí akustické impedance psát ve tvaru (viz obrázek 5.4 pro význam veličin)

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2, \quad (5.12)$$

$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (5.13)$$

Snadno se ověří, že $R + T = 1$, jak vyžaduje splnění zákona zachování energie. Při průchodu rozhraním vzduch-tuk s podstatně odlišnými akustickými impedancemi se podle údajů v tabulce 5.1 a vztahů (5.12) a (5.13) odrazí $R = 99.9\%$ intenzity (jedná se o *echogenní strukturu*), zatímco při průchodu rozhraním játra-ledviny s velmi podobnými akustickými impedancemi se odrazí pouze $R = 0.0085\%$ intenzity a $T = 99.9915\%$ intenzity prochází.

Při průchodu rozhraním s nepravidelnostmi nebo strukturou o velikosti srovnatelné s vlnovou délkou ultrazvuku, nebo při průchodu granulózním prostředím (krevní částice), dochází k *difrakčnímu jevu – rozptylu*. Rozptýlené ultrazvukové vlnění formuje kužel, jehož vrcholový úhel závisí nepřímo úměrně na vlnové délce λ a přímo úměrně na charakteristické velikostní

škále nepravidelností rozhraní. Rozptyl se také zvětšuje s rostoucím úhlem dopadu a jeho intenzita je úměrná f^4 . Rozptyl nemusí být nutně jen parazitním jevem; charakteristické interferenční obrazce nazývané *speckle* totiž svým tvarem odpovídají určité morfologii rozhraní a mohou tak detekovat patologii projevující se právě změnou morfologie rozhraní – příkladem je diagnostika onemocnění jater. Difrakce se také projevuje obrazovými artefakty velikosti řádově vlnové délky použitého ultrazvuku při průchodu svazku kolem náhlých akustických stínění jako například kosti.

Kromě kolmého odrazu se při průchodu rozhraním pod nenulovým úhlem dopadu θ_i uplatňují zákony analogické zákonům geometrické optiky (viz obrázek 5.4 vpravo), konkrétně známý *zákon odrazu*

$$\theta_r = \theta_i \quad (5.14)$$

a *Snellův zákon lomu*

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_t}{v_t}, \quad (5.15)$$

kde v_i (v_t) je fázová rychlost ultrazvuku v prostředí dopadajícího (prošlého) svazku.

5.1.2. Ultrazvuková sonda

Ultrazvuková sonda (též ultrazvukový transducer) přeměňuje energii elektrických pulsů přiváděných z generátoru do sondy na energii ultrazvukových vln vysílaných do vyšetřovaného objektu, a opačně, dokáže přeměňovat energii ultrazvukových odrazů přicházejících z nitra vyšetřovaného objektu na dále zpracovatelný elektrický signál. Je obvykle založena na *piezoelektrickém jevu*, jenž umožňuje uvedený „oboustranný“ převod. Základní konstrukční schéma piezoelektrické ultrazvukové sondy je na obrázku 5.5.

Ultrazvukové pulsy vytvářené sondou jsou velmi krátké – obvykle obsahují jen dvě až tři vlny. Typický tvar pulsu je na obrázku 5.6. Z teorie Fourierovy transformace plyne, že čím více zkrátíme trvání pulsu (PD), tím je spektrum širší. Záleží také na obálce (tvaru) pulsu – tvar by se měl alespoň přibližovat Gaussově křivce, aby byly potlačeny oscilační laloky vzdálené od základní frekvence. Opakovací frekvence pulsů (PRP) je řádově tisíc krát větší než trvání pulsu (PD), protože po vyslání každého pulsu se sonda přepne do „naslouchacího“ režimu, v němž registruje ultrazvuková echa přicházející z nitra vyšetřovaného pacienta, než opět vyšle krátký puls.



Obrázek 5.5. Schéma konstrukce ultrazvukové sondy. *Nahoře:* Základem je piezoelektrický krystal (obvykle PbZrTiO_4) o tloušťce optimálně $\lambda/2$, pokrytý přizpůsobovací vrstvou (Matching plastic layer). Pro optimální přenos ultrazvuku z piezokrystalu by akustická impedance Z_M této vrstvy měla být geometrickým průměrem $Z_M = \sqrt{Z_T Z_L}$ akustické impedance piezokrystalu Z_T a tkáně Z_L , a její tloušťka by měla být rovna čtvrtině vlnové délky. Za piezokrystalem se nachází tlumicí blok (Backing block) z jemných wolframových částíček suspendovaných v epoxidové pryskyřici (wolframové částičky rozptylují ultrazvuk, jenž je pak v pryskyřici pohlcován). *Dole:* Mezi sondu a pokožku či jiný povrch vyšetřovaného pacienta se nanáší tenká vrstva kontaktního gelu. Převzato z [64].



Obrázek 5.6. Geometrie ultrazvukových pulsů. *Vlevo:* Ultrazvukový puls obsahující tři cykly o vlnové délce λ s vhodně tvarovanou obálkou. Zkratka SPL značí *Spatial Pulse Length* (prostorovou délku pulsu), typická hodnota je 0.45 mm až 2.25 mm. *Vpravo:* Podobně PD značí *Pulse Duration* neboli trvání pulsu, které bývá v rozmezí $0.5 \mu\text{s}$ až $3 \mu\text{s}$, PRP značí *Pulse Repetition Period* neboli opakovací periodu pulsů, která bývá v řádu ms, případně $\text{PRF} = 1/\text{PRP}$ *Pulse Repetition Frequency* značí opakovací frekvenci pulsů. Převzato z [64].

Tento cyklus se neustále opakuje. Vzhledem k proporcím mezi PD a PRP je sonda zhruba 99.9 % času v naslouchacím režimu.

Opakovací frekvence PRF jednoduše souvisí s maximální hloubkou obrazu D : čas potřebný na proniknutí ultrazvuku do hloubky D a na návrat

zpět do sondy je $2D/c$. Aby sonda byla ještě schopna detekovat příslušnost echa k vyslanému pulsu, musí být opakovací perioda PRP delší než $2D/c$. Z této úvahy dostáváme

$$\text{PRF} < \frac{c}{2D}. \quad (5.16)$$

Pro hloubku penetrace 150 mm a $c \approx 1500 \text{ m s}^{-1}$ máme $\text{PRF} \approx 5 \text{ kHz}$. Typické hodnoty pro ultrazvukovou sonografii jsou $\text{PRF} \approx 2\text{--}10 \text{ kHz}$. Opakovací frekvence musí být adekvátní hloubce obrazu, příliš krátká PRP může způsobit detekci echa z předchozích pulsů a působit falešná zobrazení.

Frekvenční spektrum ultrazvukových pulsů má tvar Gaussovy křivky; faktor kvality piezokrystalu Q je dán poměrem rezonanční frekvence f_R , na níž má tato křivka maximum, a šířky křivky Δf (rozdílu frekvencí, pro něž spektrální křivka poklesne na $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ maxima f_R , viz obrázek 5.7 vlevo):

$$Q = \frac{f_R}{\Delta f}. \quad (5.17)$$

Sondy s nižším Q (tj. širším spektrem a krátkými pulsy) se používají pro ultrazvukové zobrazování, kde potřebujeme pro dobré rozlišení co nejkratší SPL pro co nejvyšší *axiální rozlišovací schopnost* (ta se obvykle definuje jako $\text{SPL}/2$, je tedy typicky 0.2 mm až 1.2 mm) a nezáleží příliš na přesné frekvenci. Naopak sondy s vyšším Q se používají v dopplerovské sonografii (viz níže), kde záleží na přesné frekvenci a délka trvání pulsu může být velká (nebo kontinuální).

Tvar akustické apertury (profil ultrazvukového pole) je vhodné upravit tak, aby víceméně kopíroval Gaussovu křivku. Při obdélníkovém profilu bychom totiž dostali, jak už to u zdrojů vlnění bývá, kromě hlavního laloku navíc *postranní laloky*, které by způsobovaly degradaci kontrastu a rozlišení. Přizpůsobení akustické apertury se nazývá *apodizace* a její výsledek je na obrázku 5.7 vpravo. Apodizace se dosahuje tvarovanými akustickými čočkami a dynamickou fokusací (viz níže a obrázek 5.9).

Na závěr si všimneme chování ultrazvukového pole podél směru šíření, jež má vliv na *stranovou (laterální) rozlišovací schopnost*. Pole lze rozdělit do dvou oblastí: na *blízkou (Fresnelovu) zónu* a na *vzdálenou (Fraunhoferovu) zónu* (viz obrázek 5.8). Zatímco ve Fresnelově zóně o délce

$$\ell_{\text{near}} = \frac{a^2}{\lambda}, \quad (5.18)$$



Obrázek 5.7. *Vlevo:* Rozdíl Δf frekvencí, pro něž spektrální křivka poklesne na $1/\sqrt{2} f_R \approx 0.707 f_R$. Spektrum sondy s vysokým Q (malým $\Delta f = B$) je vyznačeno černě, spektrum sondy s nízkým Q (vysokým $\Delta f = A$) je vyznačeno šedě. *Vpravo:* Potlačení postranních laloků pomocí apodizace. Převzato z [64].



Obrázek 5.8. Ilustrace změny Fresnelovy a Fraunhoferovy zóny v závislosti na rozměru ultrazvuk produkujícího elementu sondy a na frekvenci. Převzato z [64].



Obrázek 5.9. Vliv fokusace sondy na tvar ultrazvukového pole. Zleva doprava: plochá sonda, slabě fokusovaná ($\ell_{\text{near}}/R < 2$) a silně fokusovaná ($\ell_{\text{near}}/R \approx 3-4$). Veličina α na obrázku odpovídá poloměru sondy a . Převzato z [64].

kde a je poloměr sondy, zachovává pole šířku sondy, ve vzdálené zóně se stává divergentním s úhlem divergence

$$\theta_d = \arcsin \left(\frac{0.61\lambda}{a} \right). \quad (5.19)$$

Pro lepší laterální rozlišení ve velkých hloubkách potřebujeme širší sondu a vysokou frekvenci, aby blízká zóna byla co nejdelší. V praxi je však nutné volit kompromisní hodnoty a přihlížet k dalším aspektům šíření ultrazvuku v tkáni, zejména k faktu, že s rostoucí frekvencí roste útlum. Například v oftalmologii stačí jen velmi mělká hloubka a sonda má rovněž malý rozměr, takže se používá ve srovnání s ostatními aplikacemi ultrazvukového zobrazování vyšších frekvencí.

Laterální rozlišení lze ovlivnit vhodným tvarováním (fokusací) sondy, jak je vidět z obrázku 5.9.

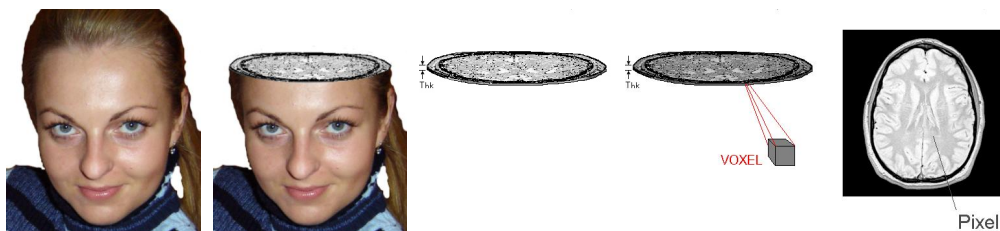
5.2. Nukleární magnetická rezonance (NMR/MRI)

Nukleární magnetická rezonance (NMR) je fyzikálně-chemická metoda založená na analýze magnetických momentů atomových jader. Tato původně analytická metoda objevená F. BLOCHEM a E. PURCELLEM v roce 1946 byla pod názvem MRI (Magnetic Resonance Imaging) rozvinuta jako zobrazovací technika používaná k tomografickému zobrazování vnitřních orgánů lidského těla. Obrazy vznikají na základě odezvy dočasných změn magnetických poměrů v tkáních. Hned zkrájeme poznamenejme, že v metodě MRI nefiguruje ionizující záření jako v klasické či digitální rentgenologii nebo v počítačové tomografii; využívá se radiofrekvenčního elektromagnetického záření. Při zpracování této sekce byly převážně využity zdroje [64, 69–72].

5.2.1. Stručný nástin principu MRI

Atomové jádro se skládá z protonů a neutronů, jež souhrnně nazýváme nukleony. Každý nukleon má vlastní moment hybnosti – spin. V jádrech s lichým počtem nukleonů se spiny jednotlivých nukleonů nekompenzují a určitý spin nese celé jádro. Pro lékařské účely je důležité především jádro vodíku, tedy proton.⁶ Spin je kvantovaná veličina, může být vzhledem k určitému směru kvantování orientována buď „paralelně“ nebo „antiparalelně“.

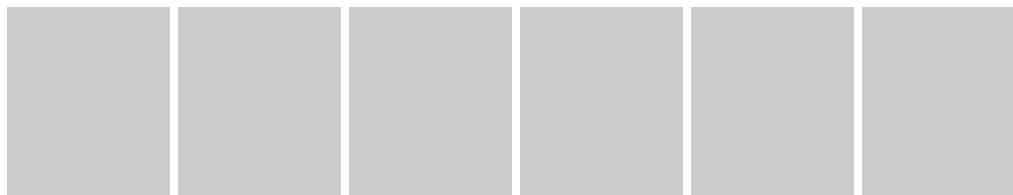
⁶ Z toho důvodu se MRI užíval i název *vodíkové topografické zobrazení* [70].



Obrázek 5.10. Silné magnetické pole používané k MRI zobrazování má *lineární gradient*, tj. mění se rovnoměrně v určitém směru (na obrázku ve směru rovnoběžném se hřbetem vazby). K rezonanci dochází pro frekvenci odpovídající vybranému typu jader jen při určité intenzitě magnetického pole, jež leží v tenké rovině (řezu) o tloušťce Thk kolmé ke směru gradientu. Pomocí gradientu magnetického pole se tak dá vybírat řez pacientem, aniž by bylo nutné s pacientem fyzicky manipulovat. Zobrazovaná vrstva je složena z objemových *voxelů* (trojrozměrný analogon pixelu, obvyklý objem voxelu je $\sim 3 \text{ mm}^3$). Zcela vpravo je dvourozměrné zobrazení vybraného řezu adresovaného odpovídajícím gradientem magnetického pole. Upraveno podle [69].

Mějme soubor jader vodíku. Pokud nejsou vložena do vnějšího magnetického pole, bude polovina protonů orientovaná nahoru a polovina dolů a jejich energie bude stejná. Přiložíme-li vnější magnetické pole, bude energie „elementárních magnetů“, jaké protony představují, různá pro protony orientované ve směru a proti směru pole. Dopadne-li nyní na tento vzorek vysokofrekvenční elektromagnetické záření obsahující fotony s energií rovné rozdílu potenciální energie protonů s antiparalelní a paralelní orientací, dojde k rezonančnímu jevu: foton může být absorbován a jeho energie excituje proton v nižším energetickém stavu do vyššího energetického stavu. Pokud záření dále nepůsobí, dojde k relaxaci, proton se opět „přepne“ do nižšího energetického stavu a přitom se uvolní foton. Při rezonanční frekvenci dochází ke zvýšené absorpci elektromagnetického vlnění v látce, která je registrována prostřednictvím fotonů uvolňovaných při relaxaci.

V praktické aplikaci se vzorek umístí do silného magnetického pole, které způsobí částečnou polarizaci protonů. Rezonanční frekvence závisí na intenzitě magnetického pole. Jeli vzorek umístěn do nehomogenního pole, tedy pole, které má určitý gradient, k rezonanci dochází v různých místech při různých frekvencích, čímž je možno hledanou strukturu lokalizovat (viz obrázek 5.10). Prakticky všechny tkáně obsahují značné množství vody, tedy vodíkových jader (viz obrázek 5.11). Rozložení molekul vody v příslušné tkáni tedy může být zobrazeno popsáním způsobem. Pro použitelnost metody je podstatné, že pomocí gradientu magnetického pole je možno přesně



Obrázek 5.11. Lidské tělo obsahuje mnoho vody a lipidů. Voda i lipidy obsahují mnoho vodíkových atomů (v 1 cm^3 vody je řádově 10^{22} vodíkových atomů), takže lidské tělo obsahuje asi 63 % vodíku. Protože vodíkové atomy jsou schopné dávat NMR signál, používá se pro zobrazování právě jich. Každý voxel obsahuje jednu nebo více tkání se specifickým zastoupením vodíku (zcela vlevo). Zoom voxelu odhalí buňky (druhý panel zleva). Uvnitř každé buňky jsou vodní molekuly (třetí a čtvrtý panel zleva). Každá molekula vody obsahuje jeden kyslíkový a dva vodíkové atomy (druhý panel zprava). Jádro vodíkového atomu je tvořeno protonem – miniaturním „magnetem“, jenž se využívá v metodě NMR, potažmo k medicínskému zobrazování. Právě různý obsah vodíkových atomů a různý chemismus obklopujícího prostředí v různých tkáních umožňuje jejich rozlišení. Převzato z [69].

lokalizovat polohu zdroje relaxačního signálu. V praktickém provedení je samozřejmě tento signál dále zesilován a zpravidla analyzován pomocí Fourierovy transformace. Vhodným měněním gradientu přiloženého magnetického pole je možné získávat tomografický obraz.

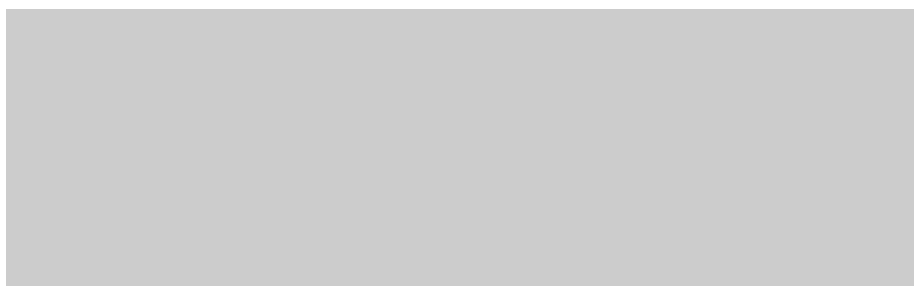
5.2.2. Fyzika jaderného spinu

Jak již bylo výše řečeno, každý nukleon (proton nebo neutron), z nichž se skládají atomová jádra, má *spin*.⁷ Se spinem je svázán i vlastní (spinový) *magnetický moment*. Spin a magnetický moment mají však pouze atomová jádra s lichým nukleonovým číslem A , neboť spiny a magnetické momenty spárovaných protonů a neutronů se vzájemně ruší. Magnetický moment jádra vytváří nespárovaný nukleon. Magnetickou rezonanci lze tedy pozorovat jen u jader s lichým nukleonovým číslem. Pro potřeby medicínského zobrazování je ještě zapotřebí tuto podmínku doplnit o podmínku dostatečného zastoupení v tkáních. Zdaleka největší význam má vodík ^1H , jehož průměrné zastoupení v tkáních je kolem 63 %. Další atomy, jejichž jádra přicházejí pro medicínské zobrazování v úvahu, jsou například izotop uhlíku ^{13}C , fosfor ^{31}P , izotop dusíku ^{15}N , fluor ^{19}F a sodík ^{23}Na (viz tabulka 5.3).

⁷ Spin je kvantovaná veličina a u fermionů, mezi něž proton a neutron patří, nabývá poločíselného násobku redukované Planckovy konstanty $\hbar$. Proton i neutron mají v jednotkách $\hbar$ spin $1/2$.

Tabulka 5.3. Parametry izotopů pro medicínské zobrazování. Podle [64, 69].

Izotop	Gyromagnetický poměr γ [MHz T ⁻¹]	Abundance [%]	Relativní inten- zita na proton
¹ H (proton)	42.58	99.98	1.0000
¹⁹ F	40.05	100	0.8300
²³ Na	11.26	100	0.0930
³¹ P	17.24	100	0.0660
¹⁷ O	5.77	0.037	0.0290
¹³ C	10.71	1.11	0.0160
¹⁵ N	4.30	0.37	0.0010



Obrázek 5.12. Názorná (i když z hlediska kvantové mechaniky nepřesná) představa chování jaderných spinů ve vnějším magnetickém poli. *Vlevo:* Spiny jsou bez vnějšího magnetického pole orientovány chaoticky a jejich celkový magnetický moment je nulový. *Uprostřed:* Zapneme-li vnější magnetické pole, např. vpuštěním elektrického proudu do cívky obklopující vzorek tkáně, budou se jaderné spiny snažit „srovnávat“ souhlasně s magnetickým polem a začnou vytvářet makroskopický magnetický moment – tkáň je „zmagnetovaná“. *Vpravo:* Aplikací elektromagnetického záření o Larmorově frekvenci (5.20) dochází k rezonanci a jaderné spiny s nižší energií jsou excitovány do vyšší energetické hladiny, což ovlivňuje hodnotu celkové makroskopické magnetizace. Převzato z [70].



Obrázek 5.13. Ke spin-mřížkové a spin-spinové relaxaci. *Vlevo:* V rovnováze leží vektor magnetizace M_0 podél vektoru vnějšího magnetického pole B_0 . *Uprostřed:* T_1 je čas, za který se podélná magnetizace vrátí z nulové hodnoty na $1 - e^{-1} \approx 63\%$ rovnovážné hodnoty M_0 . *Vpravo:* T_2 je čas, za který příčná magnetizace klesne z vychýlené hodnoty $M_{\perp 0}$ na $e^{-1} \approx 37\%$ této hodnoty. Převzato z [69].

Bez vnějšího magnetického pole bude polovina protonů orientována jedním směrem a polovina opačným, takže v makroskopickém měřítku se jejich magnetické momenty vyruší a makroskopický magnetický moment tkáně bude nulový. Zapneme-li vnější magnetické pole o indukci řádově několik Tesla,⁸ každý spin se srovná do směru pole v jedné ze dvou možných orientací, paralelní s nižší energií nebo antiparalelní s vyšší energií. Tkáň rychle přejde do rovnovážného stavu, v němž počet jader N^+ orientovaných paralelně (s nižší energií) bude mírně převyšovat počet jader N^- orientovaných antiparalelně.⁹ Součet jaderných spinů v určité oblasti se stejnou hodnotou vnějšího magnetického pole B_0 bude nenulový a bude vytvářet makroskopickou *magnetizaci* tkáně M_0 . Velikost této magnetizace bude úměrná rozdílu $N^+ - N^-$. Tento proces „zmagnetování“ tkáně je názorně ilustrován na obrázku 5.12 vlevo a uprostřed. Proces nastavení tepelné rovnováhy mezi spinovým systémem a zcela obecným okolím označovaným jako *mřížka* (i v případě kapalin) se nazývá *spin-mřížková* nebo také *podélná* relaxace.

Nyní pomocí další cívky napájené vysokofrekvenčním elektrickým signálem vyšleme do vzorku tkáně elektromagnetické záření obsahující fotony s takovou frekvencí f , aby se jejich energie E podle Planckova vztahu $E = hf$ (kde h je Planckova konstanta) rovnala rozdílu mezi energií antiparalelně a paralelně orientovaného spinu. Tehdy dochází k jevu *jaderné magnetické rezonance*: foton může být absorbován a jeho energie excituje proton z nižšího (paralelního) do vyššího (antiparalelního) energetického stavu. Frekvence f splňující rezonanční podmínku se nazývá *Larmorovou frekvencí* a s indukcí vnějšího magnetického pole B_0 souvisí vztahem

$$f = \gamma B_0, \quad (5.20)$$

kde $\gamma = 42.58 \text{ MHz T}^{-1}$ se nazývá *gyromagnetický poměr* protonu. Další prvky, resp. jejich izotopy použitelné pro potřeby medicínského zobrazování, shrnuje tabulka 5.3.

⁸ To je velmi silné magnetické pole, řádově $10^4 \times$ silnější než přirozené geomagnetické pole Země. Pro vytvoření takto silných magnetických polí se obvykle používají supravodivé cívky využívající chlazení kapalným héliem.

⁹ Statistická fyzika umožňuje spočítat jejich poměr, $N^+/N^- = e^{\Delta E/kT} > 1$, kde $\Delta E = h\gamma B_0$ je rozdíl energie antiparalelně a paralelně orientovaných spinů, k je Boltzmannova konstanta a T je absolutní teplota. Nadbytek paralelně orientovaných spinů je malý; rozdíl $N^+ - N^-$ je při běžné teplotě lidského těla a magnetické indukci 1 T veličina řádu 10^{16} spinů na 1 cm^3 látky, dostačuje však k vytvoření měřitelné makroskopické magnetizace.

Je zřejmé, že popsaná excitace jaderných spinů v režimu rezonance ovlivní rovnovážnou magnetizaci tkáně M_0 . V rovnováze leží vektor magnetizace M_0 podél vektoru vnějšího magnetického pole B_0 a je proto nazýván rovnovážnou magnetizací (obrázek 5.13 vlevo). Položíme-li osu z kartézského souřadnicového systému do tohoto směru, pak v rovnováze je podélná komponenta magnetizace $M_z = M_0$ a příčná složka $M_\perp$ sestávající z komponent do os x, y kolmých k ose z je rovna nule, $M_\perp = M_x = M_y = 0$. Dodáváme-li larmorovské elektromagnetické záření, jež excituje jaderné spiny, ve formě vhodně dlouhého a tvarovaného pulsu¹⁰ můžeme dosáhnout anulování podélné magnetizace, tj. $M_z = 0$. Po odeznění RF pulsu se ovšem jaderné spiny vracejí zpět do původní rovnováhy – říkáme, že *relaxují* – a časový vývoj podélné magnetizace se chová podle rovnice

$$M_z(t) = M_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad (5.21)$$

kde T_1 se nazývá *spin-mřížkový relaxační čas*. Jeho hodnota charakterizuje rychlost návratu magnetizace zpět do rovnovážné hodnoty. Tento jev se nazývá T_1 -proces.

Místo RF pulsu larmorovského elektromagnetického záření, jenž anuluje podélnou magnetizaci, můžeme použít delšího pulsu, jenž dokonce obrátí magnetizaci do opačného směru, na $M_z = -M_0$, takže relaxace bude delší, ale charakteristický čas T_1 bude stejný,

$$M_z(t) = M_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}} \right). \quad (5.22)$$

Podélnou relaxaci ilustruje obrázek 5.13 uprostřed.

Aplikujeme-li naopak kratší RF puls, jenž „sklopí“ magnetizaci jen do roviny xy , bude vektor magnetizace konat precesi okolo osy z s Larmorovou frekvencí. Jelikož pole B_0 nemůže být zcela exaktně homogenní, budou se v různých místech velmi mírně lišit i odpovídající Larmorova frekvence (5.20). Následkem toho dojde k rozfázování jednotlivých objemových

¹⁰ Nazývaného též RF puls, radiofrekvenční puls, jehož základní frekvence je např. pro magnetické pole $B_0 = 1 \text{ T}$ rovna 42.58 MHz, pro magnetické pole $B_0 = 1.5 \text{ T}$ rovna 63.87 MHz, podle vztahu (5.20).

elementů vytvářejících příčnou komponentu $M_{\perp}$,¹¹ a postupnému zmenšování příčné komponenty podle rovnice

$$M_{\perp}(t) = M_{\perp 0} e^{-\frac{t}{T_2}}, \quad (5.23)$$

kde $M_{\perp 0}$ je počáteční hodnota příčné magnetizace a T_2 je *spin-spinový relaxační čas*, jenž je vždy menší nebo rovný T_1 , tj. příčná relaxace je rychlejší než podélná. Tento jev se nazývá *T_2 -proces* a jeho časový průběh je ilustrován na obrázku 5.13 vpravo. Vztahy (5.21) až (5.23) se dají odvodit řešením *Blochových rovnic* [69].

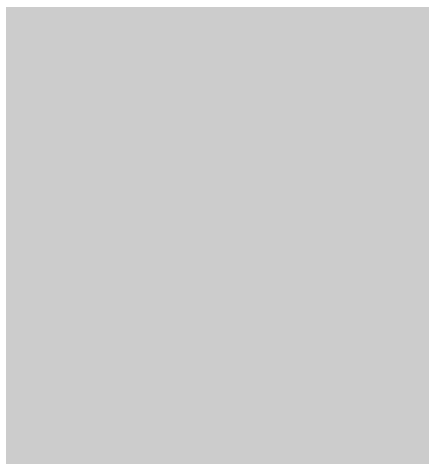
Podrobný popis mechanismu „sklápění“ magnetizace pomocí radiofrekvenčních pulsů poněkud vybočuje z rámce této práce. Uvedme pouze, že jej lze vysvětlit zavedením soustavy souřadnic $x'y'z'$ rotující kolem osy $z' \equiv z$, jež je společná s „laboratorní“ soustavou souřadnic xyz , larmorovskou úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi f$ [73]. Na tomto místě doporučujeme navštívit stránku [69], kde jsou velmi názorné animace ilustrující relaxaci jaderných spinů, včetně popisu mechanismu „sklápění“ magnetizace.

Ve skutečnosti jsou oba procesy spojené a probíhají současně. Úhel otočení vektoru magnetizace je úměrný energii RF pulsu. RF puls, jenž „sklopí“ magnetizaci do roviny xy , se nazývá (ze zřejmých důvodů) 90° -puls, a puls, jenž otočí magnetizaci do opačného směru, se nazývá 180° -puls. Po odeznění pulsu, jenž provedl otočení nebo sklopení magnetizace, dochází k relaxaci zahrnující T_1 -proces i T_2 -proces. Nedojde-li po aplikaci RF pulsu k čerpání energie do spinů pomocí následného RF pulsu, nazýváme volnou relaxaci *FID (free induction decay)*.

Tvar RF pulsu je rovněž kritický a má vliv na přesnost výběru obrazového řezu. Nejčastěji se používá zvonovitě tvarovaný puls obsahující 3 až 4 vlnové délky λ odpovídající Larmorově frekvenci (5.20), nebo puls tvarovaný jako funkce sinc (sinus cardinalis). Takto tvarovaný RF puls má optimální vlastnosti ve frekvenční doméně. Tvar RF pulsu, jeho Fourierovo spektrum a FID jsou zobrazeny na obrázku 5.14.

Podstatné je, že relaxační časy T_1 a T_2 jsou výsledkem vzájemného působení rezonujících jader a jejich okolí a charakterizují chemické vlastnosti a strukturu vyšetřované tkáně. Relaxační doby jsou proto často výrazně od-

¹¹ Názorně si lze tento proces představit jako rozevírání vějíře. Jednotlivá pera vějíře představují příspěvky do magnetizace objemového elementu. Původně zcela složený vějíř odpovídá příčné magnetizaci $M_{\perp 0}$, po úplném rozevření do kruhu pak zcela relaxované, nulové příčné magnetizaci.



Obrázek 5.14. Tvar 90° RF pulsu, jeho PSD (výkonové Fourierovo spektrum) a volné doznívání příčné magnetizace (FID). Převzato z [64].

lišné pro různé typy tkáně a také pro zdravou a nádorovou tkáň. Relaxační časy pro různé typy tkání sumarizuje tabulka 5.4.

Při relaxaci dochází podle zákonů elektrodynamiky k emisi elektromagnetického záření, jehož intenzita závisí na koncentraci daného druhu rezonujících jader (v našem případě protonů), na chemických vlastnostech a struktuře tkáně. Jsou-li RF pulsy při FID opakovány s periodou T_R dostatečně velikou, aby bylo zachováno volné doznívání, je intenzita signálu emitovaného relaxujícími spiny úměrná jejich hustotě ρ a v čase doznívá jako $1 - e^{-T_R/T_1}$.

Tabulka 5.4. Relaxační doby T_1 , T_2 pro různé tkáně. Relaxační doba T_1 závisí na magnetické indukci B_0 zhruba jako $B_0^{0.3}$ a je zde zastoupena hodnotami pro tři typické používané intenzity 0.5 T, 1.0 T a 1.5 T. Podle [64].

Tkáň	T_1 [ms]			T_2 [ms]
	0.5 T	1.0 T	1.5 T	
Tuk	210	240	260	80
Játra	350	420	500	40
Ledviny	430	590	690	58
Svaly	550	730	870	45
Srdce	570	750	880	57
Bílá hmota mozk.	500	680	780	90
Šedá hmota mozk.	650	810	900	100
Mozkomíšní mok	1800	2160	2400	160



Obrázek 5.15. *Vlevo:* Spin-echo sekvence. Nejprve se aplikuje 90° puls, jímž se magnetizace sklopí do roviny xy , dochází k defázování a vysílání FID signálu. V okamžiku, kdy je „vějíř“ magnetizací rozevřen právě do půlkruhu, se aplikuje 180° puls, jímž se „vějíř“ překlápí okolo své hrany na opačnou stranu. Stejným mechanismem jako dochází k defázování, nastává nyní sfázování (skládání „vějíře“), jež vzápětí přejde opět k defázování (rozkládání „vějíře“), a k vyslání nejprve silícího a poté slábnoucího echa. Časová odlehlost FID signálu a echa se označuje T_E , a celý proces se opakuje s periodou T_R . *Vpravo:* Inversion recovery sekvence sestává z 180° pulsu, jenž otočí magnetizaci do opačného směru, následovaného sekvencí spin-echo. Perioda T_I mezi 180° pulsem a 90° pulsem se nazývá *inverzní čas*. Převzato z [64].

V praxi se používají pro zlepšení odstupu signálu od šumu jiné posloupnosti RF pulsů. Nejběžnější jsou *spin-echo* sekvence a *inversion recovery* sekvence, jež jsou vysvětleny na obrázku 5.15. Intenzity signálu relaxujících spinů doznívají jako $(1 - e^{-T_R/T_1})e^{-T_E/T_2}$ pro sekvenci spin-echo a $1 - 2e^{-T_I/T_1} + e^{-T_R/T_1}$ pro sekvenci inversion recovery. Významy časů T_E , T_I a T_R jsou vysvětleny v popisce obrázku 5.15.

Záření emitované relaxujícími spiny se zachycuje v přijímací cívce a analýzou získaného signálu lze rekonstruovat hustotu rezonujících spinů uvnitř tkáně. Jak se toho dosáhne je předmětem následující sekce.

5.2.3. Podstata MRI zobrazování

V medicínském MRI nás zajímá NMR hlavně signál z vody a lipidů, komponentami lidského těla obsahujícími nejvíce vodíku. Základním principem je rezonanční vztah (5.20). Pro názornost uvažujme na obrázku 5.16 znázorněnou lidskou hlavu obsahující tři oddělené malé oblasti s vysokou hustotou vodíkových atomů; jinde předpokládejme jejich výskyt nulový (ve skutečnosti je vodík obsažen s různou hustotou v celém těle).



Obrázek 5.16. Podstata frekvenčního kódování NMR signálu. *Vlevo:* Fiktivní hlava se třemi oblastmi vysoké hustoty vodíkových atomů. Hlava se nachází v homogenním magnetickém poli a ve všech třech oblastech je tedy stejná Larmorova frekvence. Frekvenční spektrum bude proto mít pík na jediné Larmorově frekvenci B_0/γ . *Vlevo:* Přiložíme-li gradient magnetického pole, některé (ne nutně všechny) oblasti vysoké hustoty vodíku se ocitnou v magnetickém poli s různou indukcí a jejich Larmorova frekvence se liší. Spektrum již má více píků, jejichž amplituda je úměrná počtu vodíkových atomů. Upraveno podle [69].

Pokud by naše fiktivní hlava byla vložena do homogenního magnetického pole B_0 , všechny tři oblasti by měly stejnou Larmorovu frekvenci a na NMR spektru získaném Fourierovou analýzou NMR signálu relaxujících spinů by se jejich rezonanční pík objevil při téže (Larmorově) frekvenci, jak je znázorněno na obrázku 5.16. Situace se změní, jakmile homogenní magnetické pole zaměníme *gradientním magnetickým polem*, které na obrázku roste zleva doprava.¹² Protože některé ze tří oblastí s vysokou hustotou vodíku leží v magnetickém poli s různou intenzitou, dostaneme z nich podle (5.20) NMR signál na různých frekvencích, přičemž amplituda signálu je úměrná počtu vodíkových atomů. Tomuto postupu se říká *frekvenční kódování*. K zobrazování to však pořád ještě nestačí, protože dvě ze tří oblastí leží v oblasti se stejnou magnetickou indukcí a ve spektru je proto nelze rozlišit.

Naznačený problém řeší metoda *zpětné projekce* (*backprojection imaging*), historicky první MRI metoda zavedená Lauterburem [74]. Metoda zpětné projekce je rozšířením frekvenčního kódování v tom smyslu, že směr

¹² Aplikovaný gradient magnetického pole by měl být tak velký, aby změna magnetické indukce ΔB v rozsahu zobrazované oblasti odpovídala šířce pásma RF pulsů, která je okolo $\Delta f \sim 400$ kHz [64]. Kdyby měl RF puls menší šířku pásma, bodům blíže k okraji oblasti by se „nedostávalo“ záření o rezonanční frekvenci. Zároveň je opět vidět, jak je důležitá znalost frekvenčního spektra RF pulsů, která určuje relativní citlivost při různých indukcích v gradientním magnetickém poli.

gradientu magnetického pole se postupně natáčí s určitým krokem, a pro každý krok se změří spektrum NMR signálu.

Rovinu řezu zafixujeme dalším, silnějším gradientním magnetickým polem.¹³ Jestliže na obrázku 5.16 leží souřadná rovina xy v rovině kresby a osa z je k ní kolmá, a jestliže má gradientní magnetické pole nenulovou pouze z -složku, můžeme ji zapsat ve tvaru $B_z = B_0 + zG_z$, kde B_0 je indukce v určitém referenčním bodě, *isocentru* magnetu, a konstantní veličina G_z reprezentuje rychlost změny (gradient) magnetického pole. Rezonance nastává podle (5.20) tam, kde je velikost B_z magnetické indukce rovna Larmorově frekvenci protonu dělené gyromagnetickým poměrem γ , takže pro geometrický útvar $B_z = f/\gamma = \text{const}$, v němž dochází k rezonanci, máme

$$zG_z = \frac{f}{\gamma} - B_0 = \text{const}. \quad (5.24)$$

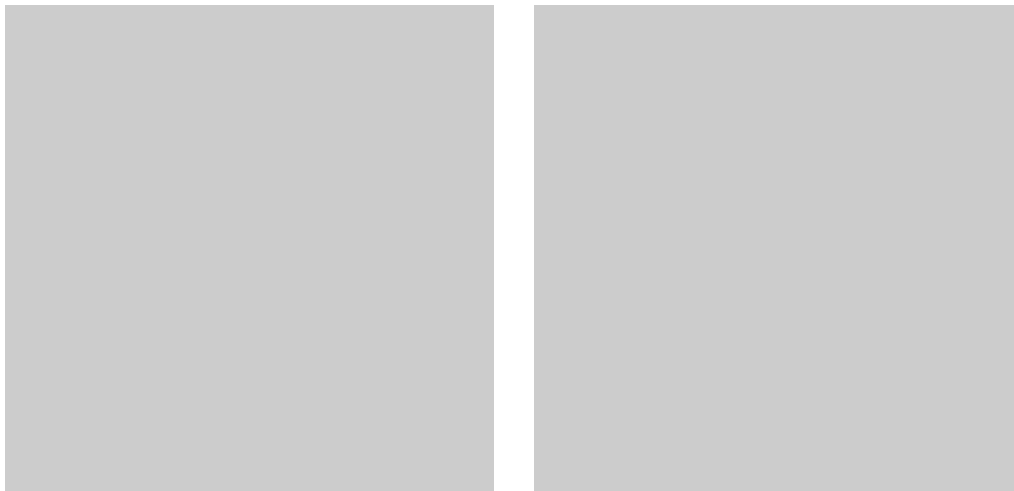
To je rovnice roviny kolmé k ose z , tj. sagitálního řezu hlavou. Gradientní pole $\vec{G}$ se dá obecně nastavovat složitějším způsobem, než jsme právě popsali, a tím měnit sklon a polohu roviny řezu.¹⁴ Ve skutečnosti dochází k rezonanci v tenké rovinné vrstvě vlivem tepelného pohybu molekul a vlivem rozšíření spektrální čáry RF pulsů.

Odtud mimochodem plyne důležitost tvarování RF pulsů. Kdybychom tyto pulsy vytvarovali s obdélníkovou obálkou, jejich frekvenční spektrum by mělo tvar funkce sinc se známými oscilačními laloky. Frekvence by měla velký rozptyl a v důsledku toho by byl velký rozptyl i lokalizaci míst, kde dochází k rezonanci; jinými slovy, rovina řezu by měla větší tloušťku, což by mohlo vést ke ztrátě ostroty a detailu. Jestliže však RF pulsy příhodně vytvarujeme, například tak, aby jejich obálka měla tvar funkce sinc, bude mít naopak frekvenční spektrum pulsů obdélníkový tvar a rovina zobrazení bude dobře lokalizovaná. RF pulsy s gaussovským profilem poskytnou opět gaussové frekvenční spektrum, tedy dobře lokalizovanou rovinu řezu. Tvarování RF pulsů tak lze využít k regulaci síly řezu.

Ze znalosti NMR spekter při všech krocích pak lze numericky implementovanou inverzní Radonovou transformací (zpětná projekce), podobně jako u počítačové tomografie, pomocí počítače zrekonstruovat vybraný řez, jak je znázorněno na obrázcích 5.17 a 5.10.

¹³ Silnějším proto, aby se oblast rezonance $\Delta B = \Delta f/\gamma$ zúžila na pokud možno tenkou rovinu.

¹⁴ Není principiálního důvodu k tomu, aby geometrickým útvarem byla nerovinná plocha [75]. Autorce se nepodařilo zjistit, zda se nerovinných řezů v praxi užívá.

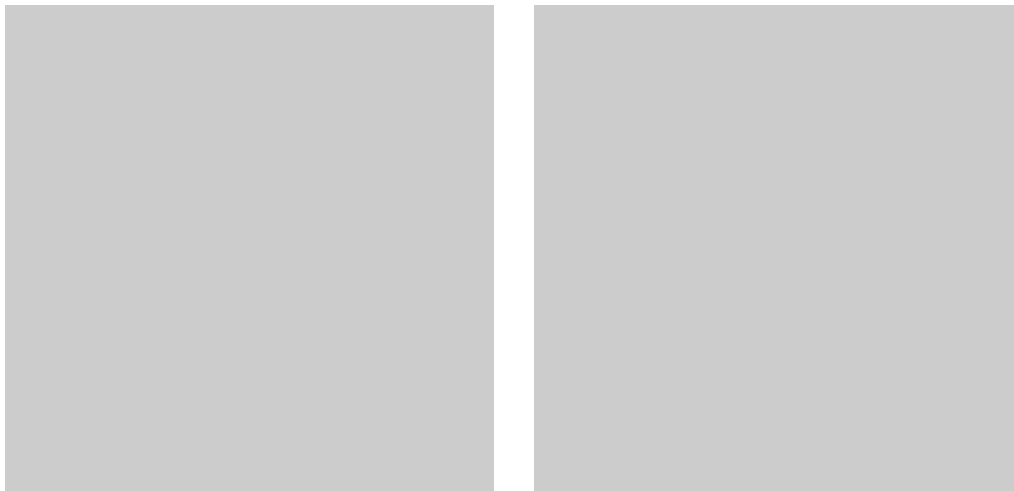


Obrázek 5.17. Podstata rekonstrukce obrazu pomocí techniky zpětné projekce. *Vlevo:* Pomocí gradientního pole (5.24) ve směru kolmém k rovině obrázku se zafixuje rovina řezu (zde sagitální), a pomocí gradientů v rovině obrázku natáčecích s určitým krokem (zde pro názornost 45°) od 0° do 360° se v každém kroku sejme NMR spektrum. *Vpravo:* Ze znalosti všech spekter lze pomocí počítačově implementované Radonovy transformace zrekonstruovat mapu sagitálního řezu vybraného pomocí gradientu kolmého k rovině obrázku. Upraveno podle [69].

Ačkoli je technika frekvenčního kódování a zpětné projekce poměrně jednoduchá a názorná, v současných MRI modalitách se nepoužívá. Místo ní se aplikuje další kategorie zobrazování nazývaná *dvourozměrné fourierovské zobrazování* objevené R. ERNSTEM a založené na Fourierově transformaci. Podrobný výklad této poměrně složité techniky se vymyká rozsahu bakalářské práce a odkazujeme proto např. na [69]. Zde uvedeme jen základní ideu [71].

Představme si, že na obrázku 5.10 je osa z orientována vertikálně (rovnoběžně se hřbetem vazby), osa y leží v rovině obrázku a osa x kolmo k obrázku. „Výšku“ transverzálního řezu, tj. z -ovou polohu řezu, regulujeme stálým gradientem G_z . Do hry nyní vstupují přechodné gradienty ve zbývajících osách x a y . Nejprve je aplikován gradient G_x ve směru osy x po dobu t_x , potom gradient G_y ve směru osy y po dobu t_y . Označme hustotu vodíkových jader ve vybraném řezu (pomocí gradientu G_z) $\rho(x, y)$. Jsou-li časy $t_{x,y}$ přiřkládání gradientů $G_{x,y}$ malé ve srovnání s relaxačními časy, pak je časový průběh signálu NMR obrazového elementu $dx dy$ v bodě x, y úměrný

$$\rho e^{i\gamma B t} dx dy. \quad (5.25)$$



Obrázek 5.18. Axiální (N)MRI zobrazení lidského mozku s patologií. *Vlevo:* $T_R/T_E = 5500/105$ ms, 2 Nex (počet zprůměrovaných obrazů), matice 512×256 . *Vpravo:* $T_R/T_E = 450/14$ ms, 1 Nex, matice 256×192 . Převzato z [69].

V časovém intervalu t_x je magnetická indukce $B = B_0 + xG_x$, v následující době t_y platí $B = B_0 + yG_y$, kde B_0 označuje hodnotu v místě $x = y = 0$. Dosadíme-li oba poslední výrazy do vztahu (5.25) a členy obsahující na souřadnicích nezávislý konstantní člen B_0 zahrneme do konstanty úměrnosti, dostaneme pro velikost signálu NMR hodnotu úměrnou $\rho e^{i\gamma(xG_xt_x+yG_yt_y)} dx dy$, a pro celý řez

$$s(t_x, t_y) = \iint \rho(x, y) e^{i\gamma(xG_xt_x+yG_yt_y)} dx dy. \quad (5.26)$$

Zavedeme-li substituce $\omega_x = \gamma xG_x$, $\omega_y = \gamma yG_y$ a $A = 1/\gamma^2 G_x G_y$, můžeme vztah (5.26) přepsat jako

$$s(t_x, t_y) = A \iint \rho(\omega_x, \omega_y) e^{i(\omega_x t_x + \omega_y t_y)} d\omega_x d\omega_y. \quad (5.27)$$

Ale to je dvourozměrná Fourierova transformace mezi měřitelnou veličinou $s(t_x, t_y)$ a hledaným rozložením vodíkových jader v řezu $\rho(\omega_x, \omega_y)$, potažmo $\rho(x, y)$.¹⁵ Tato metoda ukazuje, že Fourierova transformace nevystupuje vždy jen v roli „pomocného“ nebo dodatečného zpracování, jako jsou filtrace a různé úpravy signálu, ale může být nativní, neoddělitelnou součástí převodu primárního signálu $s(t_x, t_y)$ na obrazový výstup $\rho(x, y)$.

¹⁵ Frekvence spínání gradientních cívek, jež leží ve slyšitelné akustické oblasti, zapříčiňuje „kulometnou palbu“, obvyklý zvukový doprovod MRI vyšetření.

Obraz získaný metodou MRI je mapou protonové hustoty ve vybraném řezu. Přesněji, na MRI zobrazeních jsou zachyceny dvě základní informace:

- Distribuce hustoty jader vytvářejících NMR (obvykle vodíkových jader).
- Distribuce relaxačních časů souvisejících s chemickým složením a strukturním stavem tkáně v jednotlivých místech.

Numerickou analýzou relaxačních časů NMR signálu lze vytvářet mapy v relaxačních časech T_1 a T_2 (označovaných jako T_1 či T_2 -vážené obrazy). Soustava obrazů různých rovnoběžných řezů pak vytváří 3D obraz vyšetřované oblasti, z něhož lze pomocí metod počítačové grafiky [76] vytvářet obrazy libovolných řezů. Oba výše uvedené faktory jsou jiné nejen pro různé druhy tkání (viz tabulka 5.4), ale liší se i v závislosti na fyziologickém či patologickém stavu téže tkáně. To vše spolu se skutečností absence ionizujícího záření činí z MRI významnou diagnostickou metodu. Na obrázku 5.18 je příklad axiálního řezu lidskou hlavou s patologií v mozku; tloušťka řezu 5 mm FOV = 22 cm (field of view [69]).

Kapitola 6

Kamerový zobrazovací model

V této kapitole rozebereme následující úlohu: mějme dvě různě umístěné kamery, které budeme označovat referenční (reference) a snímací (sensed), což v dalším textu systematicky odlišíme odpovídajícími indexy „r“ a „s“. Tyto kamery snímají identickou trojrozměrnou scénu a zobrazují ji na film či jiné záznamové médium jako CCD nebo CMOS čip. Vzájemná poloha kamer se liší posunutím a rotací, vlastní kamery mohou mít různé ohniskové vzdálenosti. Cílem je nalézt transformaci mezi dvourozměrnými obrazy na záznamovém médiu. Je zřejmé, že tato úloha nemá obecné řešení – uvažujme například, že mohou existovat body, které se jednou kamerou mapují do jediného bodu na záznamovém médiu, kdežto druhou kamerou do různých bodů. Hledaná transformace tedy je obecně typu „many-to-one“, a nemůže být vzájemně jednoznačná. Rovněž si snadno můžeme představit situaci, kdy jedna kamera „vidí“ objekty, které jsou na obrazu druhé kamery zastíněny. V našem případě však pozice obou kamer jsou velmi blízké (nebo to bylo alespoň cílem). Ukážeme, že za jistých omezujících podmínek je hledanou transformací *perspektivní transformace*. Tato kapitola vznikla úplným přepracováním a rozšířením sekce 13.4 knihy [77], včetně odstranění chyb v ní se vyskytujících.

Všechny v této kapitole presentované vztahy jsou odvozeny v implementační části v exportu notebooku systému *Mathematica*[®] s využitím symbolických manipulací.

6.1. Transformace obrazů kamer

Uvažujme referenční kameru $\mathcal{C}_r$, do jejíž optické osy položíme osu Z „světové“ souřadnicové soustavy $\mathcal{F}_r$; rovina X - Y koinciduje s obrazovou ohnisko-

vou rovinou,¹ osa X je horizontální, osa Y vertikální. Bod $\mathcal{P}$ se „světovými“ souřadnicemi (X_r, Y_r, Z_r) vzhledem k $\mathcal{F}_r$ bude optickým systémem kamery projektován do obrazu se souřadnicemi (x_r, y_r, z_r) ; z těchto souřadnic nás zajímá pouze (x_r, y_r) udávající polohu bodu na snímáči (filmu nebo čipu). Toto zobrazení je výhodné vyjádřit pomocí homogenních souřadnic a projekční matice P_r . Snímací (sensed) kamera $\mathcal{C}_s$ je vůči referenční kameře posunuta a pootočena a její „světová“ souřadnicová soustava $\mathcal{F}_r$ má opět osu Z v ose kamery a rovinu X - Y v obrazové ohniskové rovině;² v této soustavě má bod $\mathcal{P}$ souřadnice (X_s, Y_s, Z_s) , a bude jejím optickým systémem projektován do obrazu se souřadnicemi (x_s, y_s, z_s) ; z těchto souřadnic nás zajímá pouze (x_s, y_s) udávající polohu bodu na snímáči. Rovněž toto zobrazení vyjádříme pomocí homogenních souřadnic a odpovídající projekční matice P_s . Projekční matice mají jediný parametr – ohniskovou vzdálenost objektivu f_r resp. f_s a mají následující tvar (včetně inverze P_s , kterou budeme později potřebovat):

$$P_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_r \\ 0 & 0 & -1/f_r & 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$P_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_s \\ 0 & 0 & -1/f_s & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$P_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -f_r \\ 0 & 0 & 1/f_r & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Souřadnice bodu $\mathcal{P}$ ve „světových“ souřadnicových soustavách $\mathcal{F}_r$ referenční a $\mathcal{F}_s$ snímací (sensed) kamery jsou pomocí homogenních souřadnic vzájemně transformovány prostřednictvím translační a rotační matice T a R , které rozšíříme o čtvrtý řádek a sloupec tak, aby odpovídaly použití v homo-

¹ Pokud bychom volili rovinu X - Y tak, aby obsahovala optický střed, změnila by se diskuse v podobném smyslu, jak je uvedeno na konci předešlé sekce.

² Na rozdíl od referenční soustavy $\mathcal{F}_r$, u soustavy $\mathcal{F}_s$ osa X resp. Y již nemusí být horizontální resp. vertikální.

genních souřadnicích. Translační matice T má v homogenních souřadnicích jednoduchý tvar

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tau_x \\ 0 & 1 & 0 & -\tau_y \\ 0 & 0 & 1 & -\tau_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

zatímco rotační matice R je dána součinem tří matic popisujících rotaci podle jednotlivých os o Eulerovy úhly ϕ , θ , ψ (viz např. [60, 78])

$$R = R_\psi R_\theta R_\phi \quad (6.5)$$

kde

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Vynásobením těchto tří matic podle (6.5) obdržíme (pro kompaktnost zápisu je použito zkratk $\sin(\theta) \equiv s_\theta$, $\cos(\theta) \equiv c_\theta$, $\sin(\phi) \equiv s_\phi$, $\cos(\phi) \equiv c_\phi$, $\sin(\psi) \equiv s_\psi$ a $\cos(\psi) \equiv c_\psi$):

$$R = \begin{pmatrix} s_\theta s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\psi & s_\theta s_\psi c_\phi - c_\psi s_\phi & 0 \\ s_\theta c_\psi s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\theta c_\psi & s_\theta c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi & 0 \\ c_\theta s_\phi & -s_\theta & c_\theta c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Translační matice (6.4) je parametrizována translacemi ve směru jednotlivých os (ve filmové terminologii *truck*: τ_x , tedy horizontální posuv kolmo

na optickou osu, *pedestal*: τ_y , tedy vertikální posuv kolmo na optickou osu, a *dolly*: τ_z , tedy přibližování či vzdalování od scény beze směny ohniskové vzdálenosti), druhá (6.9) pak Eulerovými úhly (ve filmové terminologii *panning*: ϕ , tedy natáčení okolo vertikální osy kolmé na optickou osu, *tilting*: θ , tedy natáčení okolo horizontální osy kolmé na optickou osu, a *rolling*: ψ , tedy natáčení okolo optické osy).³

Odpovídající inverzní matice mají tvar

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tau_x \\ 0 & 1 & 0 & \tau_y \\ 0 & 0 & 1 & \tau_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} s_\theta s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\theta c_\psi s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi & 0 \\ c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi & -s_\theta & 0 \\ s_\theta s_\psi c_\phi - c_\psi s_\phi & s_\theta c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

U translační matice $\mathbf{T}$ a její inverse je čtvrtý sloupec využit pro přičtení posuvu. U rotační matice $\mathbf{R}$ a její inverse je čtvrtý sloupec i řádek nulový s výjimkou jejich průsečíku, kde je 1, takže škálovací parametr homogenních souřadnic nijak neinterferuje s „prostorovou“ submaticí 3×3 , a rotační matice (i její inverse) reprezentuje obecné prostorové otáčení.

Ve „světovém“ souřadnicovém systému $\mathcal{F}_r$ referenční kamery je poloha bodu $\mathcal{P}$ reprezentována homogenním vektorem

$$\tilde{\mathbf{W}}_r = \begin{pmatrix} sX_r \\ sY_r \\ sZ_r \\ s \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Jeho projekce optickým systémem kamery má homogenní souřadnice

$$\tilde{\mathbf{w}}_r = \mathbf{P}_r \tilde{\mathbf{W}}_r \quad (6.13)$$

Ve „světovém“ souřadnicovém systému $\mathcal{F}_s$ snímací kamery je poloha bodu $\mathcal{P}$ reprezentována homogenním vektorem

$$\mathbf{RT} \tilde{\mathbf{W}}_r \quad (6.14)$$

³ Existuje analogická „letecká“ terminologie, v níž se používá tomtéž pořadí termínů yaw (zatáčení), pitch (klopení), roll (klonění).

a analogicky jeho projekce optickým systémem kamery má homogenní souřadnice

$$\tilde{\vec{w}}_s = \mathbf{P}_s \mathbf{R} \mathbf{T} \tilde{\vec{W}}_r \quad (6.15)$$

Vyjádříme-li z poslední rovnice $\tilde{\vec{W}}_r$ pomocí inverse

$$\tilde{\vec{W}}_r = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} \tilde{\vec{w}}_s \quad (6.16)$$

a dosadíme do vztahu (6.13), dostaneme transformační formuli mezi oběma obrazy v homogenním tvaru

$$\tilde{\vec{w}}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} \tilde{\vec{w}}_s \quad (6.17)$$

Vztah mezi souřadnicemi projekce světového bodu $\mathcal{P}$ na snímku snímací kamery (x_s, y_s) a referenční kamery (x_r, y_r) pak dostaneme dělením první a druhé komponenty $\tilde{\vec{w}}_r$ vypočteného podle (6.17) komponentou čtvrtou, symbolicky

$$x_r = \frac{(\mathbf{P}_r \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} \tilde{\vec{w}}_s) [1]}{(\mathbf{P}_r \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} \tilde{\vec{w}}_s) [4]} \quad (6.18a)$$

$$y_r = \frac{(\mathbf{P}_r \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} \tilde{\vec{w}}_s) [2]}{(\mathbf{P}_r \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} \tilde{\vec{w}}_s) [4]} \quad (6.18b)$$

Explicitní forma tohoto vztahu je komplikovaná a v plném tvaru ji lze nalézt v implementační části v sekci nazvané „Transformace obrazů dvou kamer“. Plynou z ní dvě důležité věci:

1. Obě komponenty transformace, pro x_r i y_r , obsahují explicitně komponentu z_s , kterou však z obrazu neznáme.
2. Obě komponenty transformace mají tvar lineárních lomených funkcí (vzhledem k proměnným x_s, y_s, z_s), jejichž jmenovatele jsou stejné; liší se pouze čitateli.

Důkaz obou tvrzení lze opět nalézt v sekci „Transformace obrazů dvou kamer“ implementační části, kde je výhodně využito symbolických manipulací implementovaných v systému *Mathematica*[®].

6.2. Perspektivní, afinní a podobnostní transformace

Nyní vyjasníme roli „hloubkové“ souřadnice z_s , která vystupuje na pravé straně transformací (6.18). Předpokládejme, že zobrazujeme rovinu, která je ve „světových“ souřadnicích $\mathcal{F}_s$, jejichž počátek pro tento případ s výhodou položíme do optického středu kamery, popsána rovnicí

$$aX_s + bY_s + cZ_s + 1 = 0 \quad (6.19)$$

v níž jsme se omezili na roviny procházející mimo optický střed kamery, v jejichž rovnicích je v důsledku toho absolutní člen nenulový a můžeme je tak normalizovat na jednotku. Obrazy bodů roviny (6.19) opět leží v rovině, jejíž rovnice je⁴

$$ax_s + by_s + \left(c + \frac{1}{f_s}\right)z_s + 1 = 0 \quad (6.20)$$

Pro naše potřeby fotografického zobrazování je koeficient $c + 1/f_s$ nenulový; skutečně, dosazením $c = -1/f_s$ do (6.19) a položením $X_s = Y_s = 0$ dostaneme $Z_s = f_s$, tj. rovina by procházela předmětovým ohniskem. Vyloučením těchto rovin, které se v praxi nevyskytují, můžeme koeficient u z_s v (6.20) brát jako nenulový, a tedy vyjádřit explicitně z_s jako

$$z_s = \alpha x_s + \beta y_s + \gamma \quad (6.21)$$

Tento závěr platí i tehdy, klademe-li počátek souřadnic do roviny obrazového ohniska – dojde pouze ke změně koeficientu γ .

Jelikož v čitateli i jmenovateli transformací (6.18) je lineární funkce vzhledem k x_s , y_s a z_s , substitucí za z_s z (6.21) dostaneme opět lineární funkci vzhledem k proměnným x_s a y_s . Absolutní člen ve jmenovateli transformací (6.18) je podle výsledků v implementační sekci „Transformace obrazů dvou kamer“ roven

$$\gamma(2f_r - 2f_s \cos \theta \cos \phi - \tau_z) + f_s^2 \cos \theta \cos \phi \quad (6.22)$$

Při praktickém fotografickém zobrazování je koeficient γ velmi malý – obraz vzniká těsně za rovinou obrazového ohniska, a Eulerovy úhly θ (tilting) a ϕ (panning) jsou blízké nule – kamery nejsou vůči sobě příliš natočené,

⁴ Samozřejmě se započtením „hloubkové“ souřadnice z_s .

takže absolutní člen je nenulový. Pak ovšem můžeme normalizovat transformace (6.18) rozšířením tímto absolutním členem, čímž dostaneme (s přihlédnutím k výše zmíněné rovnosti jmenovatelů)

$$x_r = \frac{ax_s + by_s + c}{gx_s + hy_s + 1} \quad (6.23a)$$

$$y_r = \frac{dx_s + ey_s + f}{gx_s + hy_s + 1} \quad (6.23b)$$

To je perspektivní transformace, jak je popsána např. v [79, 80]. Obsahuje osm parametrů,⁵ které mohou být určeny, známe-li souřadnice čtyř nekolineárních⁶ korespondujících bodů obrazu. Perspektivní transformace (6.23) zachovává přímky, ale nikoli jejich paralelnost a úhly mezi nimi [80, 81].

Je-li scéna daleko od kamery a leží v rovině kolmé k optické ose kamery, dá se perspektivní transformace aproximovat *afinní transformací* (viz [80] výpočty v implementační sekci „Transformace obrazů dvou kamer“)

$$x_r = ax_s + by_s + c \quad (6.24a)$$

$$y_r = dx_s + ey_s + f \quad (6.24b)$$

Afinní transformace obsahuje šest parametrů, které mohou být určeny, známe-li souřadnice tří nekolineárních korespondujících bodů obrazu. Afinní transformace (6.24) zachovává přímky a jejich paralelnost, nikoli však úhly jimi sevřené [80].

Speciálním případem afinní transformace je *podobnostní transformace*, která sestává z rotace v rovině – úhel ψ , škálování – parametr S a translací – parametry τ_x, τ_y . Pro určení těchto čtyř parametrů je zapotřebí znalost dvou různých korespondujících bodů obrazu. Podobnostní transformace zachovává přímky, jejich rovnoběžnost i úhly mezi nimi [80].

Konečně speciálním případem podobnostní transformace je *translační transformace*, která je určena dvěma parametry (τ_x, τ_y) , pro jejichž určení je zapotřebí znalost jediného páru korespondujících bodů.

Perspektivní transformaci (6.23) lze elegantně vyjádřit analogickým způsobem jako v předešlé sekci pomocí homogenních souřadnic, jež jsou roz-

⁵ Parametry $a, \dots, h$ nemají nic společného s koeficienty v rovnici (6.19) ani s ohniskovou vzdáleností.

⁶ Žádné tři neleží na jedné přímce.

šířením nyní dvourozměrných vektorů (x, y) . Vektory popisující polohu na obrazu snímací a referenční kamery

$$\vec{w}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

a

$$\vec{w}_r = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

rozšíříme na odpovídající homogenní vektory⁷

$$\tilde{\vec{w}}_s = \begin{pmatrix} sx_s \\ sy_s \\ s \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

a

$$\tilde{\vec{w}}_r = \begin{pmatrix} sx_r \\ sy_r \\ s \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

Perspektivní transformaci (6.23) potom můžeme zapsat ve formě

$$\tilde{\vec{w}}_r = \mathbf{M} \tilde{\vec{w}}_s \quad (6.29)$$

kde transformační matice $\mathbf{M}$ je

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Máme-li k dispozici N párů korespondujících bodů $(x_{ri}, x_{ri}) \leftrightarrow (x_{si}, x_{si})$, $i \in \{1, \dots, N\}$, můžeme dosazením do (6.23) či do (6.24) dostat soustavu lineárních rovnic pro její parametry:

1. Pro čtyři páry nekolineárních korespondujících bodů ($N = 4$) máme nedegenerovanou soustavu 8 rovnic pro 8 neznámých $a, \dots, h$ z (6.23) a (6.30).

⁷ Pro odlišení homogenních vektorů budeme, stejně jako v předešlé sekci, opět systematicky používat vlnky (tildy).

2. Pro tři páry nekolineárních korespondujících bodů ($N = 3$) máme nedegenerovanou soustavu 6 rovnic pro 6 neznámých $a, \dots, f$ z (6.24). Matice (6.30) se zjednoduší na

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

3. Pro dva páry korespondujících bodů ($N = 2$) máme nedegenerovanou soustavu 4 rovnic pro 4 neznámé – úhel rotace ψ , škálovací parametr S a parametry translace τ_x, τ_y podobnostní transformace. Matice (6.30) má v tom případě tvar

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} S \cos \psi & -S \sin \psi & \tau_x \\ S \sin \psi & S \cos \psi & \tau_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

4. Pro jediný pár korespondujících bodů ($N = 1$) máme nedegenerovanou soustavu 2 rovnic pro 2 neznámé – parametry translace τ_x, τ_y translační transformace. Matice (6.30) pak má jednoduché vyjádření

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau_x \\ 0 & 1 & \tau_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Je-li určení korespondujících bodů zatíženo šumem či zaokrouhlováním, je třeba vzít více než výše popsany počet korespondujících bodů. V takovém případě je nutno řešit příslušnou lineární soustavu, která je přeurčená, má více rovnic než proměnných. Uplatní ze zde několik přístupů – lineární fit založený na zobecněné lineární metodě nejmenších čtverců využívající *Singular Value Decomposition* popsanou např. v [81] a rozebraný v sekcích 2.6 a 15.4 (konkrétně 15.4.2) monografie [82], nebo lineární fit založený na normálních rovnicích rozebraný v sekci 15.4.1 téže monografie. Další informace lze získat z [80]; technické detaily implementace v systému *Mathematica*[®] uvedu v následující kapitole.

Přeurčené soustavy umožňují doplnit mezi případy 3 a 4 ještě případ tzv. *rigidní transformace*, která zahrnuje 3 neznámé: úhel rotace ψ a parametry translace τ_x, τ_y , pro jejichž určení potřebujeme 2 páry korespondujících bodů a tedy 4 rovnice. Tvar transformační matice (6.30) dosta-

neme položením škálovacího parametru $S = 1$ v matici podobnostní transformace (6.32):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & \tau_x \\ \sin \psi & \cos \psi & \tau_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Zmiňuji se o této možnosti zejména z toho důvodu, že systém *Mathematica*[®] má rigidní transformaci implementovanu; podrobněji se o tom zmíním v následující kapitole.

Specializovaná literatura, jako např. monografie [80], věnuje transformačním funkcím mnoho místa; citovaná monografie např. celou Kapitolu 5. Kromě výše popsané perspektivní transformace a jejích simplifikací popisuje transformaci *Thin-plate spline (TPS)*,⁸ *Multiquadratic (MQ)*, *Weighted mean methods*, *Piecewise linear*,⁹ a *Weighted linear*. Svoji aplikaci by zde jistě našla metoda nelineární korekce pomocí metod warpingu, zejména tehdy, byl-li některý z lícovaných obrazů „postižen“ některou z optických vad jako je soudkovité či polštářové zkreslení; soustředíme se však na aplikaci perspektivní transformace a jejích derivátů, jak jsou implementovány v systému *Mathematica*[®]. Díky jejím interaktivním schopnostem umožňuje vzhled do možností a limitací této transformace v aplikaci, která je tématem této práce.

⁸ Česky by se to dalo volně přepožit jako membránový splajn.

⁹ Česky „po částech lineární“.

Chapter 7

Configurations of uniform density

It is interesting that there is a special class of general relativistic polytropes of the index $n = 0$ where the structure equations can be integrated in terms of elementary functions. We shall discuss these polytropes in detail because they can give an intuitive insight into the role of the cosmological constant and can serve as a test bed for the general case of polytropes with $n > 0$.

7.1. Structure of the polytropes

The $n = 0$ polytropes correspond to the special class of the internal Schwarzschild–(anti-)de Sitter spacetimes [83] where the distribution of density ρ is uniform although the pressure grows monotonically from its zero value on the surface of the configuration to a maximum value at its center. Recall that in the configurations with $\rho = \text{const}$, it is not necessary to use the unrealistic notion of an incompressible fluid – one can consider fluids with pressure growing as radius decreases, being “hand tailored” [84]. Assuming $n = 0$, equations of structure can be integrated yielding

$$v(\xi) = \frac{1}{3} \xi^3, \quad (7.1)$$

and

$$\left[3 - 2\sigma(1 + \lambda)\xi^2\right] \frac{d\theta}{d\xi} + (1 - 2\lambda + 3\sigma\theta)(1 + \sigma\theta) = 0 \quad (7.2)$$

and can be integrated directly after separation of variables. Using the boundary condition $\theta(0) = 1$, we obtain

$$\sigma\theta = \frac{(1 - 2\lambda + 3\sigma) \left[1 - \frac{2}{3} \sigma(1 + \lambda)\xi^2\right]^{1/2} - (1 - 2\lambda)(1 + \sigma)}{3(1 + \sigma) - (1 - 2\lambda + 3\sigma) \left[1 - \frac{2}{3} \sigma(1 + \lambda)\xi^2\right]^{1/2}}. \quad (7.3)$$

This solution determines the dependence of pressure on the radial coordinate, since for $n = 0$ there is $\theta = p(r)/p_c$. The dependence is given in units of the energy density since $\sigma = p_c/\rho_c$. From the condition $\theta(\xi_1) = 0$, we find the radius of the configuration to be determined by

$$\xi_1^2 = \frac{6[1 + 2\sigma - \lambda(2 + \sigma)]}{(1 - 2\lambda + 3\sigma)^2}. \quad (7.4)$$

It is convenient to express the pressure profile in terms of r, R , instead of ξ, ξ_1 , and σ obtaining thus the form of expression of the $n = 0$ polytrope as was discussed in [83]. Introducing a new parameter a , having dimension of length, by the relation

$$\frac{1}{a^2} = \frac{8\pi}{3} (\rho_c + \rho_{\text{vac}}) \quad (7.5)$$

we find the relation of R, σ , and λ to be given by

$$\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2} = \frac{(1 - 2\lambda)(1 + \sigma)}{1 - 2\lambda + 3\sigma}. \quad (7.6)$$

Then the central pressure p_c and the pressure profile $p(r)$ can be expressed in the known form [83, 85, 86]

$$p_c = \rho_c \frac{(1 - 2\lambda) \left[1 - (1 - R^2/a^2)^{1/2}\right]}{3(1 - R^2/a^2)^{1/2} - (1 - 2\lambda)}, \quad (7.7)$$

$$p(r) = \rho_c \frac{(1 - 2\lambda) \left[(1 - r^2/a^2)^{1/2} - (1 - R^2/a^2)^{1/2}\right]}{3(1 - R^2/a^2)^{1/2} - (1 - 2\lambda)(1 - r^2/a^2)^{1/2}}. \quad (7.8)$$

The radial metric coefficient is given by the relation

$$e^{2\Psi(r)} = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1}, \quad (7.9)$$

and the total mass reads

$$M = \frac{1}{3} \mathcal{L}^* \sigma \xi_1^3 = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3. \quad (7.10)$$

The temporal metric coefficient is determined by the relations

$$e^{\Phi(r)} = \frac{[1 - \frac{2}{3} \sigma(1 + \lambda) \xi^2]^{1/2}}{1 + \sigma \theta} \quad (7.11)$$

and

$$e^{\Phi(r)} = \frac{3(1 - R^2/a^2)^{1/2} - (1 - 2\lambda)(1 - r^2/a^2)^{1/2}}{2(1 + \lambda)}. \quad (7.12)$$

The special case of $\lambda = -1$ has to be treated separately as $1/a^2 = 0$. Now, Eq. (7.2) reduces to

$$\frac{d\theta}{(1 + \sigma\theta)^2} = -\xi d\xi, \quad (7.13)$$

which leads, after integration with the boundary condition $\theta(0) = 1$, to the formula

$$\theta = \frac{1 - \frac{1}{2}(1 + \sigma)\xi^2}{1 + \frac{1}{2}(1 + \sigma)\xi^2}. \quad (7.14)$$

The boundary of the configuration is at

$$\xi_1^2 = \frac{2}{1 + \sigma}. \quad (7.15)$$

The central pressure and the pressure profile can be expressed in terms of the radial coordinates r , R in the form

$$p_c = \frac{\rho_c}{2R/3M - 1}, \quad (7.16)$$

$$p(r) = p_c \frac{1 - r^2/R^2}{1 + \frac{1}{2R/3M - 1} \frac{r^2}{R^2}}. \quad (7.17)$$

The metric coefficients have a special form, too. The radial g_{rr} component corresponds to the flat $t = \text{const}$ sections

$$e^{2\Psi(r)} = 1, \quad (7.18)$$

while the temporal g_{tt} component takes the form [83]

$$e^{\Phi(r)} = 1 + \frac{3M}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right). \quad (7.19)$$

Properties of the $n = 0$ general relativistic polytropes were discussed in [83, 87]. Here we concentrate on the existence of these polytropes in dependence on the cosmological constant.

7.2. Existence conditions and compactness of $n = 0$ polytropes

The reality conditions on the general solution, given by Eqs (7.8), (7.9), and (7.12), must guarantee that the pressure is positive and nondivergent, and the metric coefficients have to be regular at $r \leq R$. Therefore, two conditions have to be satisfied:

$$1 - 2\lambda > 0 \quad (7.20)$$

and

$$3 \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^{1/2} - (1 - 2\lambda) > 0. \quad (7.21)$$

Considering the case of $\lambda = 1/2$, we find

$$\theta(\xi) = \frac{(1 - \sigma\xi^2)^{1/2}}{1 + \sigma + \sigma(1 - \sigma\xi)^{1/2}}. \quad (7.22)$$

The boundary of such a polytrope configuration is at

$$\xi_1^2 = \frac{1}{\sigma}, \quad (7.23)$$

and it can be shown that

$$R^2 = a^2. \quad (7.24)$$

Therefore, the metric coefficients are singular because there is

$$e^{-2\Psi(R)} = e^{2\Phi(R)} = e^{2\Phi(r)} = 1 - \frac{R^2}{a^2}. \quad (7.25)$$

For polytrope configurations of a given M and Λ , condition (7.20) gives an upper limit on admissible values of the external radius R . Configurations with $\lambda \sim 1/2$ can be considered as nearly “geodetical” since the pressure gradient almost vanishes on the surface, which is close to the static radius of the external geometry. (For $\lambda = 1/2$, the surface of the static configuration has to be located at the horizon of the external spacetime, with $R = 3r_g/2$; however, no static configuration can have its boundary at a black-hole horizon, and such configurations are forbidden.)

The lower limit on the external radius of the $n = 0$ polytropes is determined by the condition (7.21) that can be transformed into the relations

$$\frac{R^2}{a^2} < \frac{4(1+\lambda)(2-\lambda)}{9} \quad (7.26)$$

and

$$R > 2M \frac{9}{4(2-\lambda)}. \quad (7.27)$$

For $\lambda = 0$, we obtain the well known limit $R > (9G/4c^2)M$. The restrictions on physically realistic $n = 0$ polytropes can also be transformed into a form containing dimensionless quantities $x \equiv R/M$, $y \equiv \Lambda M^2/3$ (see Refs [83, 87]).

Compactness of the polytropic spheres of the uniform density is given by the relation

$$\mathcal{C}(\sigma, \lambda) = \frac{2\sigma[1 - 2\lambda + \sigma(2 - \lambda)]}{(1 - 2\lambda + 3\sigma)^2} \quad (7.28)$$

that is reduced for $\lambda = 0$ to the formula

$$\mathcal{C}(\sigma) = \frac{2\sigma(1 + 2\sigma)}{(1 + 3\sigma)^2}. \quad (7.29)$$

The extremely compact configurations with $\mathcal{C} > 1/3$ can exist, if the central parameter satisfies the relation

$$\sigma^2 \geq \sigma_{\text{ext}}^2 \equiv \frac{2}{3}\lambda. \quad (7.30)$$

As an extremely compact spherical configurations are denoted those having their surface located under the photon circular orbit of the external space-time [88]. It can be shown [87] that in extremely compact configurations (with $R < 3M$), a stable circular null geodesic exists around which null geodesics captured by the strong gravitational field are concentrated. Neutrinos, moving along these bound null geodesics, can influence cooling of extremely compact neutron stars. The potential well of the captured geodesics becomes deeper with the repulsive cosmological constant increasing, while it gets flatter with the attractive cosmological constant decreasing [89].

7.3. Gravitational binding of $n = 0$ polytropes

Finally, we give the gravitational energy of the $n = 0$ polytropes and their gravitational binding factor g . The total energy

$$E = M = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3. \quad (7.31)$$

The formula for the total proper energy reads

$$E_0 = 4\pi\rho_c \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} r^2 dr, \quad (7.32)$$

and after integration we obtain

$$E_0 = \frac{3}{2} M \left(\frac{a}{R}\right)^3 \left[\arcsin\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{R}{a} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2} \right], \quad (7.33)$$

where

$$\frac{R}{a} = \frac{2(1 + \lambda)^{1/2}}{1 - 2\lambda + 3\sigma} \{\sigma[1 + 2\sigma - \lambda(2 + \sigma)]\}^{1/2}. \quad (7.34)$$

The gravitational potential energy

$$\mathcal{G} = M \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^3 \left[\arcsin\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{R}{a} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2} \right] \right\} \quad (7.35)$$

is naturally negative and the gravitational binding factor $g = \mathcal{G}/E$ is given by

$$g \equiv \frac{\mathcal{G}}{v} = -\frac{3}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^3 \left[\arcsin\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{R}{a} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2} \right]. \quad (7.36)$$

The gravitational potential energy of the $n = 0$ polytropes is represented in Fig. 7.1. The role of the cosmological constant is illustrated by the sequence of lines constructed for appropriately chosen values of the cosmological parameter λ .

It expresses the gravitational binding in a “pure” form as there is no internal energy in “incompressible” configurations. On the other hand, we

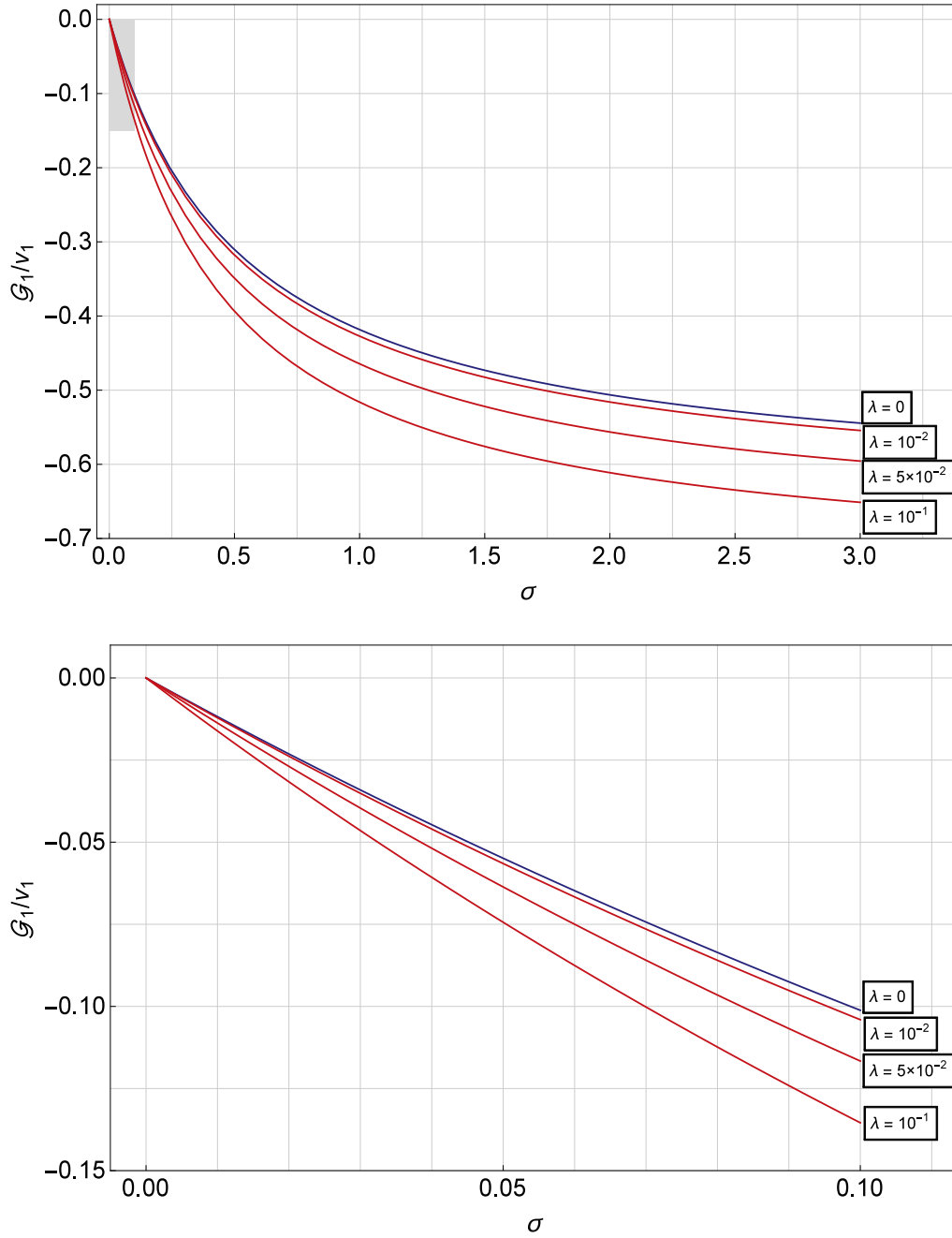


Figure 7.1. Dependence of the gravitational binding factor (7.36) for configurations of uniform density on relativity parameter σ for cosmological parameter $\lambda = 0, 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}, 10^{-1}$, respectively. The “1” index emphasizes the energies are related to the whole configuration. *Top:* Wide range of relativity parameter. *Bottom:* Zoom of the shaded region in the top plot.

can directly conclude that the relation of the binding energy of gas $\mathcal{B}$, and the gravitational energy are given by

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{G}} = -1. \quad (7.37)$$

The gravitational potential energy of the $n = 0$ polytropes is represented in Fig. 7.1. The role of the cosmological constant is illustrated by the sequence of lines constructed for appropriately chosen values of the cosmological parameter λ .

In polytropes with $n > 0$, the binding energy $\mathcal{B}$ differs from the gravitational binding energy $(-\mathcal{G})$, as some of the work of the gravitational field is converted into the kinetic energy of microscopic motion in these polytropes. The role of the cosmological parameter $\lambda \neq 0$ in the effect of gravitational binding will be discussed in the next section.

Část III

Dodatky

Dodatek A

Volby dokumentní třídy

Dokumentní třída `ipthes.cls` akceptuje následující ortogonální¹ volby:

draft se používá pro často opakované průběžné kompilace během psaní práce. Přetečené řádky budou na pravé straně označeny černým obdélníčkem (T_EXisty nazývaným *slimák*) a argument příkazu `\note` bude zobrazen jako poznámka na okraji vysázená drobným bezpatkovým fontem.² Kromě toho je tato volba předána do všech balíčků, které ji implementují, takže např. balíček `graphicx` [90] zobrazí místo vložené grafiky obdélník příslušné velikosti s uvedením názvu obrazového souboru včetně relativní cesty a podobně, čímž se kompilace a ladění urychlí.³

Marginální poznámka vysázená pomocí příkazu `\note`.

final se používá u kompilace finální verze práce; přetečené řádky nejsou označeny *slimáky* (ostatně žádné by se neměly vyskytnout), a argument příkazu `\note` je „anihilován“, takže marginálie vkládané pomocí `\note` není třeba pro finální verzi odstraňovat. Balíček `graphicx` [90] vloží skutečné grafické soubory.

htext transformuje externí linky i interní křížové odkazy na hypertext při zachování sazby nezávisle na nastavení **draft** či **final** nebo na kompilaci formátem `latex` (u něj se předpokládá následná konverze do PDF ovladačem `dvipdfmx` [91])⁴ či `pdflatex`.

narrowmargin rozšíří sazební obrazec o cca 1.08 in $\approx$ 27.4 mm a zvýší počet řádků na stránce z 39 na 41. Bez volby **narrowmargin** je poměr

¹ Aktivace určité volby neovlivňuje funkčnost voleb ostatních (kromě **draft** a **final**).

² Ve skutečnosti je marginální poznámka na této straně vysázena pomocí persistentní „hvězdičkové formy“ `\note*`, která nebude ignorována ani při použití volby **final**, což je pochopitelně případ i tohoto dokumentu.

³ Pokud navíc nechcete být během přípravy práce zdržováni sazbou titulních stránek, anotací, klíčových slov, poděkování, prohlášení, věnování, jednoduše zakomentujte příkazy `\maketitle`, `\tableofcontents`, `\listoffigures`, `\listoftables` a případně i prostředí typu `annotation`, jež jsou součástí titulních stran. Příkazy `\author`, `\title` apod. mohou zůstat nezakomentovány, jejich obsah bude ignorován.

⁴ Chcete-li si výsledný DVI soubor pouze prohlížet, volbu **htext** vypněte.

šířky k výšce 0.618 (zlatý řez), se zapnutou volbou **narrowmargin** 0.707 (stříbrný řez).

indentfirst způsobí horizontální odsazování (indentaci) úvodního řádku prvního odstavce kapitoly, sekce, subsekce, ... Implicitně se úvodní řádky prvního odstavce neindentují.

fllastline potlačí centrování posledního (východového) řádku některých implicitně do bloku sázených odstavců. Typicky se to týká popisek obrázků a tabulek, anotace, klíčových slov, prohlášení, poděkování (nikoli věnování, které je celé sázeno centrovane). Jejich východové řádky budou místo centrování zarovnány doleva „flush left“.

headfootsans změní font živého záhlaví a zápatí (na úvodních stránkách kapitol je v něm umístěna stránková číslice místo v záhlaví) ze skloněného patkového na skloněný bezpatkový font.

Při kompilaci tohoto manuálu byly aktivní volby **final** a **htext**.

Dodatek B

Načítané balíčky

Následující balíčky jsou načítány v uvedeném pořadí dokumentní třídou `ipthes.cls` pomocí příkazu `\RequirePackage`, takže není třeba je v preambuli pomocí příkazu `\usepackage` znovu načítat.¹

etoolbox je sada programovacích nástrojů primárně určených pro autory L^AT_EXových tříd a balíčků [26]. Díky makru `\AtEndPreamble` definovanému tímto balíčkem je možné odložit načtení určitého kódu, včetně balíčku `hyperref`, až na samý konec preamble, nikoli však do argumentu `\AtBeginDocument`, kde by nové verze `hyperref` nefungovaly správně.

natbib podporuje flexibilitu vytváření referencí a citací pomocí pomocného programu Bib_TE_X [2, 12, 92, 93].

amsmath, **amssymb** výrazně rozšiřují možnosti L^AT_EXu v oblasti sazby matematiky jak co do definic příkazů a prostředí, tak výběru symbolů [2, 12, 94, 95].²

graphicx poskytuje, mimo jiné, unifikované rozhraní pro vkládání obrázků obsažených v externích souborech [10, 12, 90].

hyperref, **url** slouží k transformaci externích i interních křížových odkazů na hypertext [96]. Balíček `url` nutný pro řádkový zlom URL v místě teček, lomítek atd [2, 97] se implicitně načítá přes balíček `hyperref`, jenž je sám načítán pouze při zapnuté volbě `htext` (viz stranu 87); v opačném případě je tedy nutno jej načíst samostatně – vše je ošetřeno v `ipthes.cls`.

Máte-li v úmyslu načítat v preambuli nějaké balíčky, vyhněte se opětovnému načítání výše vyjmenovaných nebo v sekci B.1 níže uvedených; mohlo by

¹ Balíčky `hyperref` resp. `url` jsou načítány v argumentu makra `\AtEndPreamble`, což zajistí načtení `hyperref` jako posledního i v případě, že v preambuli budou načítány další uživatelem požadované balíčky.

² Jelikož `amssymb` interně načítá `amsfonts` (jak se lze přesvědčit nahlédnutím do logu překladu), není již třeba `amsfonts` explicitně načítat. Zamýšlíte-li užívat matematický styl definice–věta–důkaz, zvažte načtení balíčku `amsthm` v preambuli.

to vést k těžko odhalitelným chybám. Obzvláště citlivý je na to balíček `hyperref` [96], u kterého je automaticky zajištěno načtení jako posledního ze všech. Například potřebujeme-li pro matematicky zaměřenou závěrečnou práci balíček `amsthm` [98], stačí v preambuli načíst pouze jej, jelikož na něj úzce vázané balíčky `amsmath` a `amssymb` resp. `amsfonts` [94, 95] jsou již načteny.

B.1. Závislosti

Každý z uvedených balíčků závisí na množství dalších balíčků, kromě toho v preambuli jsou zaváděny další balíčky a ty také mohou záviset na dalších. V následujících seznamech jsou uvedeny pouze další balíčky načítané těmi, jež jsou zaváděny dokumentní třídou `ipthes.cls`³ (jejich seznam je výše) a těmi, jež jsou zaváděny v preambuli hlavního zdrojového souboru `vzorova_prace.tex` tohoto manuálu⁴ (viz Kapitulu 2):

Bez volby `htext` (viz s. 87): `amstext`, `amsgen`, `amsbsy`, `amsopn`, `amsfonts`, `keyval`, `graphics`, `trig`, `epstopdf-base` (pouze při kompilaci formátem `pdflatex`)

S volbou `htext`: `amstext`, `amsgen`, `amsbsy`, `amsopn`, `amsfonts`, `keyval`, `graphics`, `trig`, `ltxcmds`, `iftex`, `pdfTexcmds`, `kvdefinekeys`, `hycolor`, `letltxmacro`, `auxhook`, `nameref`, `refcount`, `getttitlestring`, `kvoptions`, `intcalc`, `etexcmds`, `bitset`, `bigintcalc`, `atbegshi-ltx`, `atveryend-ltx`, `rerunfilecheck`, `uniquecounter`, `epstopdf-base` (pouze při kompilaci formátem `pdflatex`), `color`

³ Platí pro aktuální verzi `ipthes` a distribuci MiKTeX verze 22.3 pro Windows 10.

⁴ Ty se mohou měnit v závislosti na tom, jaké balíčky načte v preambuli uživatel.

Dodatek C

Umístění sazebního obrazce

Implicitně je sazební obrazec horizontálně centrován a jeho vertikální pozice je optimalizována pro tisk na papír formátu A4 [99]. Může se však stát, že uživatel bude z nějakého důvodu chtít posunout sazební obrazec například směrem dovnitř (ke hřbetu), například proto, že pro svázání práce použije lepenou vazbu, nebo směrem ven (od hřbetu) v případě obvyklé vazby nabízené většinou knihařství. Také může být žádoucí posunout sazební obrazec ve vertikálním směru, například kvůli ořezu listů. K tomu účelu slouží příkazy `\spineoffset` a `\verticalshift`.

Příkaz `\spineoffset` posune sazební obrazec o délku specifikovanou argumentem směrem ke hřbetu (tj. sudé stránky, které jsou při rozevření nalevo, budou posunuty o hodnotu argumentu doprava a liché, které jsou při rozevření napravo, budou posunuty o hodnotu argumentu doleva). To platí pro kladný argument, např. `5mm`. Zadáme-li záporný argument, např. `-24pt`, bude sazební obrazec posunut směrem ven, od hřbetu.

Podobně funguje příkaz `\verticalshift`. Kladná hodnota argumentu posouvá sazební obrazec nahoru, záporná dolů. V obou příkazech lze použít libovolné jednotky akceptované T_EXem [2, 9, 12]. Samotné rozměry sazebního obrazce zůstanou nedotčeny. Příkazy pro adjustaci polohy sazebního obrazce `\spineoffset` a `\verticalshift` lze výhodně umístit do konfiguračního souboru `ipthes.cfg`, např.

```
%% Page positioning
\spineoffset{-5mm}
\verticalshift{2mm}
```

Popsané chování je nezávislé na aktivaci volby `narrowmargin` (viz Dodatek A na stránce 87). Je pouze třeba uvážit, že při aktivaci této volby jsou okraje užší a rozsah použitelných posuvů odpovídajícím způsobem menší.

Při umísťování sazebního obrazce je vhodné řídit se pravidly estetické sazby, např. podle [100].

Dodatek D

Konfigurační soubor

Balíček `ipthes` volitelně používá konfigurační soubor `ipthes.cfg`. Je-li takto pojmenovaný soubor přítomen v pracovním adresáři, bude automaticky nalezen a načten, o čemž bude uživatel informován hláškou

```
** ipthes: user config file loaded:
(ipthes.cfg)
```

O nepřítomnosti konfiguračního souboru bude uživatel informován takto:

```
Class ipthes Warning: 'ipthes.cfg' not found;
create one or use preamble to place your stuff.
```

Do `ipthes.cfg` si uživatel může uložit vlastní definice a nastavení, aniž by jimi „plevelil“ preambuli hlavního souboru. Prvních 46 řádků načtených z aktuálního `ipthes.cfg` pomocí balíčku `fancyvrb` [27] vypadá takto:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% PDF document information (ignored unless compiled with pdflatex)
%% NO ACCENTS OR EMBELLISHMENT.  Displayed by Adobe Acrobat Reader
%% in the File -> Properties ... Description tab
\pdfinfotitle{A fictitious Thesis as a user manual for the \ipotname\
  LaTeX package}
\pdfinfoauthor{Stanislav Hledik}
\pdfinfosubject{Preparing Final Theses at the Institute of Physics
  in Opava}
\pdfinfokeywords{Typesetting | LaTeX publishing system | document class |
  BibTeX | bibliographic style | PDF | hypertext | Bachelor Thesis |
  Master Thesis | Rigorous Thesis | Dissertation}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Page positioning
%\spineoffset{5mm}
%\verticalshift{20mm}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% TOC and sectioning
%\setcounter{tocdepth}{3}
%\setcounter{secnumdepth}{3}
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Repeatedly used filenames
\newcommand*{\thesnamecze}{vzorova\_prace} \let\thesname\thesnamecze
\newcommand*{\thesnameeng}{sample\_thesis}
\newcommand*{\refername}{references}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Repeatedly used URLs
\newcommand*{\authorurl}{\url{https://is.slu.cz/www/hle0002/}}
\newcommand*{\theshome}{\url{https://is.slu.cz/www/hle0002/vyuka/aid/}}
\newcommand*{\thesfiles}%
  {\url{https://is.slu.cz/www/hle0002/vyuka/aid/ipothese/}}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Base URLs for arXiv and doi (default values are in examples)
%\eprintBaseURL{https://arxiv.org/abs}
%\doiBaseURL{https://doi.org}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% General text macros and abbreviations
\providecommand{\uv}[1]{\glqq #1\grqq}
\newcommand{\designation}[1]{\textsc{#1}}
\newcommand*{\pgm}[1]{\mbox{\texttt{#1}}}

```

⟨zbývající řádky vynechány⟩

V první sekci *PDF document information* jsou nastaveny údaje pro vlastnosti dokumentu zobrazované Adobe Acrobat Readerem [101] i jinými prohlížeči PDF, např. M μ PDF [102]. Další sekce *Page positioning* je připravena pro jemné doladění umístění sazebního obrazce popsané v Dodatku C. Sekce *TOC and sectioning* je připravena na změnu hloubky Obsahu a číslování sekcí. Sekce *Repeatedly used URLs* a *Base URLs for arXiv and doi* definuje opakovaně používaná URL a báze URL pro ARXIV a DOI. Následuje sekce *General text macros and abbreviations* s obecně použitelnými makry.

Soubor `ipothese.cfg` dodávaný v balíčku `ipothese` je mnohem rozsáhlejší, další materiál lze nalézt přímo v něm. Předpokládá se, že uživatel si jej přizpůsobí pro své vlastní potřeby. Zejména je záhodno změnit údaje v sekci *PDF document information*. Tyto údaje se uvádějí zvlášť (místo aby byly vzaty z údajů pro titulní stránky popsané v Kapitole ??) z toho důvodu, že vyžadují absenci diakritiky, která je ve vlastnostech dokumentu chybně zobrazována. Zakomentujete-li některý z příkazů `\pdfinfo*`, zůstane odpovídající políčko ve vlastnostech dokumentu prázdné.

Dodatek E

Konfigurace balíčku hyperref

Balíček `hyperref` [96] je načten a předkonfigurován již v dokumentní třídě `ipthes.cls` v argumentu makra `\AtEndPreamble` [26], aby byl načten jako poslední ze všech balíčků, i těch, jenž si uživatel vyžádá v preambuli hlavního souboru (viz též Dodatek B na stránce 89).¹ Načtení balíčku `hyperref` se zapíná volbou `htext` bez ohledu na to, která z voleb `draft` či `final` (případně i ostatních popsanych v Dodatku A) je aktivní. Ovladač [103] je autodetekován; obecně platí, že při kompilaci pomocí `pdflatex` se použije odpovídající ovladač automaticky, při kompilaci pomocí `latex` se použije ovladač `dvipdfmx` rovněž automaticky.²

Dodatečnou konfiguraci je možné provést pomocí specializovaného konfiguračního souboru `hyperref.cfg` balíčku `hyperref` a volitelného konfiguračního souboru `ipthes.cfg` balíčku `ipthes` (viz Dodatek D) umístěných v adresáři `manual`. Důvodem přesunu určité malé části konfigurace do `ipthes.cfg` – jmenovitě specifikace údajů zobrazovaných v menu „Document Properties“ Adobe Acrobat Readeru [101] (viz obrázek E.1) i jiných prohlížečů PDF, např. `MuPDF` [102] – je zachování těchto údajů při kompilaci pomocí `pdflatex` i při vypnuté volbě `htext`, typicky pro tiskovou formu práce. Kdyby byly tyto údaje uvedeny pouze v `hyperref.cfg`, nenačetly by se. Nezapomeňte tyto údaje v `ipthes.cfg`, stejně jako hodnotu klíče `baseurl` v `hyperref.cfg`, aktualizovat podle vašich potřeb. Další informace a inspiraci pro vhodné změny lze najít v Dodatku D.

Zkrácený obsah aktuálního konfiguračního souboru `hyperref.cfg` načtený přímo z něj (pomocí balíčku `fancyvrb` [27]) vypadá následovně:

¹ To je z technického hlediska žádoucí, vysvětlení lze nalézt v manuálu `hyperref` [96].

² Toto chování lze změnit v konfiguračním souboru `hyperref.cfg`. Ovladač `dvipdfmx` předpokládá následnou jím provedenou konverzi do PDF. Praktický význam to však nemá, neboť kompilace do souborového formátu PDF se téměř výhradně provádí pomocí `pdflatex`.

```
\hypersetup{%
  addtopdfcreator={and the ipothses document class},
%%
%% Set the base URL of the PDF document:
  baseurl=https://is.slu.cz/www/hle0002/vyuka/aid/ipothses/,
%%
%% Driver if compiled with latex (not pdflatex):
% driverfallback=hypertex,
% driverfallback=dvips,
% driverfallback=ps2pdf,
% driverfallback=dvipdfm,
  driverfallback=dvipdfmx,
```

⟨řádky vynechány⟩

```
%% If true, adds backlink text to the end of each bibitem:
  backref=false,
  pagebackref=false,
```

⟨řádky vynechány⟩

```
%% PDF display:
% pdfpagelayout=SinglePage,
% pdfpagelayout=OneColumn,
% pdfpagelayout=TwoColumnLeft,
% pdfpagelayout=TwoColumnRight,
% pdfpagelayout=TwoPageLeft,
  pdfpagelayout=TwoPageRight,
```

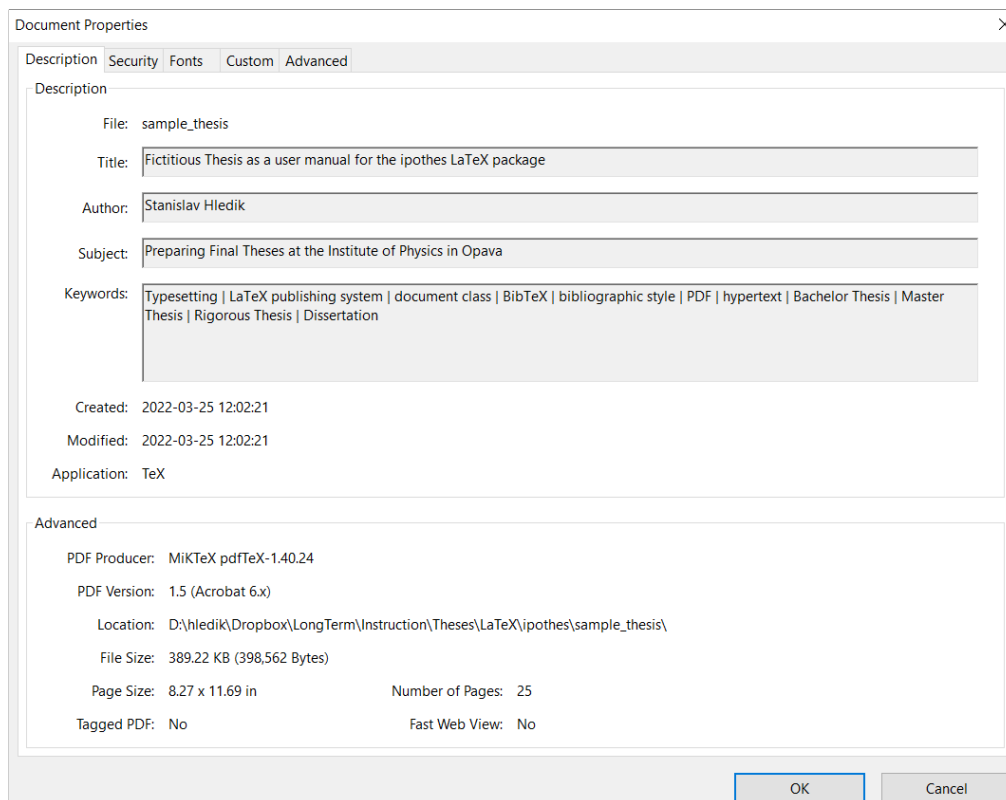
⟨řádky vynechány⟩

```
  pdfview=Fit,
  pdfstartview=Fit,
  pdfremotestartview=Fit,
% pdfffitwindow=true,
}
```

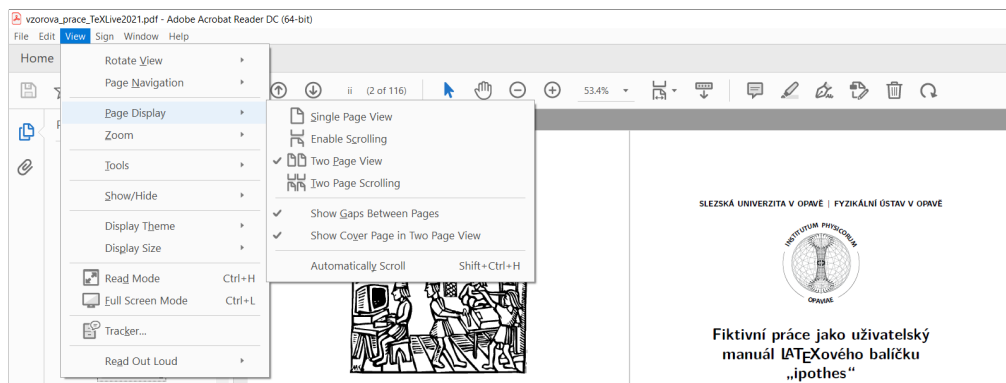
Balíček `hyperref` je poměrně složitý. Pro bližší informace o něm a jeho konfiguraci proto odkazujeme na rozsáhlou dokumentaci [96] nebo na některou z monografií [2, 11, 12].

Za zmínku stojí možnost nastavení klíčů `backref` a `pagebackref` na hodnotu `true`, jež k bibliografickým položkám přidá odkazy vedoucí zpět na citace, z nichž čtenář odskočil. Dále, klíč `pdfpagelayout` je implicitně nastaven na hodnotu `TwoPageRight`, s níž se v Adobe Acrobat Readeru PDF dokument zobrazuje jako otevřená kniha s lichou stránkou vpravo, jak je ilustrováno na obrázku E.2.

Definice příkazu `\href` je rozšířena tak, aby byl použitelný i bez balíčku `hyperref`, tj. se zakomentovanou volbou `htext`.



Obrázek E.1. Vlastnosti dokumentu zobrazené Adobe Acrobat Readerem.



Obrázek E.2. Zobrazení „otevřené knihy“ Adobe Acrobat Readerem.

S hypertextem souvisejí i pole `eprint` a `doi` implementovaná v bibliografickém stylu `ipthes.bst`; jejich hodnoty budou hypertextovými odkazy na odpovídající bibliografickou položku v ARXIV a DOI. Podrobnější informace o jejich použití a tvorbě bibliografie obecně je v Kapitole ??.

Pár doporučení na závěr . . .

. . . zejména pro studenty bakalářského studia.

Pro obhajobu závěrečné práce byste si měli vytvořit a dataprojektorem promítat prezentaci o trvání cca 15 až 25 minut – to závisí na typu práce – a rozhodně byste se o délce trvání prezentace měli pobavit s vedoucím vaší práce. Rozhodně při obhajobě nepromítejte stránky ze závěrečné práce vysázené pomocí `ipthes` (mějte je však pro potřeby případné diskuse připraveny). Jednak díky portrétové orientaci špatně využívá promítací plochu a má pro tyto účely příliš malý, obtížně čitelný stupeň písma, jednak by prezentace měla být pouze heslovitá, bez ucelených vět a odstavců. To, co je vhodné k tisku na papír, není vhodné pro prezentaci a obráceně. Pro vytvoření prezentace použijte buď PowerPoint nebo některé z L^AT_EXových řešení `pdfscreen` [104], `Beamer` [105].

Při přípravě závěrečné práce pomocí `ipthes` doporučuji vypnout volbu `htext` popsanou v Dodatku A na stránce 87, kompilace se tím urychlí. Kromě toho byste měli mít tuto volbu vypnutou u kompilace pro tištěnou formu práce, neboť zapnutá volba `htext` barevně odlišuje různé typy odkazů, a tato barva se bude tisknout³ (v případě černobílého tisku jako odpovídající stupeň šedi). Naopak u kompilace pro elektronickou verzi práce je vhodné mít volbu `htext` zapnutou; hypertextové odkazy urychlují prohlížení dokumentu.

V názvech L^AT_EXových zdrojových souborů a souborů s obrázky nepoužívejte akcentovaná písmena a mezery. T_EX systém by s tím mohl mít potíže. Místo `Třetění úhlu.tex` použijte `Treteni_uhlu.tex` a podobně.

Rozsáhlejší práce rozdělte na *kořenový (mateřský) soubor* obsahující standardní strukturu L^AT_EXového dokumentu (u tohoto manuálu se jedná o soubor `vzorova_prace.tex`), a vlastní text přesuňte (nejlépe po kapitolách) do separátních souborů, jež vložíte do kořenového souboru pomocí příkazů `\include`. Podrobné instrukce naleznete např. v [12]. V případě

³ Na rozdíl od implicitních rámečků, které jsou vidět při prohlížení na monitoru, ale ne v tisku.

zdrojových souborů tohoto manuálu jsou tyto inkludované soubory umístěny v adresáři `include`.⁴

Máte-li v práci enormní množství matematiky, stojí ze to podívat se do Wickovy knihy [106] nebo do článku [107] a nastudovat základní pravidla matematické sazby. Jako příručka matematické sazby může posloužit i text [108]. Obecné pravidlo zní: nevíte-li si se sazbou nějakého prvku rady, napište si makro [12] s prozatímní definicí, kterou můžete po konzultaci nebo nastudování literatury dodatečně změnit. Pro obecné poučení o estetické sazbě stojí za to nahlédnout do [100] nebo do Beranova *Typografického manuálu* [109].

⁴ Dokumentní třída `ipotes.cls` je v něm najde.

Literatura

- [1] LAMPORT, L.: *L^AT_EX: A Document Preparation System User's Guide and Reference Manual. Updated for L^AT_EX 2_ε*. Addison-Wesley, Reading, MA, 2. vydání, 1994, ISBN 0-201-52983-1.
- [2] GOOSSENS, M.; MITTELBAACH, F. & SAMARIN, A.: *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994, ISBN 0-201-54199-8.
- [3] L^AT_EX.NET, L^AT_EX.ORG AND L^AT_EX-COMMUNITY.ORG: *The L^AT_EX Network*, online (navštíveno 2022-04-25). On LaTeX-Community.org, founded January 2007, many authors published articles about LaTeX and related tools (the site has been renamed to <https://LaTeX.net>), URL <https://latex.net/>.
- [4] CTAN: *Comprehensive T_EX Archive Network*, online (navštíveno 2022-05). URL <https://ctan.org/>.
- [5] OVERLEAF: *The easy to use, online, collaborative L^AT_EX editor*, online (navštíveno 2022-05). URL <https://www.overleaf.com/>.
- [6] PATASHNIK, O.: *BIBT_EX – Process bibliographies for L^AT_EX, etc*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live as bibtex, in MiKTeX as miktex-bibtex-bin-*.*, URL <https://ctan.org/pkg/bibtex>.
- [7] BEEBE, N. H. F. & CHEN, P.: *makeindex — Process index output to produce typesettable code*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live as makeindex, in MiKTeX as miktex-makeindex-bin-*.*, URL <https://ctan.org/pkg/makeindex>.
- [8] THE L^AT_EX TEAM: *makeidx – Standard L^AT_EX package for creating indexes*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live as latex, in MiKTeX as ltxbase, URL <https://ctan.org/pkg/makeidx>.
- [9] RYBIČKA, J.: *L^AT_EX pro začátečníky*. Konvoj, Brno, 3. vydání, 2005, ISBN 80-7302-049-1. Viz též učební text k semináři dostupný na <https://akela.mendelu.cz/~rybicka/zaklady.pdf>, URL <https://www.cbdb.cz/kniha-100243-latex-pro-zacatecniky>.
- [10] GOOSSENS, M.; RAHTZ, S. & MITTELBAACH, F.: *The L^AT_EX Graphics Companion. Illustrating documents with T_EX and PostScript*. Addison Wesley Longman Inc., Reading, Massachusetts, 1997, ISBN 0-201-85469-4.

- [11] GOOSSENS, M. & RAHTZ, S.: *The L^AT_EX Web Companion. Integrating T_EX, HTML, and XML*. Addison Wesley Longman Inc., Reading, Massachusetts, 1999, ISBN 0-201-43311-7.
- [12] KOPKA, H. & DALY, P. W.: *L^AT_EX. Podrobný průvodce*. Computer Press, Brno, 1. vydání, 2004, ISBN 80-722-6973-9.
- [13] WRIGHT, J.; FAIRBAIRNS, R. ET AL.: *Frequently Asked Question List for T_EX*, online (navštíveno 2022-05). The questions answered here cover a wide range of topics, but typesetting issues are mostly covered from the viewpoint of a L^AT_EX user, URL <https://texfaq.org/>.
- [14] OETIKER, T.; PARTL, H.; HYNÁ, I. & SCHLEGL, E.: *The Not So Short Introduction to L^AT_EX 2_ε (Or L^AT_EX 2_ε in < 150 minutes)*, online (navštíveno 2022-05). URL <https://tobi.oetiker.ch/lshort/lshort.pdf>.
- [15] HLEDÍK, S.: *Bažákův průvodce publikačním systémem L^AT_EX*. Slezská univerzita v Opavě, Filozoficko-přírodovědecká fakulta, Opava, online (navštíveno 2022-05). Výukový materiál, URL <https://is.slu.cz/www/hle0002/vyuka/aid/>.
- [16] POLÁCH, E.: *Pravidla sazby diplomových prací*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, České Budějovice, 1998. URL <http://home.pf.jcu.cz/~edpo/pravidla/pravidla.pdf>.
- [17] RYBIČKA, J.: *Doporučení pro úpravu závěrečných prací*. Brno, 2006. URL <https://akela.mendelu.cz/~rybicka/dahlia/zpract/dipp.pdf>.
- [18] VÁLEK, V.: *Numerická simulace rotací stabilizované magnetické levitace*. Bakalářská práce, Slezská univerzita v Opavě, Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě, Opava, 2015. Studijní obor: Astrofyzika.
- [19] BRYJOVÁ, I.: *Principy a metody moderní medicínské diagnostiky*. Bakalářská práce, Slezská univerzita v Opavě, Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě, Opava, 2007. Studijní obor: Počítačová technika a její aplikace.
- [20] FABIÁNOVÁ, P.: *Porovnání historických a soudobých snímků Opavy metodami analýzy obrazu*. Diplomová práce, Slezská univerzita v Opavě, Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě, Opava, 2017. Studijní obor: Počítačová fyzika.
- [21] HLEDÍK, S.: *General relativistic polytropes and repulsive cosmological constant*. Dissertation Thesis, Silesian University in Opava, Faculty of Philosophy and Science in Opava, Opava, 2014. Branch of study: Theoretical Physics and Astrophysics.
- [22] SCHENK, C.: *T_EX Directory Structure*, online (navštíveno 2022-05). URL <https://miktex.org/kb/tds>.
- [23] SCHENK, C.: *MiKTeX – a modern T_EX distribution for Windows, Linux and macOS*, online (navštíveno 2022-05). URL <https://miktex.org/>.
- [24] T_EX USERS GROUP: *T_EX Live is a cross-platform, free software distri-*

- tribution for the $\text{\TeX}$ typesetting system that includes major $\text{\TeX}$ -related programs, macro packages, and fonts, online (navštíveno 2022-05). URL <https://www.tug.org/texlive/>.
- [25] SIEVER, E.: *Linux in a Nutshell*. O'Reilly & Associates, Inc., Sebastopol, 2. vydání, únor 1999, ISBN 1-56592-585-8. URL <http://www.oreilly.com/>.
- [26] WRIGHT, J. & LEHMAN, P.: *etoolbox – e- $\text{\TeX}$ tools for $\text{\LaTeX}$* , online (navštíveno 2022-05). The etoolbox package is a toolbox of programming tools geared primarily towards $\text{\LaTeX}$ class and package authors. It provides $\text{\LaTeX}$ frontends to some of the new primitives provided by e- $\text{\TeX}$ as well as some generic tools which are not related to e- $\text{\TeX}$ but match the profile of this package. Contained in $\text{\TeX}$ Live and MiKTeX as etoolbox, URL <https://ctan.org/pkg/etoolbox>.
- [27] VOSS, H.; GIROU, D.; MANSFIELD, N.; VAN ZANDT, T. & RAHTZ, S.: *fancyvrb – Sophisticated verbatim text*, online (navštíveno 2022-05). Contained in $\text{\TeX}$ Live and MiKTeX as fancyvrb, URL <https://ctan.org/pkg/fancyvrb>.
- [28] JACKOWSKI, B. & NOWACKI, J. M.: *lm – Latin modern fonts in outline formats*, online (navštíveno 2022-05). Contained in $\text{\TeX}$ Live and MiKTeX as lm, URL <https://ctan.org/pkg/lm>.
- [29] THE $\text{\LaTeX}$ TEAM: *fontenc – Standard package for selecting font encodings*, online (navštíveno 2022-05). Contained in $\text{\TeX}$ Live as latex, in MiKTeX as ltxbase, URL <https://ctan.org/pkg/fontenc>.
- [30] THE $\text{\LaTeX}$ TEAM; MITTELBACH, F. & JEFFREY, A.: *inputenc – Accept different input encodings*, online (navštíveno 2022-05). Contained in $\text{\TeX}$ Live as latex, in MiKTeX as ltxbase, URL <https://ctan.org/pkg/inputenc>.
- [31] BEZOS LÓPEZ, J. & BRAAMS, J. L.: *babel – Multilingual support for $\text{\LaTeX}$* , online (navštíveno 2022-05). Contained in $\text{\TeX}$ Live and MiKTeX as babel, URL <https://ctan.org/pkg/babel>.
- [32] RAHTZ, S.: *times – Select Adobe Times Roman (or equivalent) as default font*, online (navštíveno 2022-05). Contained in $\text{\TeX}$ Live and MiKTeX as psnfss [34]; the package is now obsolete, replaced by the mathptmx [33] package, which supports Times Roman text and (mostly) matching mathematics, URL <https://ctan.org/pkg/times>.
- [33] THE $\text{\LaTeX}$ TEAM; VIETH, U.; JEFFREY, A.; RAHTZ, S. & SCHMIDT, W. A.: *mathptmx – Use Times as default text font, and provide maths support*, online (navštíveno 2022-05). Contained in $\text{\TeX}$ Live and MiKTeX as psnfss [34], URL <https://ctan.org/pkg/mathptmx>.
- [34] HARCOMBE, K.; THE $\text{\LaTeX}$ TEAM; RAHTZ, S. & SCHMIDT, W. A.: *psnfss – Font support for common PostScript fonts*, online (navštíveno 2022-05). Contained in $\text{\TeX}$ Live and MiKTeX as psnfss, URL <https://ctan.org/pkg/psnfss>.

- [//ctan.org/pkg/psnfss](https://ctan.org/pkg/psnfss).
- [35] RYU, Y.: *txfonts – Times-like fonts in support of mathematics*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as txfonts, URL <https://ctan.org/pkg/txfonts>.
 - [36] BIDI-TEX GITHUB ORGANISATION; KHALIGHI, V. & COCHRAN, S. D.: *subfig – Figures broken into subfigures*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as subfig, URL <https://ctan.org/pkg/subfig>.
 - [37] EARNSHAW, S.: On the Nature of the Molecular Forces which regulate the Constitution of the Luminiferous Ether. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **VII**, str. 97–112, 1842. Read March 18, 1839 at the Cambridge Philosophical Society, URL <http://www.mit.edu/~kardar/research/seminars/Casimir2010/pdf/EarnshawPaper.pdf>.
 - [38] BASSANI, R.: Earnshaw (1805–1888) and Passive Magnetic Levitation. *Meccanica*, **41**(4), str. 375–389, 2006, ISSN 0025-6455 (print), 1572-9648 (online), doi:[10.1007/s11012-005-4503-x](https://doi.org/10.1007/s11012-005-4503-x).
 - [39] LEVITATION ARTS: *Levitron Central*, online (navštíveno 2022-05). See also the Czech web on Levitron <http://www.levitron.cz/>, URL <https://levitationarts.com/>.
 - [40] GRAY, T.: *Ignorance = Maglev = Bliss*, online (navštíveno 2022-05). For 150 years scientists believed that stable magnetic levitation was impossible. Then Roy Harrigan came along, URL <http://www.popsci.com/diy/article/2004-02/ignorance-maglev-bliss>.
 - [41] GOV, S. & SHTRIKMAN, S.: *How High Can The U-CAS Fly?*, leden 1999. arXiv:[physics/9902002v1](https://arxiv.org/abs/physics/9902002v1).
 - [42] HARRIGAN, R. M.: US patent 4.382.245, 1983.
 - [43] SIMON, M. D.; HEFLINGER, L. O. & RIDGWAY, S. L.: Spin stabilized magnetic levitation. *Amer. J. Phys.*, **65**(4), str. 286–292, duben 1997, ISSN 0002-9505, doi:[10.1119/1.18488](https://doi.org/10.1119/1.18488). Copyright AAPT 1997, URL <http://www.physics.ucla.edu/marty/levitron/spinstab.pdf>.
 - [44] BERRY, M. V.: The LevitronTM: an adiabatic trap for spins. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **452**(1948), str. 1207–1220, květen 1996, ISSN 1471-2946 (online), doi:[10.1098/rspa.1996.0062](https://doi.org/10.1098/rspa.1996.0062). URL <https://wolfr.am/13PVzFoPd>.
 - [45] HABALA, L.: *Problémové úlohy pro fyzikální praktikum*. Diplomová práce, Slezská univerzita v Opavě, Filozoficko-přírodovědecká fakulta, Opava, 1999. Obor Učitelství F-M.
 - [46] CAZACU, E. & NEMOIANU, I. V.: A novel configuration for static permanent magnet levitation. *Rev. Roumaine Sci. Tech. Sér. Électrotech. Énergét.*, **55**(2), str. 153–160, 2010. URL <http://revue.elth.pub.ro/viewpdf.php?id=224>.

- [47] DULLIN, H. R. & EASTON, R. W.: Stability of Levitrons. *Z. Angew. Math. Mech.*, **79**(S1), str. 167–170, 1999, ISSN 1521-4001 (online), doi:[10.1002/zamm.19990791344](https://doi.org/10.1002/zamm.19990791344). URL <http://www.maths.usyd.edu.au/u/dullin/preprints/Levitron.pdf>.
- [48] FLANDERS, P.; GOV, S.; SHTRIKMAN, S. & THOMAS, H.: On the spinning motion of the hovering magnetic top. *Phys. D*, **126**(3-4), str. 225–235, únor 1999, ISSN 0167-2789, doi:[10.1016/S0167-2789\(98\)00283-8](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(98)00283-8). arXiv:[physics/9803044v1](https://arxiv.org/abs/physics/9803044v1).
- [49] FRENCH, M. M. J.: The wonders of levitation. *Physics Education*, **45**(1), str. 37, leden 2010, ISSN 0031-9120 (print), 1361-6552 (online), doi:[10.1088/0031-9120/45/1/003](https://doi.org/10.1088/0031-9120/45/1/003). arXiv:[1010.5761v1](https://arxiv.org/abs/1010.5761v1).
- [50] GANS, R. F.; JONES, T. B. & WASHIZU, M.: Dynamics of the LevitronTM. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **31**(6), str. 671–679, březn 1998, ISSN 0022-3727 (print), 1361-6463 (online), doi:[10.1088/0022-3727/31/6/015](https://doi.org/10.1088/0022-3727/31/6/015).
- [51] GENTA, G.; DELPRETE, C. & RONDANO, D.: Gyroscopic Stabilization of Passive Magnetic Levitation. *Meccanica*, **34**(6), str. 411–424, 1999, ISSN 0025-6455 (print), 1572-9648 (online), doi:[10.1023/A:1004704428634](https://doi.org/10.1023/A:1004704428634).
- [52] GOV, S.; SHTRIKMAN, S. & THOMAS, H.: On the dynamical stability of the hovering magnetic top. *Phys. D*, **126**(3-4), str. 214–224, únor 1999, ISSN 0167-2789, doi:[10.1016/S0167-2789\(98\)00282-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(98)00282-6). arXiv:[physics/9803020v1](https://arxiv.org/abs/physics/9803020v1).
- [53] JONES, T. B.; WASHIZU, M. & GANS, R. F.: Simple theory for the Levitron[®]. *J. Appl. Phys.*, **82**(2), str. 883–888, červenec 1997, ISSN 0021-8979 (print), 1089-7550 (online), doi:[10.1063/1.365856](https://doi.org/10.1063/1.365856). URL <http://physik.uibk.ac.at/hephy/maturanten/levitron/Jones/jones.pdf>.
- [54] BERRY, M. V.: *Levitron Physics. Some Frequently Asked Questions About Levitron Physics*, online (navštíveno 2022-05). URL <https://michaelberryphysics.files.wordpress.com/2013/07/berry272.pdf>.
- [55] BORNHAUSER, N.: *Optics Rotation: LevitronTM*, online (navštíveno 2022-05). PDF presentation, URL <http://ultracold.physics.sunysb.edu/Courses/PHY582-08.Fall/talks/Bornhauser%202007-II.pdf>.
- [56] SIMON, M. D.; HEFLINGER, L. O. & GEIM, A. K.: Diamagnetically stabilized magnet levitation. *Amer. J. Phys.*, **69**(6), str. 702–713, červen 2001, ISSN 0002-9505 (print), doi:[10.1119/1.1375157](https://doi.org/10.1119/1.1375157). URL <http://www.physics.ucla.edu/marty/diamag/ajp601.pdf>.
- [57] SIMON, M. D. & GEIM, A. K.: Diamagnetic levitation: Flying frogs and floating magnets (invited). *J. Appl. Phys.*, **87**(9), str. 6200–6204, květen 2000, ISSN 0021-8979 (print), 1089-7550 (online), doi:[10.1063/1.372654](https://doi.org/10.1063/1.372654). URL <http://www.physics.ucla.edu/marty/diamag/diajap00.pdf>.
- [58] BERRY, M. V. & GEIM, A. K.: Of flying frogs and levitrons. *Eu-*

- ropean J. Phys.*, **18**(4), str. 307–313, červenec 1997, ISSN 0143-0807 (print), 1361-6404 (online), doi:[10.1088/0143-0807/18/4/012](https://doi.org/10.1088/0143-0807/18/4/012). URL <https://wolfr.am/13PVS50d5>.
- [59] GEIM, A. K.; SIMON, M. D.; BOAMFA, M. I. & HEFLINGER, L. O.: Magnet levitation at your fingertips. *Nature*, **400**, str. 323–324, červenec 1999, ISSN 0028-0836 (print), 1476-4687 (online), doi:[10.1038/22444](https://doi.org/10.1038/22444). Scientific correspondence, URL <http://www.physics.ucla.edu/marty/diamag/magnet.pdf>.
- [60] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. & SAFKO, J.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, San Francisco, 3. vydání, 2002, ISBN 0-321-18897-7. Copyright 2002 Pearson Education.
- [61] PURCELL, E. M. & MORIN, D. J.: *Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, New York, 3. vydání, březen 2013, ISBN 9781107014022.
- [62] LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M.: *The Classical Theory of Fields*. Course of Theoretical Physics Series, Volume 2, Butterworth-Heinemann, Oxford, 4. vydání, leden 1980, ISBN 978-0750627689.
- [63] HLEDÍK, S.: *Interactive Model of Spin-Stabilized Magnetic Levitation*, 2011. Presentation at the Wolfram Technology Conference 2011, October 19–21, Champaign, IL, USA, URL <https://www.wolfram.com/events/technology-conference/2011/science-and-engineering.html>.
- [64] DOWSETT, D. J.; KENNY, P. A. & JOHNSTON, R. E.: *The Physics of Diagnostic Imaging*. Hodder Arnold, 2. vydání, červenec 2006, ISBN 0-340-80891-8. URL <http://www.hoddereducation.com>.
- [65] ROZMAN, J. ET AL.: *Elektronické přístroje v lékařství*. Academia, Praha, 1. vydání, 2006, ISBN 80-200-1308-3. URL <http://www.academiaknihy.cz/>.
- [66] NAVRÁTIL, L.; ROSINA, J. ET AL.: *Medicínská biofyzika*. Grada Publishing, a.s., Praha, 1. vydání, 2005, ISBN 80-247-1152-4.
- [67] Zázračná planeta: Nazí až na kost, 2007. Televizní dokument USA, Česká televize, pátek 23. 3. 2007, 20:00–21:00.
- [68] BRDIČKA, M.; SAMEK, L. & SOPKO, B.: *Mechanika kontinua*. Česká matice technická, Academia, Praha, 3. vydání, 2005, ISBN 80-200-1344-X.
- [69] J. P. HORNAK: *The Basics of MRI*, online (navštíveno 2022-05). URL <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri/>.
- [70] ULLMANN, V.: *Aplikace ionizujícího záření – jaderné a radiační metody*, online (navštíveno 2022-05). URL <http://astronuklfyzika.cz/JadRadMetody.htm>.
- [71] HAUSSEER, K. H.: Jaderná magnetická rezonance v biologii a lékařství. *Čs. čas. fyz. A*, **40**(2), str. 101–121, 1990, ISSN 0009-0700.

- [72] ČERNÁ, J.: NMR Imaging (Nobelova cena za lékařství a fyziologii 2003). *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.*, **49**(1), str. 15–23, 2004, ISSN 0032-2423. URL <http://www.jcmf.cz/>.
- [73] ENGLISH, J.: Pulzní metoda jaderné magnetické rezonance a její užití v MR tomografii. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.*, **40**(4), str. 198–207, 1995.
- [74] LAUTERBUR, P. C.: Image formation by induced local interactions: examples employing nuclear magnetic resonance. *Nature*, **242**, str. 190–191, 1973.
- [75] MADĚŘIČ, R.: Ústní sdělení, červen 2007. Fakultní nemocnice s poliklinikou Ostrava.
- [76] ŽÁRA, J.; BENEŠ, B.; SOCHOR, J. & FELKEL, P.: *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, Brno, 2. vydání, 2004, ISBN 80-251-0454-0.
- [77] PRATT, W. K.: *Digital Image Processing: PIKS Scientific Inside*. Wiley-Interscience Publishing, Hoboken, NJ, 4. vydání, únor 2007, ISBN 978-0471767770, doi:[10.1002/0470097434](https://doi.org/10.1002/0470097434). A newly updated and revised edition of the classic introduction to digital image processing.
- [78] SOJKA, E.; GAURA, J. & KRUMNIKL, M.: *Matematické základy digitálního zpracování obrazu*. VŠB-TU Ostrava (Fakulta elektrotechniky a informatiky), Západočeská univerzita v Plzni, Ostrava, Plzeň, 2. vydání, září 2011. URL http://mrl.cs.vsb.cz/people/sojka/dzo_course.html.
- [79] GONZALEZ, R. C. & WOODS, R. E.: *Digital Image Processing*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 3. vydání, srpen 2007, ISBN 013168728X.
- [80] ARDESHIR GOSHTASBY, A.: *Image Registration: Principles, Tools and Methods*. Advances in Computer Vision and Pattern Recognition, Springer, London, 2012 vydání, leden 2012, ISBN 978-1447124573, doi:[10.1007/978-1-4471-2458-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2458-0).
- [81] ŠONKA, M.; HLAVÁČ, V. & BOYLE, R.: *Image Processing, Analysis, and Machine Vision*. Thomson Learning, Toronto, 3. vydání, duben 2007, ISBN 049508252X.
- [82] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. & FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes with Source Code CD-ROM. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 3. vydání, online (navštíveno 2022-05), ISBN 9780521884075. URL <http://numerical.recipes/>.
- [83] STUHLÍK, Z.: Spherically symmetric static configurations of uniform density in spacetimes with a non-zero cosmological constant. *Acta Phys. Slovaca*, **50**(2), str. 219–228, březen 2000, ISSN 0323-0465/00. arXiv:[0803.2530](https://arxiv.org/abs/0803.2530), URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008arXiv0803.2530S>.
- [84] MISNER, C. W.; THORNE, K. S. & WHEELER, J. A.: *Gravitation*. W. H. Freeman and Co, New York, San Francisco, 1973.

- [85] BÖHMER, C. G.: Eleven Spherically Symmetric Constant Density Solutions with Cosmological Constant. *Gen. Relativity Gravitation*, **36**, str. 1039–1054, květen 2004, doi:[10.1023/B:GERG.0000018088.69051.3b](https://doi.org/10.1023/B:GERG.0000018088.69051.3b). arXiv:[gr-qc/0312027](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0312027), URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004GrGr...36.1039B>.
- [86] BÖHMER, C. G. & FODOR, G.: Perfect fluid spheres with cosmological constant. *Phys. Rev. D*, **77**(6), 064008, březn 2008, doi:[10.1103/PhysRevD.77.064008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.064008). arXiv:[0711.1450](https://arxiv.org/abs/0711.1450), URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvD...77f4008B>.
- [87] STUHLÍK, Z.; HLEDÍK, S.; ŠOLTÉS, J. & ØSTGAARD, E.: Null geodesics and embedding diagrams of the interior Schwarzschild–de Sitter spacetimes with uniform density. *Phys. Rev. D*, **64**(4), str. 044004 (17 pages), červenec 2001, ISSN 0556-2821, doi:[10.1103/PhysRevD.64.044004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.044004).
- [88] STUHLÍK, Z.: Spherically symmetric static configurations of uniform density in spacetimes with a non-zero cosmological constant. V *Acta Phys. Slovaca* [83], str. 219–228, ISSN 0323-0465/00. arXiv:[0803.2530](https://arxiv.org/abs/0803.2530), URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008arXiv0803.2530S>.
- [89] STUHLÍK, Z.; HLADÍK, J.; URBANEC, M. & TÖRÖK, G.: Neutrino trapping in extremely compact objects described by the internal Schwarzschild–(anti-)de Sitter spacetimes. *Gen. Relativity Gravitation*, **44**(6), str. 1393–1417, 2012, doi:[10.1007/s10714-012-1346-3](https://doi.org/10.1007/s10714-012-1346-3).
- [90] CARLISLE, D.; RAHTZ, S. & L^AT_EX3 PROJECT: *graphicx – Enhanced support for graphics*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as graphics, URL <https://ctan.org/pkg/graphicx>.
- [91] HIRATA, S.; THE T_EX LIVE TEAM; CHO, J.-H.; FRANZ, M.; HOSNY, K.; WICKS, M. A. & BREITENLOHNER, P.: *dvipdfmx – An extended version of dvipdfm*, online (navštíveno 2022-05). Dvipdfmx (formerly dvipdfm-cjk) is a development of dvipdfm [110] created to support multi-byte character encodings and large character sets for East Asian languages. Contained in T_EX Live and MiKTeX as dvipdfmx, URL <https://ctan.org/pkg/dvipdfmx>.
- [92] DALY, P. W. & OGAWA, A.: *natbib – Flexible bibliography support*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as natbib, URL <https://ctan.org/pkg/natbib>.
- [93] DALY, P. W.: *Natural Sciences Citations and References. (Author-Year and Numerical Schemes)*, online (navštíveno 2022-05). This paper describes package natbib version 8.1a from 2007/10/30, URL <https://www.coursehero.com/file/101180032/natbib2pdf/>.
- [94] THE L^AT_EX TEAM: *amsmath – AMS mathematical facilities for L^AT_EX*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as amsmath, URL <https://ctan.org/pkg/amsmath>.

-
- [95] THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY: *amsfonts* – *T_EX fonts from the American Mathematical Society*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as *amsfonts*, URL <https://ctan.org/pkg/amsfonts>.
- [96] THE L^AT_EX TEAM; OBERDIEK, H. & RAHTZ, S.: *hyperref* – *Extensive support for hypertext in L^AT_EX*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as *hyperref*, URL <https://ctan.org/pkg/hyperref>.
- [97] ARSENEAU, D.: *url* – *Verbatim with URL-sensitive line breaks*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as *url*, URL <https://ctan.org/pkg/url>.
- [98] THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY: *amsthm* – *Typesetting theorems (AMS style)*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as *amsthm*, URL <https://ctan.org/pkg/amsthm>.
- [99] STŘEDNÍ ŠKOLA MEDIÁLNÍ GRAFIKY A TISKU: *Formáty papíru*, online (navštíveno 2022-05). URL <http://www.sspp.cz/praxe/zrcadlo.pdf>.
- [100] POP, P.; FLÉGER, J. & POP, V.: *Sazba I. Ruční sazba*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1984.
- [101] ADOBE INC.: *Adobe Acrobat Reader DC*, online (navštíveno 2022-05). URL <https://get.adobe.com/reader/>.
- [102] ARTIFEX SOFTWARE, INC.: *MuPDF*, online (navštíveno 2022-05). MuPDF is a lightweight PDF, XPS, and E-book viewer, URL <https://mupdf.com/>.
- [103] STACKEXCHANGE: *All possible (La)TeX implementations and drivers to create PDF*, online (navštíveno 2022-05). TeX-LaTeX Stack Exchange is a question and answer site for users of T_EX, L^AT_EX, ConT_EXt, and related typesetting systems, URL <https://wolfr.am/14wN0goLo>.
- [104] RADHAKRISHNAN, C. V.: *pdfscreen* – *Support screen-based document design*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as *pdfscreen*, URL <https://ctan.org/pkg/pdfscreen>.
- [105] SAMCARTER; WRIGHT, J.; MILETIĆ, V.; STUART, L. & TANTAU, T.: *beamer* – *A L^AT_EX class for producing presentations and slides*, online (navštíveno 2022-05). Contained in T_EX Live and MiKTeX as *beamer*, URL <https://ctan.org/pkg/beamer>.
- [106] WICK, K.: *Pravidla matematické sazby*. Academia, Praha, 2. vydání, 1966. URL <https://vufind.mzk.cz/Record/MZK01-000238413>.
- [107] HORÁK, K.: Math typesetting in Czech texts (in Czech). *Zpravodaj Československého sdružení uživatelů T_EXu*, **11**(1–3), str. 136–148, 2001, ISSN 1211-6661, doi:[10.5300/2001-1-3/136](https://doi.org/10.5300/2001-1-3/136).
- [108] NEČAS, D.: *Yetiho typografický bestiář*, 2003. URL <http://monoceros>.

physics.muni.cz/~yeti/tex/bestiary.pdf.

- [109] BERAN, V.: *Typografický manuál – učebnice počítačové typografie*. Kafka design, Praha, 2. vydání, 1999.
- [110] WICKS, M. A.: *dvipdfm – A DVI driver to produce PDF directly*, online (navštíveno 2022-05). Note that the extended version dvipdfmx [91] will operate “as dvipdfm” if necessary, URL <https://ctan.org/pkg/dvipdfm>.